Научная статья
УДК 378.4
https://doi.org/10.24888/2073-8439-2024-66-2-138-147

О ПРИВЛЕЧЕНИИ СТУДЕНТОВ К ИЗУЧЕНИЮ АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЫ (НА ПРИМЕРЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ГРУПП И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯХ)

О.А. Сотникова[1], **В.В. Чермных**[2]

[1,2] Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия
[1] sotnikovaoa@syktsu.ru
[2] vv146@mail.ru

Резюме. *Авторы анализируют изменения содержания курса алгебры, традиционно используемого в вузах при подготовке учителя математики. Освещаются изменения в содержании алгебраической подготовки, являющиеся следствием преобразований в системе образования. Подчеркивается важность изучения вопросов общей алгебры. Усматривается проблема, состоящая в невозможности создать условия для освоения абстрактной алгебры в существующих подходах к изучению алгебраического курса. Учитывая общие образовательные ориентиры и важность общеалгебраической составляющей, авторы предлагают решение указанной проблемы с методической точки зрения. В этих аспектах построения содержания общей алгебры при обучении будущих учителей математики авторы усматривают варианты мотивирующих действий. Одним из таких вариантов указывается подбор серии задач (от учебных до исследовательских), разбор решений которых позволяет открыть методы общей алгебры, сформулировать некоторые понятия абстрактной алгебры и рассмотреть их приложения. В статье описывается предлагаемый вариант к решению одной известной задачи для школьников из журнала «Квант». Приводится формулировка (основной) задачи. Предлагается система упражнений, позволяющая достичь решения основной задачи. Наибольший интерес представляет решение представленных упражнений. Организация обсуждения этих решений со студентами-математиками педагогического вуза позволяет ввести новые теоретико-групповые понятия, что иллюстрируется в тексте статьи. В некотором смысле искусственно введенная алгебраическая операция «*» на множестве натуральных чисел позволяет определить группу, причем абелевую и периодическую, изоморфную прямой сумме двухэлементных групп. Эти свойства дают возможность рассмотреть несколько приложений, в частности, игру Ним. Материал, представленный в статье, был апробирован в Сыктывкарском государственном университете имени Питирима Сорокина при подготовке учителей математики.*

Ключевые слова: *теория групп, игра Ним, курс общей алгебры в педвузах*

Для цитирования

Сотникова О.А., Чермных В.В. О привлечении студентов к изучению абстрактной алгебры (на примере одной задачи теории групп и ее приложениях) // Психология образования в поликультурном пространстве. 2024. № 2 (66). С. 138–147. https://doi.org/10.24888/2073-8439-2024-66-2-138-147

Research article

ON INVOLVING STUDENTS IN THE STUDY OF ABSTRACT ALGEBRA (USING THE EXAMPLE OF ONE PROBLEM IN GROUP THEORY AND ITS APPLICATIONS)

Olga A. Sotnikova[1], **Vasiliy V. Chermnykh**[2]

[1, 2] Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia
[1] sotnikovaoa@syktsu.ru
[2] vv146@mail.ru

Abstract. *The authors analize the alterations in the content of the algebra course, which is a conventional part of the university curriculum aimed at training maths teachers. The changes in the algebra skills development resulting from the overhaul of the education system are highlighted. The importance of general algebra is underlined. The problem is considered to be the impossibility to create conditions for mastering abstract algebra under existing approaches to the algebra study. Given general educational guidelines and the significance of the general algebra component, the authors propose to apply a methodology-based solution to the stated problem. The authors notice some options for motivating actions in these aspects of developing the general algebra content in the course of mathematics teacher training. One of such options is the selection of a series of problems (ranging from educational to research related), which makes it possible to discover the methods of general algebra, formulate some concepts of abstract algebra and consider their applications. The article describes a proposed solution to a well-known problem for schoolchildren from the Kvant magazine. The description of the (main) problem is given. A set of exercises is proposed enabling one to achieve a solution to the main problem. The solution to the proposed tasks is of greatest interest. A discussion of these solutions with students of mathematics at a pedagogical university makes it possible to introduce new group-theoretic concepts, which is illustrated in the text of the article. In a certain sense, the algebraic operation '*' artificially introduced on a set of natural numbers allows us to define a group, being it Abelian and periodic, which is isomorphic to the direct sum of two-element groups. These properties allow us to consider a number of applications, in particular, the game of nim. The material presented in the article was tested at the Pitirim Sorokin Syktyvkar State University in the course of mathematics teacher training.*

Keywords: *group theory, Nim game, general algebra course in pedagogical universities*

For citation

Sotnikova, O. A., & Chermnykh, V. V. (2024). On involving students in the study of abstract algebra (using the example of one problem in group theory and its applications). *Psikhologiya obrazovaniya v polikul'turnom prostranstve*, (2), 138–147. (In Russ.) https://doi.org/10.24888/2073-8439-2024-66-2-138-147

Введение

На рубеже XIX–XX вв. произошла смена парадигмы в мире математики, связанная с появлением канторовой теории множеств, общей топологии (Ф. Хаусдорф, П.С. Александров) и общей алгебры (Э. Нётер, Э. Артин). Через некоторое время это неизбежно привело к существенным изменениям в преподавании математики как в школе, так и при подготовке учительских кадров. Изменения стали происходить в некоторых странах с 60-х годов 20-го столетия (например, вспомним проникшие во французскую школу популярные тогда идеи бурбакизации). Мы коснемся темы алгебраического образования в педагогических вузах нашей страны.

В середине 70-х гг. в СССР были введены новые школьные программы по математике, что повлекло разработку единых программ для студентов-математиков педагогических вузов. Хорошим отражением алгебраического образования в педвузах стал учебник Л.Я. Куликова «Алгебра и теория чисел» (1979). Показательны его первые четыре главы, являющиеся введениями в математическую логику, теорию множеств, числовые системы и общую алгебру. Далее на этой базе изучались содержательные теории: линейная алгебра, многочлены и теория чисел. По мере необходимости происходило углубление общеалгебраической составляющей – рассмотрение факторизации групп и колец, делимость в кольцах (кольца главных идеалов, евклидовы кольца), расширения полей. Основополагающим моментом стало то, что общая алгебра оказалась каркасом всего курса алгебры, а также числовых систем и в некоторой степени теории чисел. Отметим, что детальное исследование роли общей алгебры в указанных курсах, а также анализ содержания, традиционно включающийся в вузовский курс алгебры, подробно рассмотрен в монографии О.А. Сотниковой (2008).

Преобразования системы высшего образования в конце прошлого – начале нынешнего столетия изменили ситуацию с преподаванием алгебры, к сожалению, не в лучшую сторону. Изменение подходов к построению образовательного маршрута при подготовке учителя математики неизбежно повлекло трансформацию алгебраического содержания. Безусловно, эта трансформация должна была опираться на методику достижения необходимого качества алгебраической подготовки. Не все вузы смогли это сделать, а методический аспект решения указанной проблемы практически нигде не был задействован. Так, в период перехода на новые образовательные стандарты разработка программ по дисциплинам была отдана на откуп вузам. Для соблюдения требований образовательных стандартов вузы пошли на сокращение объема курса алгебры. Это сокращение произошло за счет наиболее сложных и абстрактных разделов, в частности, тех, которые касаются вопросов общей алгебры. Темы, посвященные группам, кольцам и полям оказались серьезно сокращены. Это привело к уменьшению в алгебраических курсах содержательных результатов и примеров, почти полному игнорированию приложений в смежных алгебраических теориях и к отсутствию связей с другими разделами математики. Эти изменения обосновывались тем, что в средней школе обычный учитель при обучении не использует понятия теорий групп, колец и полей.

На наш взгляд, при определенной балансировке содержания и методики обучения можно обеспечить внимание студентов к вопросам общей алгебры и, как следствие, должное качество алгебраического мышления, что, безусловно, должно привести к повышению уровня профессиональных компетенций учителя математики. В упомянутой балансировке содержания и методики обучения мы исходим из принципа дифференциации обучения. Быть может, не всем студентам необходимо углубленное изучение элементов общей алгебры. Сделать отбор таких студентов и «погрузить» их в основы абстрактной алгебры можно через серию мотивирующих действий.

Какие есть способы мотивировать студентов к изучению общей алгебры? Их существует несколько, и они хорошо известны. Перечислим некоторые. Во-первых, в условиях дефицита времени хорошо помогают дополнительные занятия – кружки, семинары. При этом преподавателя или учителя не должно огорчать небольшое число его слушателей. Во-вторых, очень полезна продуманная система предлагаемых задач, от учебных до исследовательских; важным является процесс обсуждения с заинтересованными студентами на любой фазе: от формулировки задачи до ее разбора. В-третьих, наш опыт показывает, что на начальном этапе обучения студенты с большим энтузиазмом воспринимают темы, в которых общеалгебраические методы помогают решить задачи других разделов.

Приложений групп, колец, полей очень много, многочисленна и соответствующая литература. Кратко скажем о тех приложениях, которые мы использовали в различные годы в своей работе. В теории чисел элементарные групповые рассуждения доказывают теорему Эйлера, малую теорему Ферма, теорему Вильсона. Важным в линейной алгебре является установление изоморфизма кольца линейных операторов конечномерного векторного пространства и полного кольца матриц. К сожалению, студентам педвузов редко предлагается алгебраическое доказательство основной теоремы алгебры (Курош, 2008). Построение курса числовых систем, безусловно, невозможно без активного использования элементов общей алгебры; в частности, полезно студентов знакомить с теоремой Фробениуса о строении конечномерных алгебр с делением над $\mathbb{R}$ (Яшина, 2023). Наконец, при решении некоторых комбинаторных задач хорошо помогает известная лемма Бернсайда.

Ниже мы рассмотрим один фрагмент теории групп, который помог заинтересовать студентов именно своими приложениями.

Вокруг одной задачи для школьников

Рассмотрим известную задачу, предлагавшуюся для читателей журнала «Квант», попытаемся проанализировать трудности, возникающие при ее решении, а также обсудим ее приложения.

Основная задача (Григорян, 1975). *Пусть* $N = 0,1,2,\ldots$ *– множество целых неотрицательных чисел,* $*$ *– бинарная операция на* N*, удовлетворяющая условиям:*

(1) $*$ *коммутативна;*
(2) *если* $a * b = c$*, то* $a * c = b$*;*
(3) *если* $a * b > c$*, то* $a * c < b$ *или* $b * c < a$.

a) *Найти* $0 * 0;\ 0 * 1;\ 1 * 1;\ 0 * 2$*;*
b) *Доказать*: $0 * a = a$ *для любого* $a \in N$.
c) $1 * a = \begin{cases} a + 1, \text{если } a \text{ четно;} \\ a - 1, \text{если } a \text{ нечетно.} \end{cases}$
d) *Доказать, что операция, удовлетворяющая этим условиям, единственна; найти эту операцию.*

Упражнение 1. Решите задачи a), b), c) и докажите единственность операции $*$. При затруднениях можно ознакомиться с их решениями в (Григорян, Тоом, 1975).

В дальнейшем будем считать, что нам известно тождество $0 * a = a$ и его следствие $a * a = 0$.

Наиболее интересным является условие существования указанной операции. Признаемся, что и после ответа на вопрос d) у авторов не было полного понимания, как ими было найдено решение. Видимо, использование *метода пристального взгляда* в некоторый момент привело к пониманию устройства операции $*$. Побудительным мотивом к написанию данного текста и послужило (в первую очередь) желание разобраться, как рационально добраться до ответа на вопрос d). Попутно отметим, что решение задачи в Кванте (Григорян, Тоом, 1975) дает формальное описание операции $*$, но не более того.

Следующие ниже утверждения рассматриваются в предположении, что операция $*$ существует.

Лемма 1. *Пусть* $a, b, c \in N$*. Тогда справедливы утверждения:*

(1) $a * (a * b) = b;$

(2) *Если* $c * a = c * b$, *то* $a = b$.

Доказательство. (1) Из условия (2) определения операции $*$ и тождества $a * b = a * b$ получаем $a * (a * b) = b$.

(2) Пусть $c * a = c * b$, тогда с учетом пункта (1) $a = c * (c * a) = c * (c * b) = b$.

Следствие 1. *Для любых* $a, b \in N$ *уравнение* $a * x = b$ *однозначно разрешимо.*

На начальном этапе решения задачи как гипотеза возникло предположение, что для любых $a, b \in \mathbb{N}$ результат $a * b$ равен $a + b$ или $|a - b|$. Покажем, что это не так.

Лемма 2. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Существуют такие* $a, b \in N$, *что* $a * b$ *отлично как от* $a + b$, *так и от* $|a - b|$;

(2) *Для любых* $a, b \in N$ *выполняется* $|b - a| \leq a * b \leq a + b$.

Доказательство. (1) Предположим, что для любых элементов из N $a * b$ равняется либо $a + b$, либо $|a - b|$. Рассмотрим $3 * 6$. Если $3 * 6 = 3$, то $3 * 3 = 6$, противоречие. Поэтому $3 * 6 = 9 > 5$. Тогда $3 * 5 < 6$ или $6 * 5 < 3$. В первом случае получаем $3 * 5 = 2$, откуда $3 * 2 = 5$. Однако, $3 * 1 = 2$, откуда следует $3 * 2 = 1$, противоречие. Во втором случае $6 * 5 = 1$, откуда $1 * 6 = 5$, противоречие, поскольку 6 – четное число. Таким образом, $6 * 3$ отлично и от 3, и от 9.

(2) Пусть $a < b$ и докажем, что $b - a \leq a * b \leq a + b$. Допустим, что существует минимальный контрпример, т. е. найдутся такие a, $b \in \mathrm{N}$, что $a * b$ не лежит между $b - a$ и $a + b$ и для любых x, $y \in \mathrm{N}$, удовлетворяющих $x < a$, $y \leq b$ или $x \leq a$, $y < b$ выполняется $|y - x| \leq x * y \leq x + y$.

Возможны два варианта: $a * b <$ b – a или $a * b > a + b$. Рассмотрим первый. Пусть $a * b <$ b – a, тогда b>a+$(a * b)$, но с другой стороны в силу леммы 1 и минимальности контрпримера b=$a * (a * b) \leq$ a+$(a * b)$, противоречие.

Во втором варианте, пусть $a * b > a + b$, тогда имеются два случая $a * (a + b) < b$ или $b * (a + b) < a$ по третьему условию в определении операции $*$. Получаем в первом случае:

$a + b = a * \big(a * (a + b)\big)$ по лемме 1

$< a + \big(a * (a + b)\big)$ в силу $a * (a + b) < b$ и минимальности контрпримера

$< a + b$ из неравенства $a * (a + b) < b$, противоречие.

Во втором случае:

$$a + b = b * \big(b * (a + b)\big) < b + \big(b * (a + b)\big) < a + b, \text{ противоречие.}$$

Таким образом, минимального контрпримера не существует.

Пусть $a, b \in \mathrm{N} \setminus \{0\}$. Рассмотрим множества $R_{a,b} = \{a * x : x < b\}$ и $L_{a,b} = \{y * b : y < a\}$. Положим также $R_{a,0} = L_{b,0} = \emptyset$, $R_{0,c} = L_{c,0} = \{0,1 \dots, c - 1\}$ и определим на $\mathbb{N}$ следующую операцию:

$$a \diamond b = \min\big\{\mathrm{N} \setminus \big(R_{a,b} \cup L_{a,b}\big)\big\}.$$

Упражнение 2. Пользуясь способом задания операции $\diamond$, докажите ее коммутативность и ассоциативность.

Предложение 1. Операции $*$ и $\diamond$ совпадают.

Доказательство. Легко проверяется, что $0 \diamond 0 = 0$. Если $b \neq 0$, то $R_{0,b} = \{0,1, \dots, b - 1\}$, $L_{0,b} = \emptyset$, поэтому $0 \diamond b = b = 0 * b$. Таким же образом получаем $a \diamond 0 = a * 0$.

Пусть $a, b \in N \setminus \{0\}$. В силу пункта (2) леммы 2 $a * b$ не лежит ни в $R_{a,b}$, ни в $L_{a,b}$, поэтому $a * b \in N \setminus \big(R_{a,b} \cup L_{a,b}\big)$. Следовательно, $a \diamond b \leq a * b$. Предположим, что $a * b > a \diamond b$. Отсюда по условию (2) определения операции $*$ получаем $a * (a \diamond b) < b$ или $b * (a \diamond b) < a$. В первом случае $a \diamond b = a * \big(a * (a \diamond b)\big) \in R_{a,b}$, во втором $a \diamond b =$

$\big(b * (a \diamond b)\big) * b \in L_{a,b}$ по пункту (1) леммы 1 и по определениям множеств $R_{a,b}$ и $L_{a,b}$. Следовательно, $a \diamond b \in R_{a,b} \cup L_{a,b}$, противоречие. Таким образом, $a * b = a \diamond b$.

Поясним сейчас, как появилась операция $\diamond$. Известно, что таблицы Кэли удобно использовать для описания бинарных операций на конечных множествах. В нашем случае мы имеем дело со счетным множеством, и необходимо было понять, сможем ли мы потенциально составить таблицу Кэли для операции $*$. Другими словами, как определить $a * b$, зная результаты операций для чисел, одновременно не превосходящих a и b? В нашем случае начальные строка, а в силу коммутативности операции и столбец, (договоримся называть их нулевыми) известны, поскольку 0 является нейтральным элементом относительно операции $*$. Также известны первая строка и первый столбец, так как мы знаем результат $1 * a$. Заметим, что по следствию 1 любая строка таблицы содержит каждый элемент из N, при этом не может содержать двух одинаковых элементов. Учитывая сказанное, можно сделать вывод, что элемент $a * b$ будет принадлежать множеству $N \setminus (R_{a,b} \cup L_{a,b})$. Каких-либо ограничений на выбор этого элемента не видно, поэтому возникло желание воспользоваться вполне упорядоченностью множества целых неотрицательных чисел (относительно естественного порядка).

Продемонстрируем начальную подтаблицу таблицы Кэли.

$\diamond$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	…
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9	
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8	
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7	
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6	
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5	
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4	
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3	
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2	
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1	
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
…																	

Конечно, найденное рекуррентное определение операции $\diamond$ нельзя признать удовлетворительным. Так, не просто посчитать результат для больших чисел, к примеру, попытайтесь вычислить $146 \diamond 200$. Однако, анализ определения операции и наблюдения за составленной таблицей Кэли привели нас к многочисленным гипотезам, некоторые из которых укажем.

Свойство 1. *Для любого* $a \in N$ $a * 2$ *равно либо* $a - 2$, *либо* $a + 2$.

Доказательство. Действительно, пусть утверждение верно для всех натуральных чисел, меньших $a \in N$. Предположим, что $a * 2 = a - 1$. Тогда $(a - 1) * 2 = a$, противоречие с индуктивным предположением. Также невозможен случай $a * 2 = a$. Поэтому с учетом пункта (2) леммы 2 остается рассмотреть вариант $a * 2 = a + 1$. В этом случае $(a - 1) * 2 \neq a + 1$, следовательно, $(a - 1) * 2 = a - 3$. Далее, $(a - 5) * 2 \neq a - 3$, поэтому $(a - 1) * 2 = a - 7$. Продолжая указанный спуск, получаем

$$\big(a - (4k + 1)\big) * 2 = a - (4k + 3). \#(1)$$

Далее, $(a-2)*2 \neq a$, поскольку $a*2=a+1$ по предположению, следовательно, $(a-2)*2=a-4$. Рассуждая как и выше, получаем

$$\big(a-(4k+2)\big)*2=a-4(k+1).\#(2)$$

Заметим, что если число a четное, то $a*2=a+1=a*1$, противоречие, следовательно, a нечетно. Если $a=4m+1$, то из формулы (1) при $k=m-1$ получаем $4*2=2$, противоречие. Если $a=4m+3$, то из формулы (2) при $k=m-1$ также получаем противоречие $5*2=3$. Таким образом, $a*2 \neq a+1$ для любого натурального a, и с учетом леммы 2 получаем доказываемое.

Через M_a обозначим множество степеней двойки, которые входят в разложение числа a. Например, для $13=1+4+8$ получаем $M_{13}=\{1,4,8\}$. Следующие свойства оставим без доказательства.

Свойство 2. Для любого $a \in N$

$$a*2^k=\begin{cases} a-2^k, \text{если } 2^k \in M_a; \\ a+2^k, \text{если } 2^k \notin M_a. \end{cases}$$

Свойство 3. Для любого $a \in \mathbb{N}$

$$a*3=\begin{cases} a-3, \text{если } 1,2 \in M_a; \\ a-1, \text{если } 1 \notin M_a, 2 \in M_a; \\ a+1, \text{если } 1 \in M_a, 2 \notin M_a; \\ a+3, \text{если } 1,2 \notin M_a. \end{cases}$$

Свойство 4. Для любых $a,b \in N$

$$a*b=\begin{cases} a+b, \text{если } M_a \cap M_b=\emptyset\,; \\ a-b, \text{если } M_b \subseteq M_a. \end{cases}$$

Упражнение 3. Докажите свойства 2–4.

Отметим еще одно, «геометрическое», наблюдение за таблицей Кэли операции $*$. Выше мы указали ее часть, являющуюся квадратной матрицей со стороной в 16 элементов. Явно видно, что она разбивается на две пары симметричных подматриц размерностей 8 (две курсивные части и две прямые). В свою очередь, каждая из подматриц разбиения содержит две пары подматриц, симметричных относительно центра надматрицы. В общем случае, если мы рассмотрим угловую лево-верхнюю квадратную матрицу A размерности 2^k нашей таблицы Кэли, то она также будет разбиваться на две пары подматриц, симметричных относительно центра матрицы A.

Таким образом, замеченные как алгебраические, так и геометрические свойства операции $*$ тесно связаны со степенями двойки, более точно, с разложением в двоичную систему счисления чисел, над которыми производится операция. После нахождения этой связи строение операции $*$, видимо, становится понятным[1].

Дадим описание операции $*$. Пусть $a=a_0+a_1 2+a_2 2^2+\cdots$ и $b=b_0+b_1 2+$ $+b_2 2^2+\cdots$ – разложения чисел a и b в двоичной системе, $a_i,b_i \in \{0,1\}$. Тогда $a*b=c$, где $c=c_0+c_1 2+c_2 2^2+\cdots$ и для любого $i=0,1,\ldots$

$$c_i=\begin{cases} 0, \text{если } a_i=b_i; \\ 1, \text{если } a_i \neq b_i. \end{cases}$$

Упражнение 4. Убедитесь, что указанная выше операция действительно удовлетворяет всем условиям Основной задачи.

[1] Доцент О, также решавший эту задачу, сообщил следующее. Во сне ему явился N – его преподаватель еще со студенческих времени – и посоветовал рассмотреть числа в двоичной системе счисления. На утро задача была решена, а заслуга в этом, по нашему мнению, принадлежит проф. N.

Свойства операции $*$, ее приложения и обобщения

Первое и основное наблюдение за операцией $*$ позволяет сделать вывод, что $(N,*)$ является группой. Действительно, 0 является нейтральным элементом, каждый ненулевой элемент имеет порядок 2, а описание $*$ с помощью двоичной формы записи легко позволяет обосновать ассоциативность. Отметим, что доказательство ассоциативности операции $\diamond$ существенно сложнее, хотя, напомним, она совпадает с $*$. Ясно также, что группа $\mathbb{N}$ абелева и периодическая.

Рассмотрим сейчас декартову сумму $\sum_{i\in\mathbb{N}} G_i$ счетного числа двухэлементных групп $G_i = \{0,1\}$. С покомпонентным сложением по модулю 2 получаем группу G, элементами которой являются всевозможные последовательности нулей и единиц. Если мы рассмотрим множество всех элементов из G, у которых в последовательностях почти все компоненты нулевые, то получим ее подгруппу $\overline{G} = \overline{\sum}_{i\in\mathbb{N}} G_i$. Группа $\overline{G}$ носит название прямой суммы групп G_i.

Предложение 2. *Группа* $(N,*)$ *изоморфна прямой сумме двухэлементных* $\overline{\sum}_{i\in\mathbb{N}} G_i$ *групп.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть отображение, сопоставляющее натуральному числу $a = a_0 + a_1 2 + \cdots + a_k 2^k$ последовательность $(a_0, a_1, \dots, a_k, 0, \dots), a_i \in \{0,1\}$.

Игра Ним. Самым известным приложением операции $*$, по нашему мнению, является игра Ним.

В игре Ним имеются несколько кучек камней, двое по очереди делают ходы, за ход можно взять любое непустое множество камней из одной произвольной кучи. Выигрывает игрок, который забирает последний камень.

Пусть имеются k куч, в которых $m_1, m_2, \dots, m_k$ камней. Этой конфигурации сопоставим $*$-сумму – число $m_1 * m_2 * \dots * m_k$. Выигрышная стратегия игрока заключается в том, чтобы после каждого его хода получалась конфигурация с нулевой $*$-суммой.

Упражнение 5. Обоснуйте выигрышную стратегию игры Ним. Для этого докажите:

1) любой ход по правилам игры Ним из конфигурации с нулевой $*$-суммой приводит к конфигурации с ненулевой $*$-суммой;
2) для любой конфигурации с ненулевой $*$-суммой существует ход по правилам игры Ним, приводящий к конфигурации с нулевой $*$-суммой; является ли такой ход единственным?

Упражнение 6. В шоколадке, состоящей из $m \times n$ долек, одна долька отравлена (разумеется, игрокам известно расположение этой дольки). Двое по очереди разламывают шоколадку по прямой линии и съедают неотравленную часть. Проигрывает игрок, которому достанется отравленная долька. Найдите выигрышную стратегию, убедитесь, что игру можно свести к игре Ним. Обобщите игру на трехмерный случай, когда имеется «брусок» шоколада в виде параллелепипеда $m \times n \times k$ с одним маленьким отравленным кубиком.

НИИ «КСОР»:

а) В НИИ «КСОР» работают несколько сотрудников, каждый из которых имеет номер – произвольное натуральное число, причем, у двух разных сотрудников различные номера. При пересечении сотрудником проходной в любую сторону, и при входе, и при выходе, в Памяти остается его номер в том количестве, сколько он раз проходил через проходную, а покидать здание НИИ и возвращаться можно сколь угодно много. По окончании рабочего дня оказалось, что один сотрудник не покинул здание НИИ.

Определите его номер, если имеется возможность производить арифметические действия над числами, находящимися в Памяти.

Решение. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ – числа, оказавшиеся в Памяти по окончании рабочего дня. Заметим, что номер оставшегося в здании сотрудника встречается в Памяти нечетное количество раз, а номер любого другого сотрудника – четное. Поэтому $a = a_1 * \ldots * a_k$ – номер оставшегося сотрудника.

b) На следующий день сотрудникам того же НИИ «КСОР» было запрещено покидать стены здания, кроме обязательного выхода на обед. Выяснилось, что один сотрудник после обеда не вернулся на рабочее место. Как в этом случае вычислить нарушителя?

Решение. В этой ситуации операция $*$ уже не поможет. Рассмотрим прямую сумму $\overline{G_3} = \overline{\sum}_{i\in\mathbb{N}} G_i$, где каждая $G_i = \{0,1,2\}$ – аддитивная группа вычетов Z_3. Группа $\overline{G_3}$ изоморфна группе $(N,*_3)$, в которой операция $*_3$ является суммой натуральных чисел в троичной записи без переноса разрядов, т. е. производится сложение соответствующих разрядов чисел в Z_3. Группа $\overline{G_3}$, а следовательно, и $(N,*_3)$ – абелева группа, в которой каждый ненулевой элемент имеет порядок 3. Если вернуться к вопросу, то понятно, что номер нарушителя совпадет с $*_3$-суммой всех чисел в Памяти по окончании обеденного перерыва.

Заключение

Приведенный фрагмент был апробирован на занятиях учебно-исследовательского семинара для студентов в СГУ им. Питирима Сорокина. Понятно, что рассмотренный материал может применяться и при работе со школьниками. Одна из достигнутых нами целей – знакомство с новыми понятиями и конструкциями теории групп – лежит на поверхности, но не является главной. В первую очередь хотелось организовать процесс получения новых для студентов результатов так, чтобы у них возникло ощущение активного поиска и исследовательской деятельности. Отчасти это удалось.

Особо остановимся на рассмотренных приложениях. Наш прежний опыт работы со студентами показывает, что часто мотивацию к занятиям обеспечивали не разбор доказательств и нахождение новых свойств, а использование теоретических результатов для решения конкретных задач. Например, уже упоминавшаяся лемма Бернсайда, устанавливающая связь между числом орбит и числом неподвижных точек при действии группы на множестве, красива сама по себе. Это же применимо и к конструкции действия группы на множестве, а затем и к теоремам Силова. Но студентам было более интересно комбинаторное приложение леммы Бернсайда. Они с удовольствием считали число раскрасок вершин куба, а затем число раскрасок граней октаэдра, т.е. решали алгоритмические однотипные задачи. Похожей ситуация была и с Основной задачей. Студенты больше заинтересовались исследованием игры Ним и других близких задач. Мы не изучали причин этого явления.

Литература

Григорян А.А. Задача М304 // Квант. 1975. № 1. С. 41.

Григорян А.А., Тоом А.Л. Решение задачи М304 // Квант. 1975. № 9. С. 34–35.

Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для педагогических вузов. М.: Высш. школа, 1979. 559 с.

Курош А. Г. Курс высшей алгебры: учебник. СПб.: Издательство «Лань», 2008. 432 с.

Сотникова О.А. Целостность курса алгебры как методологическая основа его понимания. Архангельск: Поморский университет, 2004. 354 с.

Яшина Е.Ю. Доказательство теоремы Фробениуса как завершение курса алгебры и числовых систем в педагогическом университете // Вестник Сыктывкарского университета.

Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2023. Вып. 2 (47). С. 69–82. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

References

Grigoryan, A. A., & Toom, A. L. (1975). Solution of the M304 problem. *Kvant*, (9), Pp. 34–35. (In Russ.)

Grigoryan, A. A. (1975). Problem M304. *Kvant*, (1), P. 41. (In Russ.)

Kulikov, L. Ya. (1979). *Algebra and number theory: handbook for pedagogical universities*. Moscow: Higher School. (In Russ.)

Kurosh, A. G. (2008). *Course of higher algebra: Textbook*. Saint Petersburg: "Lan'". (In Russ.)

Sotnikova, O. A. (2004). *The integrity of the algebra course as a methodological basis for its understanding*. Arkhangelsk: Pomorskij universitet. (In Russ.)

Yashina, E. Y. (2023). Proof of the Frobenius theorem as the completion of the course of algebra and numerical systems at the Pedagogical University. *Vestnik Syktyvkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mehanika. Informatika*, (2), 69–82. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

Информация об авторах

Сотникова Ольга Александровна, доктор педагогических наук, ректор Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина; почтовый адрес: Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., д. 55; электронная почта: sotnikovaoa@syktsu.ru

Чермных Василий Владимирович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина; почтовый адрес: Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., д. 55; электронная почта: vv146@mail.ru

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

История статьи

Поступила в редакцию 20.03.25. Принята к печати 2.04.24.

Information about the authors

Olga A. Sotnikova, Doctor of Pedagogical Sciences, Rector of Pitirim Sorokin Syktyvkar State University; Postal Address: Russia, 199034, Syktyvkar, 55, Oktyabrsky Ave.; e-mail: sotnikovaoa@syktsu.ru

Vasiliy V. Chermnykh, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University; Postal Address: Russia, 199034, Syktyvkar, 55, Oktyabrsky Ave.; e-mail: vv146@mail.ru

Contribution of the authors

The authors contributed equally to this article.

Conflicts of interest

The authors declare no conflicts of interests.

Article history

Received 20 March 2024. Accepted 2 April 2024.