Научная статья
УДК 378.4
https://doi.org/10.24888/2073-8439-2024-68-4-117-125

ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

О.А. Сотникова[1], **В.В. Чермных**[2]

[1, 2] Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина, Сыктывкар, Россия
[1] sotnikovaoa@syktsu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9534-1988
[2] vv146@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8650-4554

Резюме. *Современные образовательные технологии связаны с информационной доступностью к фактологическим знаниям, компьютерными возможностями их применения при решении задач, технологическими решениями в обсуждении различных вопросов и др. В этой связи необходимо выработать ориентиры в особенностях формируемых предметных знаний будущего учителя математики. По мнению авторов, таким ориентиром должно стать метологичность математического знания. Статья содержит анализ теории определителей, изучаемой в курсе алгебры при подготовке учителя математики. Авторы отмечают в содержании этого раздела две взаимопроникающие идеи математики: конструктивизм и аксиоматизация. Этой особенностью рекомендуется воспользоваться для организации изучения определителей при подготовке учителя математики. В стандартном изучении теории определителей обычно используют только конструктивное определение понятия определителя, на его основе доказываются свойства определителя и рассматриваются его приложения. Аксиоматический подход к построению теории определителей в лучшем случае лишь упоминается, как возможность структурирования содержания. Авторы считают, что исключение аксиоматического построения теории определителей лишает возможности раскрытия методологической сущности математического познания. Это понимание важно будущим учителям математики. Это обосновывается тем, что понимание будущими учителями математики основ построения математического знания является базой в организации учебной математической деятельности обучающихся. В этой связи авторы считают целесообразным рассмотрение аксиоматического определения понятия определителя. В статье схематично представлена программа изучения теории определителей, включающая конструктивный подход к понятию определителя и построение теории определителей в аксиоматическом методе. Показано взаимное использование идей конструктивизма и аксиоматизации для получения фактов по теории определителей. Авторы отмечают, что реализация предложенного подхода к изучению определителей позволяет организовать студентов на дополнительные исследования в теории определителей.*

Ключевые слова: *теория определителей, подготовка учителя математики, конструктивное определение, аксиоматическое определение, методология математического познания, математическая теория*

Для цитирования

Сотникова О.А., Чермных В.В. Особенности изучения определителей при подготовке учителя математики // Психология образования в поликультурном пространстве. 2024. № 4 (68). С. 117–125. https://doi.org/10.24888/2073-8439-2023-68-4-108-125

Research article

SPECIFIC CHARACTER OF DETERMINANT STUDY IN THE COURSE OF MATHEMATICS TEACHER TRAINING

Olga A. Sotnikova[1], **Vasiliy V. Chermnykh**[2]

[1, 2] Pitirim Sorokin Syktyvkar State University, Syktyvkar, Russia
[1] sotnikovaoa@syktsu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9534-1988
[2] vv146@mail.ru, https://orcid.org/0000-0002-8650-4554

Abstract. *Modern educational technologies are associated with data-related accessibility to factual knowledge, computer-aided capabilities for its application in the course of solving problems, technological solutions in discussing various issues, etc. For that purpose, it is imperative to develop guidelines with regard to the features of the subject-matter expertise being generated among to-be mathematics teacher. According to the authors, the methodological nature of mathematical knowledge should become such a guideline. The article contains an analysis of the determinant theory studied in an algebra course in the process of mathematics teacher training. In the content of this section, the authors note two interpenetrating ideas of mathematics: constructivism and axiomatization. It is recommended to use this feature to organize the study of determinants in the course of mathematics teacher training. In the standard study of the theory of determinants, only a constructive definition of the concept of a determinant is usually used; on its basis, the properties of the determinant are proved and its applications are considered. The axiomatic approach to constructing the determinant theory is only mentioned as a possibility for structuring the content, if at all. The authors believe that the disregard of the axiomatic construction of the determinant theory makes it impossible to reveal the methodological essence of mathematical knowledge. This understanding is essential for prospective mathematics teachers. This is justified by the fact that their understanding of the fundamental principles of constructing mathematical knowledge is the basis for organizing their students' mathematical learning activities. Therefore, the authors consider it appropriate to consider the axiomatic definition of the concept of determinant. The article schematically presents a program for studying the determinant theory, including a constructive approach to the concept of determinant and the construction of the determinant theory in line with the axiomatic method. The mutual use of the constructivism and axiomatization ideas in obtaining facts on the determinant theory is shown. The authors note that the implementation of the proposed approach to the study of determinants makes it possible to encourage students to do additional research in the determinant theory.*

Keywords: *determinant theory, mathematics teacher training, constructive definition, axiomatic definition, mathematical knowledge methodology, mathematical theory*

For citation

Sotnikova, O. A., & Chermnykh, V. V. (2024). Specific character of determinant study in the course of mathematics teacher training. *Psikhologiya obrazovaniya v polikul'turnom prostranstve*, (4), 108–125. (In Russ.) https://doi.org/10.24888/2073-8439-2024-68-4-108-125

Введение

В научно-методических публикациях и на конференциях преподавателей высшей математики все чаще поднимается вопрос об особенностях формируемых предметных знаний будущего учителя математики. Математическое знание многолико. Оно воплощает основополагающие идеи (координатизации, изоморфизма, двойственности и др.), способы построения различных математических конструкций (прямое произведение, факторизация и др.), математические методы (логические и сугубо математические); все то, что относится к методологии математики. Методологическое знание вряд ли можно отнести к фактологическому знанию, поскольку оно «руководит» процессом познания. В математике этот процесс представляет собой «восхождение к истине по чередующимся взаимосвязанным ступенькам математических образов, или моделей, имеющих большую или меньшую степень абстрактности и наглядности» (Вечтомов, 2006, с. 63). Поэтому для системного предметного знания учителя математики важно осознать руководствующие познавательные механизмы. Именно они выступают основанием к построению обучения.

Для подготовки учителя математики особенно важно сформировать системные алгебраические знания (Яшина, 2023, с. 70). С этой целью подготовлены учебники и учебные пособия по алгебре для педагогических вузов, в которых, безусловно, прослеживается содержательная преемственность. Например, как это представлено в учебнике Н.Л. Гордеева, И.М. Певзнера, Е.Ю. Яшиной (2023). Вместе с тем, есть вопросы, которые трудно изложить в учебниках, поскольку они ориентируют на освоение математического метода (об этом подробней в монографии О.А. Сотниковой (2004, с. 60–68)). Другими словами, при изучении математики в педагогическом вузе необходимо обращать особое внимание на методологические основания изучаемого материала.

Изучение теории определителей в курсе алгебры при подготовке учителя математики

Различные разделы математики имеют свои особенности методологии. Рассмотрим такие особенности на примере изучения теории определителей.

Обычно в алгебраическом курсе понятие определителя квадратной матрицы (детерминанта) вводится конструктивно:

$$\det \mathrm{A} = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \cdot \prod_{k=1}^{n} a_{k\varphi(k)} .$$

При таком его изучении необходимо усвоить процедуру вычисления определителя квадратной матрицы. Этому уделяется внимание в виде формул для определителей 2-го и 3-го порядков. Отыскание определителя более высокого порядка по его определению становится весьма громоздким, и прибегают к свойствам определителя, которые доказываются на основе вышеуказанной формулы определения. Из доказанных свойств получают способы вычисления определителя (приведением к треугольному виду, разложением по строке или столбцу через алгебраические дополнения элементов и др.). В этой учебной деятельности — познание «конструктивного характера математики» (Вейль, 1989, с. 20). Второй же вид учебной деятельности необходимо ориентировать на другую процедуру, которую Г. Вейль характеризовал как «взаимопроникающую» с конструктивизмом — на аксиоматизации (Вейль, 1989, с. 22). Аксиоматический метод — неотъемлемая часть математики, а потому составляет важный элемент методологии математики. Говоря о математическом мышлении, обязательно имеется в виду владение дедукцией.

Можно «знать» конструктивное определение определителя, т.е. уметь раскрыть сущность нахождения определителя квадратной матрицы по определению (вычисление знака подстановки, способ составления произведений и т.д.) и уметь вычислить определитель по данному правилу. Можно «знать» свойства определителя и уметь их выводить из данного определения, применять их при вычислении определителей и при решении других задач. Все это характеризует системность знания и относится к знанию частей. Для знания с методологических позиций важно еще и понимать, почему определитель квадратной матрицы вычисляется таким образом. Для этого необходимо усматривать проблемы математики, породившие понятие определителя. К этим задачам относятся задачи решения систем линейных уравнений; представление векторного произведения векторов, уравнений линий в геометрии; решение вопросов невырожденности квадратных матриц; нахождение обратной матрицы и другие. Эти обстоятельства обосновывают возникновение понятия. Чтобы четко выделить их, необходимо представить такую ситуацию, когда данного понятия нет. В данном случае ситуация «отсутствия понятия определителя» порождает трудности в решении вышеназванных математических проблем. Однако данные математические проблемы не требуют того, чтобы определитель вычислялся именно той формулой, что указана выше. Проблемы требуют лишь, чтобы каждой матрице сопоставлялся некоторый элемент (по природе такой же, как компоненты матрицы), но так, чтобы:

– нулевой матрице соответствовал нулевой элемент, а единичной — единица;

– в случае строки-суммы сопоставлялся бы элемент, равный сумме элементов, соответствующих каждому слагаемому;

– общий множитель каждого элемента некоторой строки (столбца) можно было бы вынести за «соответствие»;

– произведению матриц соответствовало бы произведение элементов, соответствующих множителям;

– обратной матрице соответствовал бы обратный элемент и так далее (известные свойства определителя).

Важно знать, что понятие определителя для решения поставленных задач математики может быть введено только таким способом (как это указано в определении и как это следует из свойств определителя). Другое «понятие определителя» (в смысле сопоставления каждой матрице определенного числа) приведет к принципиально другим свойствам, что не позволит использовать данное понятие к решению указанных математических задач. То есть если задать вычисление «определителя» другим образом, принципиально отличающимся от предлагаемого вышеназванным определением, то свойства определителя не могут быть такими же (в плане формального их смысла). Потребности же математики состоят в том, чтобы сопоставление матрице числа обладало известными свойствами определителя.

Для того чтобы установить факт однозначного задания понятия определителя, необходимо обратиться к формальной сущности понятия определителя, а именно — то, что оно определяет отображение из множества матриц с (числовыми) компонентами во множество (чисел). Уяснить, что понятие определителя можно задать только таким образом, как это указывается в определении (или как это следует из него), можно только придя к соответствующему математическому факту. Для этого необходимо построение теории определителей перенести на аксиоматический уровень. Так, В.Н. Молодший, говоря о возникновении математических теорий, подчеркивал двунаправленный путь: от конструктивного описания объектов и создания абстракций к аксиоматическому построению через выявления отношений и связей (Молодший, 1969, с. 94).

В аксиоматическом подходе теория определителей может быть построена следующим образом.

Понятие определителя вводится следующим аксиоматическим определением.

Определение 1 *(определителя квадратной матрицы)*. Пусть задано отображение d: M(P)$\to$P множества квадратных матриц M(P) над полем P в это поле P так, что выполняются следующие условия:

I. Если матрица A имеет две одинаковые строки, то d(A) = 0;

II. Если i-тая строка матрицы C представлена в виде суммы двух слагаемых $a_{ij} + b_{ij}$, то d(C) = d(A) + d(B), где A — матрица, полученная из C заменой элементов i-той строки на a_{ij}, а B — матрица, полученная из C заменой элементов i-той строки на b_{ij}, т.е.

$$\mathrm{d}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} \dots & a_{in}+b_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} = = \mathrm{d}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} + \mathrm{d}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ b_{i1} & b_{i2} \dots & b_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix};$$

$$\text{III. } \mathrm{d}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} \dots & \lambda a_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} = \lambda \cdot \mathrm{d}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ & \dots & \\ a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{in} \\ & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix},$$

т.е. общий множитель элементов некоторой строки матрицы можно выносить за знак функции d;

IV. d(E) = 1, где E — единичная матрица.

В этом случае говорят, что d(A) — определитель матрицы A.

Затем можно доказать свойства определителя.

Теорема 1. Определитель матрицы обладает следующими свойствами:

1. Если матрица A содержит нулевую строку, то ее определитель равен нулю.
2. Если матрица B получена из матрицы A перестановкой двух строк, то d(A) = -d(B).
3. Если матрица A получена из матрицы B прибавлением к какой-либо строке другой строки, умноженной на λ, то определители этих матриц равны, т.е. d(A) = d(B).
4. Определитель треугольной матрицы S порядка n равен произведению диагональных элементов.

Доказательство теоремы осуществляется, естественно, без использования конструктивного определения определителя. Тем не менее удостоверяются, что свойства «конструктивного определителя» и «аксиоматического» совпадают. С пониманием методологии математики должен возникнуть вопрос о равенстве объемов этих понятий.

Теорема 2 (теорема единственности функции d). Если существует функция, удовлетворяющая условиям I–IV определения определителя, то она определена однозначно.

Доказательство этой теоремы опирается на возможность приведения матрицы к треугольному виду конечным числом преобразований ее строк. Заметим, что алгоритм таких преобразований подробно рассматривается в конструктивном построении определителей. Вместе с тем, здесь нет смешивания фактологических сведений. Обнаруживается упоминаемая ранее «взаимопроникающая идея единства конструктивного и аксиоматического».

Доказательство. Пусть имеются два отображения d: $M(P) \to P$ и φ: $M(P) \to P$, обладающие свойствами определителя в его определении. По определению равных отображений требуется показать, что $(\forall\ A \in M(P))(d(A) = \varphi(A))$.

Пусть A — произвольная квадратная матрица. Пользуясь методом Гаусса, будем приводить ее к диагональному виду. Если строки матрицы линейно зависимы, то на некотором шаге преобразований получится нулевая строка. Тогда $d(A) = 0$ и $\varphi(A) = 0$, т.е. $d(A) = \varphi(A)$.

Пусть матрица приводится к матрице D треугольного вида. В преобразованиях, возможно, использовалась перестановка строк, тогда по свойствам определителя $d(A)$ и $\varphi(A)$ изменяли свой знак на противоположный. В остальных преобразованиях метода Гаусса $d(A)$ и $\varphi(A)$ не изменяется по свойствам определителя. Так что имеем равенства:

$d(A) = (-1)^t \cdot d(D) = (-1)^t \cdot s_{11} \cdot s_{22} \cdot \ldots \cdot s_{nn}$,

$\varphi(A) = (-1)^t \cdot \varphi(D) = (-1)^t \cdot s_{11} \cdot s_{22} \cdot \ldots \cdot s_{nn}$,

где t — число перестановок строк в преобразованиях,

$s_{11}, s_{22}, \ldots, s_{nn}$ — диагональные элементы матрицы D.

Тогда $d(A) = \varphi(A)$, что и требовалось доказать.

Потребность в установлении данного факта является результатом взаимосвязи формального смысла понятия определителя (как отображения из множества квадратных матриц над полем P в это поле) и конструктивного его смысла (формулы вычисления определителя). Для того, чтобы к этому факту прийти, необходимо устанавливать эту связь. Если в обучении эта связь не будет устанавливаться, а будет озвучен только факт (теорема), то к совокупности знаний она мало что добавит. Не случайно в учебниках данная теорема чаще всего не встречается (а потому и не изучается, как показывает наше наблюдение): она не несет существенной информации для понятия определителя, но выделяет методологию построения математических теорий.

Теорема существования определителя, с одной стороны, не вызывает сомнений при наличии знания о «конструктивном определителе». Однако методология аксиоматического метода призывает к его доказательству.

Теорема 3 (теорема существования функции d). Для всякого натурального числа n (порядок матриц множества M(P)) существует функция d: M(P)$\to$P, удовлетворяющая условиям I-IV определения определителя.

Доказательство проводится методом математической индукции по числу n. Функции, удовлетворяющие условиям определения определителя, строятся по правилу:

$$\mathrm{d}_k(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki}.$$

Следствие 1. $(\forall k \in \{1, 2, \ldots n\})(\mathrm{d}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} A_{ki})$.

Для завершения построения понятия определителя в аксиоматическом методе требуется доказательство нескольких фактов, полученных в конструктивном подходе.

Теорема 4 (о транспонировании). Определитель матрицы не меняется от ее транспонирования, т.е.

$$\mathrm{d}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = \mathrm{d}(\mathrm{A}).$$

В доказательстве этого факта «сработает» теорема 2 (о единственности функции d). Для этого следует задать отображение φ: M(P)$\to$P по правилу:

$$\varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{d}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}).$$

Убедившись в том, что функция φ удовлетворяет требованиям I–IV определения определителя и в силу однозначности такого отображения, получаем равенство φ = d.

Теорема 5 (о разложении определителя по строке).

$$d(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik},$$

где n — размерность квадратной матрицы А с элементами вида a_{st}.

Теорема 6 (о вычислении определителя).

$$d(A) = \sum_{\varphi \in S_n} \operatorname{sgn} \varphi \cdot \prod_{k=1}^{n} a_{k\varphi(k)},$$

где n — размерность квадратной матрицы А с элементами вида a_{st}, S_n — множество перестановок степени n.

Таким образом, получаем соответствие конструктивного определителя и аксиоматического, что позволяет говорить о всех известных положениях теории определителей (определитель произведения матриц, критерий обратимости матриц и т.д.).

Заключение

Изучение определителей можно рассматривать с двух позиций: с конструктивной и с позиции аксиоматического метода. В практике изучения алгебраического курса вторая позиция чаще всего остается без внимания. Изученные свойства определителя и его приложения позволяют решать определенные виды задач. Формируются вычислительные умения, устанавливаются связи с другими разделами математики (геометрии, цепными дробями, линейными уравнениями и др.). Иллюстрируются возможности аппарата определителя решать задачи матричного описания действительности. Конструктивное определение позволяет делать это (и многое другое). Однако на наш взгляд, исключение аксиоматического построения теории определителей не дает возможность студентам осознать могущество аксиоматического метода и его роли в математике. Для учителя математики важно понимать методологическую сущность построения теорий, осознания того, что «количественные отношения и пространственные формы изучаются в математике в их взаимных связях, не зависящих от качественного содержания вещей» (Молодший, 1969, с. 100). И далее: при построении математики придерживаются методом восхождения от общего, абстрактного к конкретному и «классический образец такого восхождения дает математика, особенно те ее разделы, где проведена аксиоматизация» (Молодший, 1969, с. 95). В теории определителей аксиоматизация проведена, и этим надо воспользоваться при организации обучения.

Следует отметить, что не всегда раздел математики позволяет проиллюстрировать взаимопроникающие идеи методологии математики. В некоторых случаях, например, это можно специально организовывать (Шустова, 2024). Теория определителей с предлагаемой особенностью может изучаться без привлечения дополнительных ресурсов.

Внедрение аксиоматического метода при изучении теории определителей в педагогическом вузе позволяет не только проиллюстрировать работу взаимопроникновения идей конструктивизма и аксиоматизации, но и решает одну из методических задач по привлечению студентов к изучению абстрактной алгебры. Этот аспект и его важность нами уже рассматривался и приведен пример для организации внеучебной деятельности студентов (Сотникова, Чермных, 2024). В данном предложенном подходе он работает в рамках основного учебного времени. Вместе с тем, материал позволяет выходить и за его рамки. Так, можно рассмотреть другие аксиоматические построения теории определителей. Одни будут принципиально отличаться от предложенного варианта. В данном определении заложена идея свойств отображения, определяющего определитель. Если же в основу аксиоматизации положить способ вычисления значений определителя, то можно оформить индуктивное определение, в котором вычисление будет осуществляться рекуррентным способом.

Еще один аспект, который можно рассмотреть, связан с вопросами оснований математики. Как известно, при построении математических теорий одним из свойств аксиоматики признается независимость аксиом. Может быть рассмотрен вопрос о «минимальности» аксиоматики, т.е. наименьшем числе аксиом определения. Исследование этих вопросов применительно к понятию определителя — еще одна задача для организации внеучебной деятельности.

Литература

Вейль Г. Математическое мышление. М.: Наука, 1989. 400 с.

Гордеев Н.Л., Певзнер И.М., Яшина Е.Ю. Алгебра. Числа. Векторы. Многочлены: учебник для студентов педагогических университетов. СПб.: Медиапапир, 2023. 536 с.

Молодший В.Н. Очерки по философским вопросам математики. М.: Просвещение, 1969. 303 с.

Сотникова О.А. Семантические аспекты в методике обучения математике // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2023. № 4 (49). С. 59‒69. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59

Сотникова О.А., Чермных В.В. О привлечении студентов к изучению абстрактной алгебры (на примере одной задачи теории групп и ее приложениях) // Психология образования в поликультурном пространстве. 2024. № 2 (66). С. 138–147. https://doi.org/10.24888/2073-8439-2024-66-2-138-147

Сотникова О.А. Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания. Монография. Архангельск: Поморский университет, 2004. 356 с.

Яшина Е.Ю. Доказательство теоремы Фробениуса как завершение курса алгебры и числовых систем в педагогическом университете // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2023. № 2 (47). С. 69–82. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

Шустова Е.Н. Об одной из аксиоматик для определения тригонометрических функций при обучении будущих учителей математики // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. 2024. № 1 (50). С. 43‒54. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43

References

Vejl`, G. (1989). Mathematical thinking. Moscow: Nauka. (In Russ.)

Gordeev, N. L., Pevzner, I. M., & Yashina, E. Yu. (2023). Algebra. Algebra. Numbers. Vectors. Polynomials: textbook for students of pedagogical universities. Saint Petersburg: Mediapapir. (In Russ.)

Molodshij, V. N. (1969). *Essays on philosophical questions of mathematics*. Moscow: Prosveshhenie. (In Russ.)

Sotnikova, O. A. (2023). Semantic aspects in the methodology of teaching mathematics. *Vestnik Sy`kty`vkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika*, (4), 59‒69. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_4_59 (In Russ.)

Sotnikova, O. A., & Chermny`x, V. V. (2024). On attracting students to the study of abstract algebra (on the example of one problem of group theory and its applications). *Psixologiya obrazovaniya v polikul`turnom prostranstve*, (2), 138–147 (In Russ.) https://doi.org/10.24888/2073-8439-2024-66-2-138-147

Sotnikova, O. A. (2004). *Integrity of university algebra course as a methodological basis of its understanding*. Arxangel`sk: Pomorskij universitet. (In Russ.)

Yashina, E. Yu. (2023). Proof of Frobenius theorem as the completion of the course of algebra and number systems in the pedagogical university. *Vestnik Sy`kty`vkarskogo universiteta. Ser. 1:*

Matematika. Mexanika. Informatika, (2), 69−82. (In Russ.) https://doi.org/10.34130/1992-2752_2023_2_69

Shustova, E. N. (2024). About one of the axiomatizations for the definition of trigonometric functions in teaching future teachers of mathematics. *Vestnik Sy`kty`vkarskogo universiteta. Ser. 1: Matematika. Mexanika. Informatika*, (1), 43−54. https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_1_43 (In Russ.)

Информация об авторах

Сотникова Ольга Александровна, доктор педагогических наук, ректор Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина; почтовый адрес: Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., д. 55; электронная почта: sotnikovaoa@syktsu.ru

Чермных Василий Владимирович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Сыктывкарского государственного университета имени Питирима Сорокина; почтовый адрес: Россия, 167001, г. Сыктывкар, Октябрьский пр., д. 55; электронная почта: vv146@mail.ru

Вклад авторов

Все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

История статьи

Поступила в редакцию 12.11.25. Принята к печати 2.12.24.

Information about the authors

Olga A. Sotnikova, Doctor of Pedagogical Sciences, Rector of Pitirim Sorokin Syktyvkar State University; Postal Address: Russia, 199034, Syktyvkar, 55, Oktyabrsky Ave.; e-mail: sotnikovaoa@syktsu.ru

Vasiliy V. Chermnykh, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher, Pitirim Sorokin Syktyvkar State University; Postal Address: Russia, 199034, Syktyvkar, 55, Oktyabrsky Ave.; e-mail: vv146@mail.ru

Contribution of the authors

The authors contributed equally to this article.

Conflicts of interest

The authors declare no conflicts of interests.

Article history

Received 12 November 2024. Accepted 2 December 2024.