МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА

**Жук Л.В., Прокуратова О.Н.**

# ПРАКТИКУМ
# ПО АЛГЕБРЕ МНОГОЧЛЕНОВ

***Часть 1***

## Учебное пособие

Елец-2019

Печатается по решению редакционно-издательского совета Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина от ,
протокол №

Рецензенты:
доктор педагогических наук, профессор кафедры физики, радиотехники и электроники ЕГУ им. И.А. Бунина Трофимова Е.И.;
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования и компьютерных технологий ЕГУ им. И.А. Бунина Гладких О.Б.

**Жук Л.В., Прокуратова О.Н.**
Практикум по алгебре многочленов: Учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2019. – 76 с.

Учебное пособие по алгебре многочленов предназначено для организации учебной деятельности бакалавров очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки «Математика», «Педагогическое образование», «Прикладная математика и информатика», «Информатика и вычислительная техника» в рамках базовых дисциплин, а также курсов по выбору. Цель настоящего пособия − содействовать более глубокому усвоению теоретического материала, приобретению необходимых практических навыков решения алгебраических задач. Пособие может быть полезно аспирантам, преподавателям математики в учреждениях среднего профессионального образования, учителям школ, ведущим работу в профильных классах.

## Содержание

# Введение

Понятие многочлена, или целой рациональной функции, от неизвестного $x$ возникло в связи с задачей решения алгебраических уравнений с одним неизвестным, изучением которой занимались уже в глубокой древности. Ещё за 2000 лет до н. э. в древнем Вавилоне умели решать задачи, сводящиеся к квадратным уравнениям, а при помощи таблиц решали некоторые задачи, приводящие даже к уравнениям третьей степени. Изучение полиномиальных уравнений и их решений составляло едва ли не главный объект «классической алгебры».

С изучением многочленов связан целый ряд преобразований в математике: введение в рассмотрение нуля, отрицательных, а затем и комплексных чисел, а также появление теории групп и выделение классов специальных функций в анализе.

К числу важнейших свойств многочленов относится то, что любую непрерывную функцию можно с произвольно малой ошибкой заменить многочленом. Этот факт (теорема Вейерштрасса), доказываемый средствами математического анализа, дает возможность приближённо выражать многочленами любую связь между величинами, изучаемую в каком-либо вопросе естествознания и техники. Также многочлены используют в курсе численных методов в вопросе интерполирования функций (например, интерполяционный многочлен Лагранжа). Техническая простота вычислений, связанных с многочленами, по сравнению с более сложными классами функций, способствовала развитию методов разложения в ряды и полиномиальной интерполяции в математическом анализе.

Многочлены также играют ключевую роль в алгебраической геометрии, объектом которой являются множества, определённые как решения систем многочленов. Особые свойства преобразования коэффициентов при умножении многочленов используются в теории узлов и других разделах математики для кодирования или выражения многочленами свойств различных объектов. Изучение алгебры многочленов играет фундаментальную роль в усвоении многих математических дисциплин.

# Раздел I. Многочлены от одной переменной

## Практическое занятие №1
## Теорема о делении с остатком. Деление многочлена на двучлен *x-a*. Корни многочлена.

## Теоретический материал

### Многочлены над областью целостности

Приведём некоторые примеры многочленов, рассматриваемые в школьном курсе алгебры:

$3x^2 - 2x + 5$ – многочлен второй степени с целыми коэффициентами,

$x^3 + \frac{2}{3}x + 5$ – многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами,

$0 \cdot x^3 + \sqrt{2}x - 7$– многочлен первой степени с действительными коэффициентами,

$-147$ − многочлен нулевой степени,

$0$ − нулевой многочлен.

Уточним область значений коэффициентов многочленов, которые мы будем рассматривать в дальнейшем. Для этого напомним базовые понятия курсы высшей алгебры.

**Определение 1.** ***Кольцом*** *называется непустое множество К с определёнными на нем бинарными операциями сложения и умножения, которые удовлетворяют следующим условиям:*

1) сложение ассоциативно и коммутативно:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$
$$a + b = b + a$$

для любых $a, b, c \in K$;

2) существует элемент $0 \in K$, называемый *нулём*, такой, что $a + 0 = a$ для любого $a \in K$;

3) для всякого элемента $a \in K$ существует элемент $-a \in K$, называемый *противоположным* для *a,* такой что $a + (-a) = 0$;

4) умножение ассоциативно:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

для любых $a, b, c \in K$;

5) умножение дистрибутивно относительно сложения:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$
$$c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$$

для любых $a, b, c \in K$.

Кольцо $K$ называется *коммутативным,* если умножение в нем коммутативно: $a \cdot b = b \cdot a$ для любых $a, b \in K$.

Кольцо $K$ называется *кольцом с единицей,* если существует элемент $1 \in K$, называемый *единицей*, такой что $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Элементы $a, b \in K$ называются *делителями нуля,* если $a \neq 0$, $b \neq 0$, но $a \cdot b = 0$. Если же в кольце нет таких элементов, то оно называется *кольцом без делителей нуля.*

**Определение 2.** ***Полем*** *называется коммутативное кольцо $P$ с единицей, отличной от нуля, в котором всякий ненулевой элемент обратим, то есть для любого $0 \neq a \in P$ существует элемент $a^{-1} \in P$, такой что $a \cdot a^{-1} = 1$.*

**Определение 3.** ***Областью целостности*** *называется коммутативное кольцо с единицей, отличной от нуля, без делителей нуля.*

Примерами областей целостности являются кольцо целых чисел *Z*, числовые поля *Q*, *R*, *C*. Вообще, всякое поле является областью целостности.

Контрпримеры:

1) кольцо чётных целых чисел не является областью целостности, поскольку не содержит единицы;

2) кольцо квадратных матриц не является областью целостности, поскольку оно не коммутативно;

3) нулевое кольцо − единственное кольцо, в котором нуль равен единице.

**Определение 4.** ***Многочленом над областью целостности К*** *называется формальное выражение вида*

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \textbf{(1)}$$

(*стандартная запись многочлена*),

*где* $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ *являются элементами из К и называются **коэффициентами многочлена**, буква х обозначает переменную с областью определения К.*

Каждое слагаемое в суме (1) называется *членом многочлена.* Отсюда происходят названия «одночлен», «двучлен», «трёхчлен». Слагаемое $a_0$ называется *свободным членом*.

Для обозначения многочленов используются символы $f(x)$, $g(x)$ и т.п. Множество всех многочленов над областью целостности *К* обозначается *К[x]*.

Если все коэффициенты многочлена равны нулю, его называют *нулевым.*

Если в стандартной записи многочлена коэффициент $a_n \neq 0$, то он называется *старшим коэффициентом,* соответствующий одночлен $a_n x^n$ называется *старшим членом многочлена.*

Многочлен называется *приведённым* (*нормированным*), если его старший коэффициент равен 1.

Договоримся считать, что многочлен не изменится, если к нему приписать любое количество недостающих одночленов с нулевыми коэффициентами, либо исключить из записи такие одночлены. Таким образом, в записи многочлена $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ по умолчанию считаем, что $0 = a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots$ .

**Определение 5.** *Два многочлена* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *называются* ***равными****, если для любого* $k$ *коэффициент многочлена* $f_1(x)$ *при* $x^k$ *равен коэффициенту многочлена при* $f_2(x)$ *при* $x^k$ *(то есть равны соответствующие коэффициенты).*

Равенство многочленов будем записывать: $f_1(x) = f_2(x)$.

Определим *сложение многочленов*:

$$(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0) =$$
$$= (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \dots + (a_1 + b_1)x + (a_0+b_0)$$

Таким образом, *чтобы сложить два многочлена, нужно сложить их соответствующие коэффициенты*.

В записи суммы двух многочленов слагаемые $a_i x^i$ и $b_i x^i$, *i = 0, 1, ..., n,* называются *подобными,* а нахождение их суммы $a_i + b_i = (a_i + b_i) \cdot x^i$ называется *приведением подобных.* Следовательно, сложение многочленов сводится к приведению подобных.

Определим *умножение многочленов:*

$$(a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0) \cdot (b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) = a_m b_n x^{m+n} + (a_m b_{n-1} + a_{m-1} b_n) x^{m+n-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1) x + a_0 b_0$$

Таким образом, *чтобы первый многочлен умножить на второй, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена, записать сумму полученных одночленов и привести подобные.*

**Определение 6**. *Число n называется* ***степенью многочлена*** $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Степень многочлена обозначают *deg f(x)=n*=ст. *f(x)*.

Будем полагать, что *n* – целое неотрицательное число, тогда под *многочленом нулевой степени* будем понимать переменную области целостности *K*, отличную от нуля.

0 (*нулевой многочлен*) − единственный многочлен, степень которого не определена.

**Теорема 1**. *Если сумма двух ненулевых многочленов f(x) и g(x) является ненулевым многочленом, то*

$$ст.(f(x)+g(x)) \le \max\{ст.f(x);\ ст.g(x)\}.$$

**Пример 1**. Пусть $f(x)=5x^4-3x^3+x-2$ *и* $g(x)=3x^2-x+4$.

*Ст.f=4, ст.g=2, max{ст.f; ст.g}=ст.f=4.*

$f(x)+g(x)=5x^4-3x^3+3x^2+2$, следовательно, *ст.(f+g)=4,*

то есть *ст.(f+g)=ст.f= max{ст.f; ст.g}.*

**Пример 2**. $f(x)=3x^3-x^2+x-2$ *и* $g(x)= -3x^3+5x^2-6x+4$.

*Ст.f=3, ст.g=3, max{ст.f; ст.g}=3.*

$f(x)+g(x)=4x^2-5x+2$, следовательно, *ст.(f+g)=2,*

то есть *ст.(f+g)*=2<*max{ст.f; ст.g}.*

**Теорема 2**. *Если f(x) и g(x) − ненулевые многочлены, то*

$$ст.(f\cdot g)=ст.f+ст.g.$$

**Пример 3.** Возьмём многочлены *f(x)* и *g(x)* из примера 2. Видим, что *ст.f=3, ст.g=3, ст.f+ст.g=3+3=6*. Осуществим умножение *f(x)* на *g(x)*, получим многочлен степени 6.

**Теорема 3.** *Множество K[x] всех многочленов над областью целостности К относительно сложения и умножения многочленов само является областью целостности.*

*Доказательство.* Поскольку при сложении многочленов складываются их соответствующие коэффициенты, то ассоциативность и коммутативность сложения многочленов вытекают из аналогичных свойств сложения элементов области целостности *К.* Нулем и единицей в *К[x]* будут, соответственно, нулевой многочлен 0 и 1∈*К.*

Докажем ассоциативность умножения многочленов. Пусть

$$f = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,$$
$$h = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0.$$

Докажем, что $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$.

Обозначим

$$f \cdot g = p = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0,$$
$$(f \cdot g) \cdot h = p \cdot h = u = u_n x^n + u_{n-1}x^{n-1} + \cdots + u_1 x + u_0,$$
$$g \cdot h = q = q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0,$$
$$f \cdot (g \cdot h) = f \cdot q = v = v_n x^n + v_{n-1}x^{n-1} + \cdots + v_1 x + v_0.$$

Докажем, что $u = v$. Для этого вычислим коэффициенты этих многочленов с номером $t$, $t = 0, 1, \ldots$:

$$u_t = \sum_{r+k=t} p_r c_k = \sum_{r+k=t} (\sum_{i+j=r} a_i b_j) c_k = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k$$

$$v_t = \sum_{i+s=t} a_i q_s = \sum_{i+s=t} a_i (\sum_{j+k=s} b_j c_k) = \sum_{i+j+k=t} a_i b_j c_k$$

Результаты одинаковы, что и доказывает тождество ассоциативности. Аналогично доказывается дистрибутивность умножения относительно сложения многочленов.

Очевидно, умножение многочленов коммутативно.

Таким образом, $K[x]$ является коммутативным кольцом с единицей, отличной от нуля.

Докажем, что это кольцо не имеет делителей нуля. Предположим противное: пусть многочлены $f(x)$, $g(x) \in K[x]$ являются делителями нуля, т.е. $f(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$, но $f(x) \cdot g(x) = 0$. Так как данные многочлены имеют определенные степени, то их произведение есть многочлен некоторой степени, в то время как 0 есть многочлен без степени. Пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

**Определение 7.** *Кольцо $K[x]$ называется* ***кольцом многочленов над областью целостности*** *$K$. Если $K=P$ – поле, то $P[x]$ называется* ***кольцом многочленов над полем*** *$P$.*

Например,

$Z[x]$ – кольцо многочленов над кольцом целых чисел $Z$,

$Q[x]$, $R[x]$, $C[x]$ – кольца многочленов соответственно над полями $Q$, $R$ и $C$.

**Замечание.** Множество $K[x]$ называется ***простым трансцендентным расширением области целостности К***. Слово «трансцендентный» означает выходящим за пределы, то есть буква $x$ есть элемент другой природы, чем число. «Простое» означает, что расширение получено введением одной буквы. Когда букв две или более используется термин *кратное расширение* (см. раздел 2).

## Свойства делимости многочленов над данным полем

Пусть $f(x) \in P[x]$ и $g(x) \in P[x]$, то есть $f(x)$ и $g(x)$ − многочлены из кольца $P[x]$, где $P$ – числовое поле.

**Определение 1**. ***Многочлен f(x) делится на g(x)***, *если существует многочлен $q(x)$ с коэффициентами из поля $P$, удовлетворяющий равенству*

$$f(x)=g(x) \cdot q(x),$$

То есть $f(x) \vdots g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x) \cdot q(x),\ q(x) \in P[x]$.

**Пример 1**. $f(x)=x^3-1$, $g(x)=x^2+x+1$.

Поскольку $x^3-1=(x^2+x+1)(x-1)$, то $(x^3-1) \vdots (x^2+x+1)$.

Рассмотрим ***свойства делимости многочленов***.

**1.** *Всякий многочлен f(x) делится на самого себя.*

Действительно, для любого многочлена

$$f(x)=f(x) \cdot 1 \Rightarrow q(x)=1 \Rightarrow f(x) \vdots f(x).$$

**2.** *Всякий многочлен f(x) делится на многочлен нулевой степени $c \neq 0$.*

Пусть $f(x)= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Очевидно, $f(x) = c \cdot \underbrace{\left(\frac{a_0}{c} + \frac{a_1}{c} x + \ldots + \frac{a_n}{c} x^n\right)}_{q(x)} = c \cdot q(x)$.

То есть $f(x)=c \cdot q(x) \Rightarrow f(x) \vdots c$.

**3**. *Если многочлен f(x) делится на многочлен h(x) и многочлен g(x) делится на многочлен h(x), то многочлен $f(x) \pm g(x)$ делится на h(x).*

Пусть $f(x) \vdots h(x) \Rightarrow f(x)=h(x) \cdot q_1(x)$.

Пусть $g(x) \vdots h(x) \Rightarrow g(x)=h(x) \cdot q_2(x)$.

Тогда $f(x)+g(x)=h(x) \cdot q_1(x)+h(x) \cdot q_2(x)=$

$=h(x)(q_1(x)+q_2(x))=h(x) \cdot q(x) \Rightarrow (f(x)+g(x)) \vdots h(x)$.

Делимость разности доказывается аналогично.

**4.** *Если $f(x) \vdots h(x)$, то $(f(x) \cdot g(x)) \vdots h(x)$.*

Пусть $f(x) \vdots h(x) \Rightarrow f(x)=h(x) \cdot q_1(x)$.

Умножим обе части выражения на $g(x)$, получим

$$f(x) \cdot g(x)=(h(x) \cdot q_1(x)) \cdot g(x).$$

Так как $f(x) \cdot g(x)=h(x) \cdot (q_1(x) \cdot g(x))$,

то $f(x) \cdot g(x)=h(x) \cdot q(x) \Rightarrow (f(x) \cdot g(x)) \vdots h(x)$.

**5**. *Если $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots h(x)$, то $f(x) \vdots h(x)$ (свойство транзитивности).*

Пусть $f(x) \vdots g(x) \Rightarrow f(x)=g(x) \cdot q_1(x)$.

Пусть $g(x) \vdots h(x) \Rightarrow g(x)=h(x) \cdot q_2(x)$.

Тогда $f(x)=(h(x) \cdot q_2(x)) \cdot q_1(x) \Rightarrow f(x)=h(x) \cdot (q_2(x) \cdot q_1(x)) \Rightarrow$

$f(x)=h(x) \cdot q(x) \Rightarrow f(x) \vdots h(x)$.

**6**. *Если $f(x) \vdots g(x)$ и $g(x) \vdots f(x)$, то многочлены f(x) и g(x) могут отличаться лишь числовым множителям, т.е. $f(x)=c \cdot g(x)$.*

Пусть $f(x) \vdots g(x) \Rightarrow f(x)=g(x) \cdot q_1(x)$.

Пусть $g(x) \vdots f(x) \Rightarrow g(x)=f(x) \cdot q_2(x)$ (1).

Тогда $f(x)=(f(x) \cdot q_2(x)) \cdot q_1(x) \Rightarrow f(x)=f(x) \cdot (q_2(x) \cdot q_1(x))$ (2).

Если $f(x)\neq 0$, то из (2) => $q_2(x)\cdot q_1(x)=1$, т.е. равенство (2) можно сократить на $f(x)$ => $q_2(x)$ и $q_1(x)$ – многочлены нулевой степени.

Пусть $q_1(x)=c$, тогда $f(x)=c\cdot g(x)$. Если $f(x)=0$, то из (1) следует $g(x)=0$, поэтому равенство $f(x)=c\cdot g(x)$ выполняется при любом $c\neq 0$ из поля $P$.

Деление многочлена на многочлен можно выполнить <u>*«столбиком»*</u>.

**Пример 2**.

$f(x)= 3x^5+2x^4-3x^3+7x^2-5x-4,$

$g(x)= x^3-2x^2+3x-7.$

$$
\begin{array}{r|l}
-\;3x^5+2x^4-3x^3+7x^2-5x-4 & x^3-2x^2+3x-7 \\ \cline{2-2}
\underline{3x^5-6x^4+9x^3-21x^2\phantom{-5x-4}} & 3x^2+8x+4 \\
-\;8x^4-12x^3+28x^2-5x\phantom{-4} & \\
\underline{8x^4-16x^3+24x^2-56x\phantom{-4}} & \\
-\;4x^3+4x^2+51x-4 & \\
\underline{4x^3-8x^2+12x-28} & \\
12x^2+39x+24 &
\end{array}
$$

Итак, $f(x)=g(x)(3x^2+8x+4)+(12x^2+39x+24)$,

где $3x^2+8x+4=q(x)$ – *неполное частное*,

$12x^2+39x+24=r(x)$ – *остаток*.

## Теорема о делении с остатком

Будем рассматривать кольцо многочленов от переменной $x$ над полем $P$.

Пусть $f(x)\in P[x]$ и $g(x)\in P[x]$.

**Определение 1**. ***Разделить многочлен f(x) на g(x) с остатком*** *означает найти два многочлена q(x) и r(x), таких, что выполняются условия:*

1. $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$,
2. $ст.r(x)<ст.g(x)$ или $r(x)=0$.

**Теорема (о делении с остатком).** *Если f(x) и g(x) − многочлены над полем P, причем g(x)≠0, то всегда можно, притом единственным образом, разделить f(x) на g(x) с остатком.*

**Доказательство**.

Пусть $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$, где $a_n\neq 0$;

$g(x)= b_s x^s+b_{s-1}x^{s-1}+\ldots+b_1x+b_0$, где $b_s\neq 0$.

Возможны два случая:

1. $n<s$, тогда $f(x)=g(x)\cdot\underset{q(x)}{0}+\underset{r(x)}{f(x)}$. В этом случае теорема верна.

2. $n\geq s$. Рассмотрим следующий алгоритм.

Поделим «столбиком»:

$$
\begin{array}{l|l}
a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0 & b_sx^s+b_{s-1}x^{s-1}+\ldots+b_1x+b_0 \\
\cline{2-2}
a_nx^n+(a_n/b_s)\cdot b_{s-1}x^{n-1}+\ldots+(a_n/b_s)\cdot b_0x^{n-s} & (a_n/b_s)\cdot x^{n-s}
\end{array}
$$

$$f_1(x)= f(x)-g(x)\frac{a_n}{b_s}x^{n-s}$$

Пусть коэффициент при старшем члене многочлена $f_1(x)$ есть $a_{n_1}$, т.е. ст. $f_1(x)=n_1$. Если $n_1<s$, то искомая пара многочленов также найдена, получаем

$$f(x)=g(x)\frac{a_n}{b_s}x^{n-s}+f_1(x) \quad => \quad q(x)=\frac{a_n}{b_s}x^{n-s};r(x)=f_1(x).$$

Если же $n_1\geq s$, то процесс деления продолжаем, делим $f_1(x)$ на $g(x)$, получим $f_2(x)=f_1(x)-\frac{a_{n_1}}{b_s}x^{n_1-s}g(x)$.

Обозначим $a_{n_2}$ старший коэффициент многочлена $f_2(x)$, а его степень через $n_2$. Если $n_2\geq s$, процесс деления продолжаем дальше.

Так как степени убывают $n>n_1>n_2>\ldots$, то через конечное число шагов мы дойдем до многочлена, степень которого меньше $s$, после чего процесс деления заканчивается. Обозначим такой многочлен $f_k(x)$; $n_{s_k} = \text{ст.} f_k$, то есть $n_k<s$.

В итоге получим

$$f(x)=g(x)[\frac{a_n}{b_s}x^{n-s}+\frac{a_{n_1}}{b_s}x^{n_1-s}+\ldots+\frac{a_{n_{k-1}}}{b_s}x^{n_{k_1}-s}]+f_k(x).$$

Таким образом, $q(x)=\frac{a_n}{b_s}x^{n-s}+\frac{a_{n_1}}{b_s}x^{n_1-s}+\ldots+\frac{a_{n_{k-1}}}{b_s}x^{n_{k_1}-s};r(x)=f_k(x).$

Существование многочленов $q(x)$ и $r(x)$ доказано.

Докажем теперь, что пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$ единственна. Допустим существование другой пары:

$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$ и $f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$.

Из этих равенств следует, что $g(x)\cdot q(x)+r(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$.

Или $g(x)[q(x)-q_1(x)]= r_1(x)-r(x)$, а это равенство возможно только в том случае, когда $r_1(x)-r(x)=0$. Получаем, что $r_1(x)=r(x)$, следовательно, $q(x)=q_1(x)$. Теорема доказана.

Многочлен $q(x)$ называется *частным* от деления $f(x)$ на $g(x)$, а многочлен $r(x)$ – *остатком* от деления.

**Пример 1.** Выполнить деление с остатком, если

$$f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6,$$

$$g(x)=x^2-3x+1.$$

Решение:

$f(x)=g(x)(2x^2+3x+11)+25x-5,$

где $q(x)=2x^2+3x+11$, $r(x)= 25x-5$.

## Деление многочлена на двучлен *x-a*. Корни многочлена

Пусть дан произвольный многочлен $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ с коэффициентами из области целостности $K$ и дан произвольный элемент $a\in K$ $(a\neq 0)$.

**Теорема 1 (теорема Безу)**. *Остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x$-$a$ равен $f(a)$.*

**Доказательство**. Разделим многочлен $f(x)$ на $x$-$a$ с остатком. По теореме о делении с остатком это можно выполнить единственным образом. Получим $f(x)=(x-a)\cdot q(x)+r(x)$; *ст..*$r(x)<1$ или $r(x)=0 \Rightarrow r(x)=r$. Положим в этом равенстве $x=a$, тогда $f(a)=(a-a)\cdot q(a)+r \Rightarrow f(a)=r$. Теорема доказана.

Рассмотрим алгоритм, позволяющий вычислить коэффициенты частного и остаток при делении произвольного многочлена на двучлен вида $x$-$a$.

Выполняя последовательно деление, получаем:

$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=(x-a)(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_1x+b_0)+r.$

Приравниваем, предварительно раскрыв скобки, коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

$x^n$: $a_n=b_{n-1}$

$x^{n-1}$: $a_{n-1}=b_{n-2}-ab_{n-1}$

$x^1$: $a_1=-ab_1+b_0$

$x^0$: $a_0=-ab_0+r.$

Выразим коэффициенты частного:

$b_{n-1}=a_n$

$b_{n-2}=a_{n-1}+ab_{n-1}$

$b_0=a_1+ab_1$.

Остаток $r=a_0+ab_0$.

Полученные формулы называются *формулами Горнера*, которые удобно записывать в виде схемы Горнера:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_n$ | $a_{n-1}$ | … | $a_1$ | $a_0$ |
| $a$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-2}=ab_{n-1}+a_{n-1}$ | | $b_0=a_1+ab_1$ | $r$ |

**Пример 1.** *Выполнить деление по схеме Горнера многочлена* $f(x)=2x^5-5x^3-8x$ *на двучлен* $x+3$.

Решение:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 0 | -5 | 0 | -8 | 0 |
| -3 | 2 | -6 | 13 | -39 | 99 | -297 |

Ответ: $f(x)=(x+3)(2x^4-6x^3+13x^2-39x+99)-297$.

**Определение 1**. *Элемент* $x_0$ *называется* ***корнем многочлена*** $f(x)$*, если* $f(x_0)=0$.

**Теорема 2**. *Элемент* $x_0$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(x)$ *делится на* $(x-x_0)$ *без остатка.*

**Доказательство.**

1. Пусть $f(x)$ делится на $x-x_0$ => $r=0$, а по теореме Безу $r=f(x_0)$ => $f(x_0)=0$ => $x_0$ является корнем многочлена.

2. Пусть $x_0$ – корень многочлена $f(x)$. Это значит, что $f(x_0)=0$, а по теореме Безу $f(x_0)=r$ – остаток от деления $f(x)$ на $x-x_0$. Следовательно, $r=0$ => $f(x)$ делится на $x-x_0$. Теорема доказана.

**Теорема 3 (о наибольшем возможном числе корней многочлена в области целостности).** *Любой многочлен положительной степени с коэффициентами из области целостности K имеет в области целостности K не более n корней, где n – степень этого многочлена.*

# Решение задач

**Задача 1.** *Выполнить деление с остатком:*

$$f(x) = 4x^5 - 2x^3 + x^2 + x + 2 \text{ на } g(x) = 2x^3 - x^2 - x + 1$$

Решение:

Поделим сначала многочлены «столбиком»:

$$\begin{array}{rrrrrr|lll}
_4x^5 & & -2x^3 & +x^2 & +x & +2 & 2x^3 & -x^2 & -x \quad +1 \\ \cline{7-9}
4x^5 & -2x^4 & -2x^3 & +2x^2 & & & 2x^2 & +x & +\frac{1}{2} \\ \cline{1-6}
 & _2x^4 & & -x^2 & +x & +2 & & & \\
 & 2x^4 & -x^3 & -x^2 & +x & & & & \\ \cline{2-6}
 & & _x^3 & & & +2 & & & \\
 & & x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & -\frac{1}{2}x & +\frac{1}{2} & & & \\ \cline{3-6}
 & & & \frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{2}x & +\frac{3}{2} & & &
\end{array}$$

Деление *f(x)* на *g(x)* удобно проводить <u>*по схеме М.В. Яковкина*</u>, представляющей собой компактную (табличную) форму записи деления, не содержащую степени переменных, а только коэффициенты.

Коэффициенты $f(x)$ записываются в первую строку таблицы по убыванию степеней. Коэффициенты $g(x)$ записываются в первый столбец, при этом у всех коэффициентов, кроме старшего, меняется знак. Неполное частное $q(x)$ записывается в нижней (результирующей) строке, при этом коэффициенты $q(x)$ отделяются от коэффициентов остатка $r(x)$ вертикальной чертой. В первой строке нужно отсчитать справа налево столько коэффициентов, сколько их в $g(x)$ минус 1, и провести вертикальную черту. Таблица готова для вычислений.

Делим старший коэффициент $f(x)$ на старший коэффициент $g(x)$ и результат записываем в нижнюю строку во второй столбец: $4:2 = 2$. Затем полученное число 2 умножаем на коэффициенты $g(x)$ и результаты пишем во вторую строку, начиная с третьего столбца. Суммируем члены третьего столбца, эту сумму делим на угловой коэффициент 2: $(0+2):2 = 1$ – записываем в результирующую строку.

Повторяем действия:

$$1 \cdot 1 = 1; \quad 1 \cdot 1 = 1; \quad 1 \cdot (-1) = -1;$$

$$(-2+2+1):2=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2};\quad \frac{1}{2}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 0 | $-2$ | 1 | 1 | 2 |
| 1 | | 2 | 2 | $-2$ | | |
| 1 | | | 1 | 1 | $-1$ | |
| $-1$ | | | | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ |
| | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |

В результирующей строке слева от черты появляются коэффициенты неполного частного $q(x)$, а справа − коэффициенты остатка $r(x)$. Заметим, что коэффициенты $r(x)$ получаются простым суммированием элементов столбцов справа от черты:

$$1-2+1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\quad 1-1+\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\quad 2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Ответ записываем слева направо следующим образом:

$$q(x)=2x^2+x+\frac{1}{2}$$

$$r(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}.$$

**Задача 2.** *Найти значение многочлена*

$$f(x)=x^4+5x^3-6x^2+8x-3 \quad \text{при} \quad x=2$$

Решение:

Значение многочлена можно найти непосредственной подстановкой:

$$f(2)=2^4+5\cdot 2^3-6\cdot 2^2+8\cdot 2-3=16+40-24+16-3=45$$

В то же время, можно воспользоваться теоремой Безу, согласно которой остаток $r=f(a)$.

Найдем остаток *r* по схеме Горнера:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *5* | *-6* | *8* | *-3* |
| *2* | *1* | *7* | *8* | *24* | *45* |

Итак, $f(2)=45$.

**Задача 3.** *Многочлен $f(x)$ не содержит членов чётной степени. Остаток от деления $f(x)$ на $x-3$ равен 3. Найти остаток от деления $f(x)$ на $x^2-9$.*

Решение:

По теореме о делении с остатком $f(x)=(x^2-9)\cdot q(x)+r(x)$

Так как степень делителя $x^2-9$ равна 2, то степень остатка не превышает 1, $r(x)=Ax+B$.

Так как при делении $f(x)$ на $x-3$ в остатке 3, то по теореме Безу $f(3)=3$.

Так как $f(x)$ не содержит членов чётной степени, то $f(-3)=-f(3)=-3$.

Придадим *x* поочерёдно значения 3 и -3:

$\begin{cases} 3=3A+B \\ -3=-3A+B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B=0 \\ 3A+B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=0 \\ A=1' \end{cases}$

Получаем $r(x)=x$ – остаток от деления $f(x)$ на $x^2-9$.

**Задача 4.** *Выяснить, является ли число 2 корнем многочлена* $f(x)=x^5-5x^4+3x^3+22x^2-44x+24$. *Если является, определить кратность этого корня.*

Решение:

Напомним, что число $x_0$ является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $x-x_0$ без остатка. По схеме Горнера:

| | *1* | *-5* | *3* | *22* | *-44* | *24* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *2* | *1* | *-3* | *-3* | *16* | *-12* | *0* |

$f(2)=0 \Longrightarrow 2$ – корень многочлена.

$f(x)=(x-2)(x^4-3x^3-3x^2+16x-12)$.

Выясним, делится ли $f(x)$ на $(x-2)^2$. Для этого поделим многочлен $g(x)=x^4-3x^3-3x^2+16$ на $x-2$.

| | *1* | *-3* | *-3* | *16* | *-12* |
|---|---|---|---|---|---|
| *2* | *1* | *-1* | *-5* | *6* | *0* |

$g(x)=(x-2)(x^3-x^2-5x+6)$

$f(x)=(x-2)^2(x^3-x^2-5x+6)$

Выясним, делится ли $f(x)$ на $(x-2)^3$. Делим многочлен $x^3-x^2-5x+6$ на $x-2$.

| | *1* | *-1* | *-5* | *6* |
|---|---|---|---|---|
| *2* | *1* | *1* | *-3* | *0* |

Значит, $f(x) = (x-2)^3(x^2+x-3)$.

Проверяем далее:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *1* | *1* | *-3* |
| *2* | *1* | *3* | *3* |

Очевидно, $f(x)$ не делится на $(x-2)^4$. Следовательно, число 2 является корнем кратности 3 многочлена $f(x)$.

Обычно проверку корня на кратность выполняют в одной таблице:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *1* | *-5* | *3* | *22* | *-44* | *24* |
| *2* | *1* | *-3* | *-3* | *16* | *-12* | *0* |
| *2* | *1* | *-1* | *-5* | *6* | *0* | |
| *2* | *1* | *1* | *-3* | *0* | | |
| *2* | *1* | *3* | *3* | | | |

Кратность корня равна числу полученных нулевых остатков.

### Задачи для самостоятельного решения

**1.** Какое из следующих множеств является кольцом, областью целостности, полем относительно сложения и умножения:

- $Z$,
- $Q$,
- $2Z = \{2n | n \in Z\}$,
- $K = \{a + b\sqrt{2},\ a, b \in S\},\ S = Z,\ Q$,
- $K = \{a + bi,\ a, b \in T\},\ T = Z,\ Q,\ R$?

**2.** Приведите примеры:

- двучлена третьей степени,
- квадратного трехчлена,
- приведённого квадратного трехчлена,
- многочлена степени 0,
- многочлена положительной степени,
- многочлена без степени.

**3.** Запишите в стандартном виде два многочлена соответственно степеней 3 и 4, сложите и перемножьте их.

**4.** Для многочленов

$$f(x) = x^2 + (1-i)x + 2i), \quad g(x) = ix^2 + x + 1 - 3i$$

найдите их сумму, произведение, квадраты и кубы многочленов.

**5**. Докажите, что произведение $(x-(a+bi)) \cdot (x-(x-bi))$ является многочленом с действительными коэффициентами.

**6.** Пользуясь схемой Горнера, выполнить деление с остатком:

1) $2x^5 + 7x^4 - 8x^2 + 3x - 5$ на $x + 2$
2) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 50x + 90$ на $x - 2$
3) $x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - 3x + 7$ на $x + i$
4) $x^4 - 2ix^3 - (1-i)x^2 - 3x + 7$ на $x - i$

**7.** Найдите коэффициент $k$ многочлена $f(x) = 3x^4 - kx^2 + 6$, если $f(-2) = 6$.

**8.** Найдите остаток от деления $64x^4 + 32x^3 - 8x^2 - 72x + 8$ на $2x - 1$.

**9.** При каком значении $a$ многочлен $x^4 + ax^3 + 3x^2 - 4x - 4$ делится на $x - 2$?

**10**. Остатки от деления многочлена $f(x)$ на $x - 2$ и $x - 3$ соответственно равны 2 и 3. Найти остаток от деления этого многочлена на $x^2 - 5x + 6$.

**11**. Найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^3 + 2x^2 + x$, если число $-1$ является двукратным корнем многочлена $f(x)$, свободный член которого равен 5.

**12**. Найти остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x^3 + x^2$, если последние два члена этого многочлена $3x$ и 1, а остаток от деления $f(x)$ на $x + 1$ равен 7.

**13**. Остатки от деления многочлена $f(x)$ на $x + 1$ и $x + 2$ соответственно равны 5 и 6. Найти остаток от деления этого многочлена на $x^2 + 3x + 2$.

**14.** Многочлен $f(x)$, свободный член которого равен 1, не содержит ни одного члена нечётной степени. Найти остаток от деления $f(x)$ на $x^3 - 4x$, если остаток от деления $f(x)$ на $x + 2$ равен 3.

**15.** У многочлена $f(x)$ коэффициент при $x$ равен 2, при этом $f(x)$ не содержит ни одного члена чётной степени. Найти остаток от деления $f(x)$ на $x^3 + x^2$, если остаток от деления $f(x)$ на $x + 1$ равен 3.

# Практическое занятие №2
# Разложение многочлена по степеням двучлена *x-a*.

## Теоретический материал

### Разложение многочлена по степеням двучлена *x-a*

Пусть дан произвольный многочлен $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$.

**Определение 1**. ***Производной многочлена*** *$f(x)$ называется многочлен, обозначаемый через $f'(x)$ и равный $f'(x)=n\cdot a_nx^{n-1}+\ldots+a_1$.*

Как видно, это определение производной совпадает с производной многочлена из курса математического анализа. Заметим, что для многочленов сохраняются известные правила дифференцирования.

Аналогично определяется вторая производная многочлена $f''(x)=(f'(x))'$ и т.д.

**Определение 2**. *Разложение вида*

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n \quad \textbf{(1)}$$

*называется **разложением многочлена f(x) по степеням двучлена** x-a.*

Напомним, что в математическом анализе такое разложение называется *формулой Тейлора*.

Коэффициенты разложения (1) можно вычислить двумя способами:

1) находить производные $f(x)$ и подставлять значения $a$;

2) воспользоваться схемой Горнера.

Вторым способом как более удобным будем пользоваться на практике. Заметим, что $f(a)$ является остатком от деления $f(x)$ на $x-a$. Выделим его в разложении многочлена:

$$f(x)=f(a)+(x-a)\cdot q(x).$$

Тогда $\frac{f'(x)}{1!}$ является остатком от деления $q(x)$ на $x-a$ и его можно найти по схеме Горнера. Продолжая этот процесс, получим, что все коэффициенты разложения (1), кроме последнего, являются остатками от деления очередного неполного частного на $x-a$, а последний коэффициент является последним неполным частным.

## Решение задач

**Задача 1.** *Разложить многочлен по степеням двучлена и найти значения его производных:.*

$$f(x)=3x^3-2x^2+5x-1; \quad a=2.$$

Решение:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | *3* | *-2* | *5* | *-1* |
| *2* | *3* | *4* | *13* | *25=A* |
| *2* | *3* | *10* | *33=B* | |
| *2* | *3* | *16=C* | | |
| *2* | *3=D* | | | |

Разложение многочлена $f(x)=3x^3-2x^2+5x-1$ по степеням двучлена $x-2$ имеет вид:

$$f(x)=f(a_0)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n,$$

где $f(a)=A$,

$$\frac{f'(a)}{1!}=B,$$

$$\frac{f''(a)}{2!}=C,$$

$$\frac{f'''(a)}{3!}=D.$$

Таким образом, $f(x)=25+33(x-2)+16(x-2)^2+3(x-2)^3$.

Значения производных $f(x)$ при $a=2$ определяются так:

$f(2)=A$ => $f(2)=25$ − значение многочлена,

$\frac{f'(2)}{1!}=B$ => $f'(2)=33$ − значение первой производной,

$\frac{f''(2)}{2!}=C=16$ => $f''(2)=2!\cdot16=32$ − значение второй производной,

$\frac{f'''(2)}{3!}=D=3$ => $f'''(2)=3!\cdot3=18$ − значение третьей производной.

**Задача 2.** *Вычислить значения многочлена* $f(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 7$ при $x = 3{,}01$ и $x = 2{,}98$.

Решение:

Вычисление $f(3{,}01)$ и $f(2{,}98)$ непосредственной подстановкой затруднительно.

Ближайшим целым числом к 3,01 и 2,98 является 3. Поэтому сначала разложим $f(x)$по степеням $(x-3)$, а затем подставим $x = 3{,}01$ и $x = 2{,}98$.

| | *1* | *5* | *9* | *0* | *7* |
|---|---|---|---|---|---|
| *3* | *1* | *8* | *33* | *99* // | *304* |
| *3* | *1* | *11* | *66* // | *297* | |
| *3* | *1* | *14* // | *108* | | |
| *3* | *1* // | *17* | | | |
| *3* | *1* | | | | |

$f(x) = 304 + 297(x-3) + 108(x-3)^2 + 17(x-3)^3 + (x-3)^4$.

$f(3{,}01) = 304 + 297 \cdot 0{,}01 + 108 \cdot 0{,}01^2 + 17 \cdot 0{,}01^3 + 0{,}01^4 =$ $304 + 2{,}97 + 0{,}0108 + 0{,}000017 + 0{,}00000001 = 306{,}98081701$.

Аналогично $f(2{,}98) = 304 + 297(-0{,}02) + 108(-0{,}02)^2 +$ $17(-0{,}02)^3 + (-0{,}02)^4 = \cdots = 298{,}10306416$.

**Задача 3.** *Разложить на простейшие дроби рациональную дробь*

$$\frac{x^2+2x-3}{(x+3)^4}.$$

Решение:

Разложим числитель $\varphi(x) = x^3 + 2x - 3$ по степеням $x - 3$:

| | *1* | *0* | *2* | *-3* |
|---|---|---|---|---|
| *-3* | *1* | *-3* | *11* | *-36=*$\varphi$*(-3)* |
| *-3* | *1* | *-6* | *29=* $\varphi'(-3)$ | |
| *-3* | *1* | *-9=*$\frac{\varphi''(-3)}{2!}$ | | |
| *-3* | *1=*$\frac{\varphi'''(-3)}{3!}$ | | | |

$$\varphi(x) = (x+3)^3 - 9(x+3)^2 + 29(x+3) - 36$$

После сокращения дробей получим:

$$\frac{x^3+2x-3}{(x+3)^4} = \frac{1}{x+3} - \frac{9}{(x+3)^2} + \frac{29}{(x+3)^3} - \frac{36}{(x+3)^4}$$

**Задача 4.** *Разложить по степеням x многочлен* $f(x+3)$, *если*

$$f(x) = x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 2$$

Решение:

Разложим $f(x)$ по степеням $x-3$ по формуле Тейлора:

Вычисления по схеме Горнера:

| | *1* | *-5* | *-4* | *0* | *0* | *2* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *3* | *1* | *-2* | *-10* | *-30* | *-90* | $-268 = f(3)$ |
| *3* | *1* | *1* | *-7* | *-51* | $-243 = f'(3)$ | |
| *3* | *1* | *4* | *5* | $-36 = \frac{f''(3)}{2!}$ | | |
| *3* | *1* | *7* | $26 = \frac{f'''(3)}{3!}$ | | | |
| *3* | *1* | *10*$=\frac{f^{(4)}(3)}{4!}$ | | | | |
| *3* | *1*$=\frac{f^{(5)}(3)}{5!}$ | | | | | |

$f(x) = (x-3)^5 + 10(x-3)^4 + 26(x-3)^3 - 36(x-3)^2 - 243(x-3) - 268.$

Подставим вместо $x$ выражение $x+3$:

$$f(x+3) = x^5 + 10x^4 + 26x^3 - 36x^2 - 243 - 268$$

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням двучлена $x - x_0$:

1) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3,\ x_0 = -1$
2) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 - 24x + 24,\ x_0 = 2$
3) $f(x) = (x-1)^4 + 2(x-1)^3 - 3(x-1)^2 - 7,\ x_0 = 2$
4) $f(x) = (x+3)^4 - 5(x+3)^3 + 7(x+3) + 1,\ x_0 = 0$

5) $f(x) = x^4 + 2ix^3 - (1+i)x^2 - x + 3i,\ x_0 = -i$

6) $f(x) = x^4 - 2ix^3 - (1-i)x^2 - x - 3i,\ x_0 = i$

**2.** Для данного многочлена $f(x)$ с помощью разложения его по степеням $(x-c)$ при подходящем $c$ найдите $f(d)$:

1) $f(x) = 27x^5 - 307x^4 + 1463x^3 - 3570x^2 + 4388x - 2231,$ $d = 0{,}99$

2) $f(x) = 45x^5 - 648x^4 + 3726x^3 - 10715x^2 + 15448x - 8973,$ $d = 2{,}99$

**3.** Пользуясь схемой Горнера, определить кратность корня $x_0$ многочлена $f(x)$:

1) $f(x) = x^5 + 6x^4 + 11x^3 + 2x^2 - 12x - 8,\ x_0 = -2$

2) $f(x) = x^5 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16,\ x_0 = -2$

**4.** Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен $f(x)$ по степеням $x-a$ и найти значения многочлена и всех его производных в точке $x = a$:

1) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 6x - 5,\ a = -3,$

2) $f(x) = x^4 + 3x^3 - 4x^2 + 6x - 5,\ a = -2,$

3) $f(x) = (x+2)^4 + 5(x+2)^3 - 4(x+2)^2 - 3(x+2) + 3,\ a = -3$

4) $f(x) = (x-2)^4 + 4(x-2)^3 + 6(x-2)^2 + 10(x-2) + 20,\ a = 1.$

**5.** Пользуясь схемой Горнера, данную дробь представить в виде суммы простейших дробей:

1) $\dfrac{(x+2)^4-2(x+2)^3+4(x+2)^2-2(x+2)+7}{(x+3)^5}$

2) $\dfrac{(x+4)^4-2(x+4)^3-3(x+4)^2+2(x+4)-5}{(x+2)^6}$

3) $\dfrac{(x+5)^4-(x+5)^2+8}{(x+7)^5}$

4) $\dfrac{x^4+3x^3-11x^2-16x+24}{(x+4)^6}$

5) $\dfrac{5x^2-14x-23}{(x-1)^3(x-3)^2(x-4)}$

**6.** Упростить выражения:

$$1)\ \frac{2x^5 + 11x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 11x - 5}{x^3 + 4x^2 + 4x + 3}$$

$$2)\ \frac{x^5 + x^4 + 10x^2 - 6x + 9}{x^6 - x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x + 21}$$

$$3)\ \frac{x^5 - 6x^3 + 5x^2 - 9x + 9}{2x^6 + 4x^5 - 9x^4 - 6x^3 + 14x^2 + 10x - 15}$$

## Практическое занятие №3
## Алгоритм Евклида. Линейное представление НОД многочленов.

### Теоретический материал

### Наибольший общий делитель многочленов. Алгоритм Евклида

Пусть даны два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ над полем $P$.

**Определение 1**. *Многочлен $h(x)$ называется **общим делителем многочленов** $f(x)$ и $g(x)$, если $f(x)$ делится на $h(x)$ и $g(x)$ делится на $h(x)$.*

**Определение 2**. *Многочлен $d(x)$ называется **наибольшим общим делителем (НОД) многочленов** $f(x)$ и $g(x)$ (отличных от нуля), если $d(x)$ – их общий делитель и $d(x)$ делится на любой общий делитель данных многочленов.*

Обозначим *НОД*$(f(x), g(x))=d(x)$.

**Замечание**. Если $d(x)$ – общий делитель $f(x)$ и $g(x)$, то для любого $c\neq 0$ ($c=const$) $f(x)$делится на $c\cdot d(x)$ и $g(x)$ делится на $c\cdot d(x)$. Это значит, что *НОД* определяется не однозначно, а с точностью до константы.

**Лемма 1**. *Если многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$, то НОД$(f(x),g(x))=g(x)$.*

**Доказательство**. По условию $g(x)$ является общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Пусть $h(x)$ – любой другой их общий делитель, то есть $f(x)$ делится на $h(x)$ и $g(x)$. Получаем, что $g(x)$ делится на любой общий делитель этих многочленов, следовательно, $g(x)$ является наибольшим общим делителем.

**Лемма 2**. *Если многочлен $f(x)$ не делится на многочлен $g(x)$ (без остатка) и $r(x)$ – остаток от такого деления, то НОД$(f(x), g(x))$=НОД$(g(x), r(x))$.*

**Доказательство**. Разделим многочлен $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. По теореме о делении с остатком получим равенство $f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x) \Rightarrow r(x)=f(x)-g(x)\cdot q(x)$. Возьмем $h(x)$ – любой общий делитель многочлена $f(x)$ и

$g(x)$, тогда $f(x)$ делится на $h(x)$ и $g(x)$ делится на $h(x)$. Значит, и $g(x)\cdot q(x)$ делится на $h(x)$. Из равенства $r(x)=f(x)-g(x)\cdot q(x)$ следует, что $r(x)$ делится на $h(x)$. Тогда $h(x)$ – общий делитель $g(x)$ и $r(x)$.

Заметим, что по лемме 2 у многочленов $f(x)$ и $g(x)$ и у многочленов $g(x)$ и $r(x)$ будут одни и те же общие делители. Среди них есть *НОД* многочленов $f(x)$ и $g(x)$, который делится на все остальные общие делители этих многочленов, а значит, он не изменит своей роли и для многочленов $g(x)$ и $r(x)$, т.е. *НОД*$(f(x), g(x))=$*НОД*$(g(x), r(x))$.

Нахождение *НОД* многочленов $f(x)$ и $g(x)$ осуществляется определенной последовательностью действий, которая называется *алгоритмом Евклида*. Он состоит в следующем:

1. Разделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком: $f(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x)$;

2. Разделим $g(x)$ на $r_1(x)$, получим равенство $g(x)=r_1(x)\cdot q_2(x)+r_2(x)$;

3. Разделим $r_1(x)$ на $r_2(x)$, получим равенство $r_1(x)=r_2(x)\cdot q_3(x)+r_3(x)$ и так далее делим предыдущий остаток на следующий.

Из теоремы о делении с остатком следует, что степени многочленов убывают: $ст.g(x)>ст.r_1(x)>ст.r_2(x)>\ldots$. Так как степень многочлена является целым неотрицательным числом ($n\geq 0$), то через конечное число шагов либо получим нулевой остаток ($r(x)=0$), либо в остатке окажется многочлен нулей степени, и, в свою очередь, следующий остаток будет равен нулю.

При получении нулевого остатка процесс деления прекращается. Пусть это будет на шаге $r_{k-1}(x)=r_k(x)\cdot q_{k+1}(x)$, т.е. $r_{k-1}(x)=0$.

**Теорема 1.** *Последний отличный от нуля остаток* $(r_k(x))$ *в алгоритме Евклида является одним из НОД данных многочленов* $f(x)$ и $g(x)$.

**Доказательство.** По лемме 2 *НОД*$(f(x), g(x))=$*НОД*$(g(x), r_1(x))=$*НОД*$(r_1(x), r_2(x))=\ldots=$*НОД*$(r_{k-1}(x), r_k(x))$. По лемме 1 $r_k(x)$ − последний не равный нулю остаток.

## Линейное представление НОД многочленов

**Теорема 1**. *Если НОД*$(f(x), g(x))=d(x)$, *то над полем P существуют такие многочлены* $u(x)$ *и* $v(x)$, *что справедливо равенство:*

$$d(x)=u(x)\cdot f(x)+v(x)\cdot g(x).$$

Это равенство называется ***линейным представлением НОД многочленов*** $f(x)$ и $g(x)$.

**Доказательство**. Применим к многочленам $f(x)$ и $g(x)$ алгоритм Евклида. Согласно алгоритму $НОД(f(x),g(x))=d(x)=r_k(x)=r_{k-2}(x)-r_{k-1}(x)\cdot q_k(x)$. Из равенства $r_{k-3}(x)=r_{k-2}(x)\cdot q_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)$ следует $r_{k-1}(x)=r_{k-3}(x)-r_{k-2}(x)\cdot q_{k-1}(x)$. Подставляя это выражение в предыдущее равенство, получим:

$$d(x)=r_{k-2}(x)\cdot[r_{k-3}(x)-r_{k-2}(x)\cdot q_{k-1}(x)]\cdot q_k(x) \text{ и т.д.}$$

Выражая остатки и подставляя их в предыдущие равенства, получим, что $d(x)=u(x)\cdot f(x)+v(x)\cdot g(x)$. Теорема доказана.

## НОД нескольких многочленов

НОД нескольких многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ можно найти следующим приёмом:

1) вычислить НОД многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Пусть $h(x)=Д(f_1, f_2)$;
2) вычислить НОД многочленов $h(x)$ и $f_3(x)$. Пусть $g(x)=Д(h, f_3)$.

Докажем, что $g(x)$ есть НОД многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

1) $g(x)=Д(h, f_3) \Rightarrow h(x)\vdots g(x)$ и $f_3(x)\vdots g(x)$;

$h(x)=Д(f_1, f_2) \Rightarrow f_1(x)\vdots h(x)$ и $f_2(x)\vdots h(x)$.

Имеем $(f_1(x)\vdots h(x)$ и $h(x)\vdots g(x)) \Rightarrow f_1(x)\vdots g(x)$ − по свойству транзитивности отношения делимости в кольце многочленов.

Имеем $(f_2(x)\vdots h(x)$ и $h(x)\vdots g(x)) \Rightarrow f_2(x)\vdots g(x)$.

Все три многочлена $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ делятся на $g(x)$ => многочлен $g(x)$ есть общий делитель этих трёх многочленов.

2) Покажем, что $g(x)$ – наибольший общий делитель всех трёх многочленов.

Пусть $d(x)$ – какой-то общий делитель многочленов $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$. Требуется доказать, что $g(x)\vdots d(x)$.

Имеем $h(x)=Д(f_1, f_2)$ и $(f_1(x)\vdots d(x)$ и $f_2(x)\vdots d(x))$. Следовательно, $d(x)$ есть делитель многочленов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а $h(x)$ − их наибольший общий делитель, значит, $h(x)\vdots d(x)$. Имеем $g(x)=Д(h, f_3) \Rightarrow h(x)\vdots d(x)$. По доказанному $f_3(x)\vdots d(x) \Rightarrow d(x)$ есть общий делитель многочленов $h(x)$ и $f_3(x)$, а многочлен $g(x)$ является их наибольшим общим делителем => $g(x)\vdots d(x)$.

Из 1)-2) следует, что НОД$(f_1(x), f_2(x), f_3(x))=g(x)$.

## Решение задач

**Задача 1**. *Найти НОД(f(x), g(x)) и выразить его линейно через данные многочлены:*

$$f(x)=x^3-2, \qquad g(x)=x^2+2x-3.$$

Решение:

Для нахождения *НОД* используем алгоритм Евклида, а деление многочленов $f(x)$ и $g(x)$ проведём по схеме Яковкина.

1) $f(x):g(x)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | -2 |
| -2 | | -2 | 3 | |
| 3 | | | 4 | -6 |
| | 1 | -2 | 7 | -8 |

Таким образом, $f(x)=g(x)(x-2)+(7x-8)$,
то есть $q_1(x)=x-2$, $r_1(x)=7x-8$.

Выразим $r_1(x)=7x-8=f(x)-g(x)(x-2)$.

2) $g(x):r_1(x)$

Увеличим многочлен $g(x)$ в 49 раз, чтобы избежать появления дробей.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 7 | 49 | 98 | -147 |
| 8 | | 56 | |
| | | | 176 |
| | 7 | 22 | 29 |

Получили $49g(x)=(7x+22)r_1(x)+29$,
где $7x+22=q_2(x)$, $29=r_2(x)$.

Выразим $r_2(x)=49g(x)-r_1(x)(7x+22)$.

3) $r_1(x):r_2(x)$

Так как $r_2(x)=29$, а на число можно разделить любой многочлен без остатка, то $r_3(x)=0$.

Вывод: *НОД*$(f(x), g(x))=29$.

Запишем линейную комбинацию *НОД*:

$29=49g(x)-r_1(x)(7x+22);$

$29=49g(x)-(f(x)-g(x)(x-2))(7x+22);$

$29=49g(x)+(x-2)(7x+22)g(x)-(7x+22)f(x);$

$29=f(x)(-7x-22)+g(x)(49+7x^2+22x-14x-44);$

$29=f(x)(-7x-22)+g(x)(7x^2+8x+5);$

$u(x)= -7x-22$

$v(x)=7x^2+8x+5$

Итак, *НОД*$(f(x); g(x))=f(x)u(x)+g(x)v(x)$,

где $u(x)= -7x-22$, $v(x)=7x^2+8x+5$.

**Задача 2**. *Найти НОД трёх многочленов*

$$f(x)=2x^4-x^2-1,$$
$$g(x)=x^3+2x^2-x-2,$$
$$h(x)=x^3-x^2-x+1.$$

Решение:

1) Найдем *Д*$(f, g)$:

$r(x)=9x^2-9=9(x^2-1)$

$r_1(x)=x^2-1.$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 | -1 | 0 | -1 |
| -2 | | -4 | 2 | 4 | |
| 1 | | | 8 | -4 | -8 |
| 2 | | | | | |
| | 2 | -4 | 9 | 0 | -9 |

$r_2(x)=0.$

*Д*$(f, g)=x^2-1$; $d(x)= x^2-1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | -1 | -2 |
| 0 | | 0 | 1 | |
| 1 | | | 0 | 2 |
| | 1 | 2 | 0 | 0 |

2) Найдем *Д*$(d, h)$:

$r_1(x)=0$

*Д*$(d, h)=d(x)= x^2-1$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | -1 | 1 |
| 0 | | 0 | 1 | |
| 1 | | | 0 | -1 |
| | 1 | -1 | 0 | 0 |

Итак, *Д*$(f,g,h)=x^2-1$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Найти НОД $(f(x), g(x))$, если

1) $f(x) = x^6 + 8x^5 + 22x^4 + 43x^3 + 70x^2 + 57x + 39$
$$g(x) = x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 21x + 33$$

2) $f(x) = 6x^5 + x^4 + 12x^3 - 42x^2 + 30x + 25$
$$g(x) = 2x^4 - x^3 + 4x^2 - 17x + 20$$

**2.** Пользуясь алгоритмом Евклида, для данных многочленов $f(x)$ и $g(x)$ подобрать многочлены $u(x)$ и $v(x)$, такие, что
$$u(x) \cdot f(x) + v(x) \cdot g(x) = d(x),$$
где $d(x)$ – наибольший общий делитель $f(x)$ и $g(x)$.

1) $f(x) = x^5 + 3x^4 + x^3 + x^2 + 3x + 1,$
$$g(x) = x^4 + 2x^3 + x + 2$$

2) $f(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1,$
$$g(x) = x^2 - x - 1$$

3) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 12x^2 - 2x + 12,$
$$g(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 17$$

4) $f(x) = x^5 - 12x^3 - 14x^2 + x + 16,$
$$g(x) = x^3 - 2x^2 - 10x + 10$$

# Практическое занятие №4
# Взаимно простые многочлены. НОК многочленов.

## Теоретический материал

### Взаимно простые многочлены

**Определение 1**. *Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются **взаимно простыми**, если их НОД есть многочлен нулевой степени (то есть число).*

**Пример 1**. *Пусть $f(x)=x^2+3x+2$ и $g(x)=x-1$.*

1) $f(x)= g(x)(x+4)+6,$

$r_1(x)=6$

| | 1 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 4 | 6 |

2) $g(x) \vdots 6 \Rightarrow r_2(x)=0.$

НОД$(f, g)=r_1(x)=6$ => многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые.

**Замечание**. Так как *НОД* определяется с точностью до $const\neq 0$, можно считать, что *НОД* взаимно простых многочленов равен 1.

**Теорема 1**. *Если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые, то существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству:*

$$f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=1.$$

**Доказательство**. Так как многочлены $f(x)$ и $g(x)$ по условию теоремы взаимно простые, то НОД$(f(x),g(x))=c\neq 0$. На основании теоремы о линейном представлении НОД существуют многочлены $u_1(x)$ и $v_1(x)$, удовлетворяющие равенству:

$$c=f(x)\cdot u_1(x)+g(x)\cdot v_1(x).$$

Разделим обе части этого равенства на $c\neq 0$:

$$1= f(x)\cdot \underbrace{(\frac{1}{c}\cdot u_1(x))}_{u(x)} + g(x)\cdot \underbrace{(\frac{1}{c}\cdot v_1(x))}_{v(x)}.$$

Получаем, что $f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=1$. Теорема доказана.

**Теорема 2 (обратная**). *Если существуют многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству $f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=1$, то многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые.*

**Доказательство**. НОД$(f(x),g(x))=d(x)$, тогда $f(x)\,\vdots\,d(x)$ и $g(x)\,\vdots\,d(x)$. Получаем $(f(x)\cdot u(x))\,\vdots\,d(x)$ и $(g(x)\cdot v(x))\,\vdots\,d(x)$, тогда $(f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x))\,\vdots\,d(x)$. Но по условию теоремы $f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=1$, следовательно $1\,\vdots\,d(x)$ и $d(x)$ есть многочлен нулевой степени. По определению многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые. Теорема доказана.

**Следствие.** *Частные от деления многочленов $f(x)$ и $g(x)$ на их наибольший общий делитель есть многочлены взаимно простые.*

**Доказательство**. По теореме о линейном представлении НОД двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ имеем:

$$f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=d(x).$$

Разделим обе части этого равенства на $d(x)=$НОД$(f(x),g(x))$, получим:

$$\underbrace{\frac{f(x)}{d(x)}}_{f_1(x)}\cdot u(x)+\underbrace{\frac{g(x)}{d(x)}}_{g_1(x)}\cdot v(x)=1.$$

Следовательно, $f_1(x)\cdot u(x)+g_1(x)\cdot v(x)=1$, отсюда $f_1(x)$ и $g_1(x)$ − взаимно простые многочлены.

**Теорема 3.** *Если произведение многочленов $f(x)\cdot g(x)$ делится на $h(x)$ и при этом многочлены $f(x)$ и $h(x)$ взаимно простые, то $g(x)\,\vdots\,h(x)$.*

**Доказательство**. Многочлены $f(x)$ и $h(x)$ по условию взаимно простые, поэтому имеет место равенство $f(x)\cdot u(x)+g(x)\cdot v(x)=1$. Умножая обе его части на $g(x)$, получаем

$$\underbrace{f(x)\cdot g(x)\cdot u(x)}_{\vdots\,h(x)}+\underbrace{h(x)\cdot g(x)\cdot v(x)}_{\vdots\,h(x)}=g(x).$$

Каждое слагаемое делится на $h(x)$ => вся сумма делится на $h(x)$ => правая часть делится на $h(x)$, то есть $g(x)\,\vdots\,h(x)$. Теорема доказана.

**Теорема 4**. *Если многочлен $f(x)$ взаимно прост с каждым из многочленов $g(x)$ и $h(x)$, то он взаимно прост и с их произведением.*

**Теорема 5**. *Если $f(x)$ делится на каждый из многочленов $g(x)$ и $h(x)$ и при этом многочлены $g(x)$ и $h(x)$ взаимно просты, то $f(x)$ делится на произведение $g(x)\cdot h(x)$.*

## Наименьшее общее кратное двух многочленов

Пусть даны многочлены *f(x)* и *g(x)* над полем *P*.

**Определение 1**. *Многочлен K(x) называется **общим кратным** многочленов f(x) и g(x), если K(x)* $\vdots$ *f(x) и K(x)* $\vdots$ *g(x).*

**Определение 2**. ***Наименьшим общим кратным (НОК)*** *многочленов f(x) и g(x) называется такое их общее кратное, на которое делится любое общее кратное этих многочленов.*

**Замечание**. Наименьшее общее кратное двух многочленов *f(x)* и *g(x)* обозначается *НОК(f(x), g(x))* или *НОК(f, g)* или *K(f,g)*.

**Теорема 1**. *НОК многочленов f(x) и g(x) вычисляется по формуле:*

$$K(f,g)=\frac{f(x)\cdot g(x)}{Д(f,g)} \qquad \textbf{(*)},$$

Таким образом, НОК двух многочленов есть частное от деления произведения этих многочленов на их НОД.

**Доказательство**. Пусть НОД многочленов *Д(f,g)=d(x)*, тогда $f(x)=d(x)\cdot q_1(x)$ и $g(x)=d(x)\cdot q_2(x)$. Подставим в формулу (*) вместо *f(x)* его значение, получим:

$$K(f,g)=\frac{d(x)\cdot q_1(x)\cdot g(x)}{d(x)}=q_1(x)\cdot g(x)$$

Следовательно, *K(f,g)* $\vdots$ *g(x)*.

В равенство (*) подставим вместо *g(x)* его значение, получим:

$$K(f,g)=\frac{f(x)\cdot d(x)\cdot q_2(x)}{d(x)}=f(x)\cdot q_2(x)$$

Следовательно, *K(f,g)* $\vdots$ *f(x)*.

Итак, многочлен *K(f,g)=k(x)* является общим кратным многочленов *f(x)* и *g(x)*.

Покажем, что *k(x)* есть наименьшее общее кратное многочленов *f(x)* и *g(x)*. Пусть *k'(x)* – любое общее кратное многочленов *f(x)* и *g(x)*. Требуется доказать, что *k'(x)*: *k(x)*. Так как *k'(x)* – общее кратное *f(x)* и *g(x),* то *k'(x)*: *f(x)* и *k'(x)*: *g(x)*. Пусть $k'(x)=f(x)\cdot q(x)$ и $k'(x)=g(x)\cdot h(x)$. Будем иметь, что $f(x)\cdot q(x)=g(x)\cdot h(x)$. Делим обе части последнего равенства на *d(x)* и получаем:

$$\underbrace{\frac{f(x)}{d(x)}}q(x)=\underbrace{\frac{g(x)}{d(x)}}h(x).$$

$q_1(x)$ $\qquad$ $q_2(x)$

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ делятся на свой НОД $d(x)$, в частном получим взаимно простые многочлены $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Многочлен $q(x)$ будет делиться на $q_2(x)$: $q(x)=q_2(x)\cdot p(x)$. Подставляя значение $q(x)$ в равенство $k'(x)=f(x)\cdot q(x)$, будем иметь:

$$k'(x) = f(x)\cdot q_2(x)\cdot p(x) = f(x)\cdot \frac{g(x)}{d(x)}\cdot p(x) = \frac{f(x)\cdot g(x)}{d(x)}\cdot p(x) = k(x)\cdot p(x)$$

$$\Rightarrow k'(x)=k(x)\cdot p(x) \Rightarrow k'(x):k(x).$$

Итак, любое общее кратное многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делится на $k(x)$. Следовательно, $k(x)$ есть *НОК* многочленов $f(x)$ и $g(x)$. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что НОК двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ можно вычислить по формуле (*), где $Д(x)$ есть НОД$(f(x),g(x))$.

## Решение задач

**Задача 1**. *Найти НОК многочленов*

$$f(x)=x^3-x^2-2x+2 \qquad g(x)=2x^2-5x+3.$$

Решение:

1) Найдем НОД$(f(x),g(x))$:

а) $f(x):g(x)$. Получаем, что $r_1(x)=x-1$;

б) $g(x):r_1(x)$. Получаем, что $r_1(x)=0$.

Итак, НОД$(f(x),g(x))=x-1$.

2) $f(x)\cdot g(x)=2x^5-7x^4+4x^3+11x^2-16x+6.$

3) $K(x) = \dfrac{f(x)\cdot g(x)}{Д(x)}$,

По схеме Горнера

| | 2 | -7 | 4 | 11 | -16 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | -5 | -1 | 10 | -6 | 0 |

Ответ: $K(f(x),g(x))=2x^4-5x^3-x^2+10x-6.$

**Задача 2**. *Найти НОК трёх многочленов:*

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$
$$g(x) = x^3 - 2x^2 - x+2$$
$$h(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$$

Решение:

Сначала найдем НОК двух многочленов

$$m_1 = [f(x), g(x)] = \frac{f(x) \cdot g(x)}{D_1(x)},$$

где $D_1(x) = \text{НОК}\big(f(x), g(x)\big)$.

1. $f(x)$: $g(x)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *-3* | *3* | *-3* | *2* |
| *2* | | *2* | *1* | *-2* | |
| *1* | | | *-2* | *-1* | *2* |
| *-2* | | | | | |
| | *1* | *-1* | *2* | *-6* | *4* |

2. $g(x)$: $\frac{1}{2}r(x)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -2 | -1 | 2 |
| 3 | | 3 | -2 | |
| -2 | | | 3 | -2 |
| | 1 | 1 | 0 | 0 |

$$D_1(x) = \frac{1}{2}r(x) = x^2 - 3x + 2$$

$$3.\ m_1(x) = \frac{f(x) \cdot g(x)}{D_1} = f(x) \cdot \frac{g(x)}{D_1(x)} = (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2)(x + 1)$$
$$= x^5 - 2x^4 - x + 2$$

Затем найдем НОК трёх многочленов

$$m(x) = [f(x), g(x), h(x)] = [m_1(x), h(x)] = \frac{m_1(x) \cdot h(x)}{D_2(x)},$$

где $D_2(x) = \big(m_1(x), h(x)\big)$.

4. $m_1(x)$: $h(x)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *-2* | *0* | *0* | *-1* | *2* |
| *-2* | | *-2* | *-1* | *-2* | | |
| *-1* | | | *8* | *4* | *8* | |
| *-2* | | | | *-14* | *-7* | *-14* |
| | *1* | *-4* | *7* | *-12* | *0* | *-12* |

$h(x) : (-\frac{1}{12} r_1(x))$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 0 | | 0 | -1 | |
| -1 | | | 0 | -2 |
| | 1 | 2 | 0 | 0 |

$$D_2(x) = -\frac{1}{12} r_1(x) = x^2 + 1$$

$$m(x) = \frac{m_1(x) \cdot h(x)}{D_2(x)} = m_1(x) \cdot \frac{h(x)}{D_2(x)} = (x^5 - 2x^4 - x + 2) \cdot (x + 2) = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4$$

Ответ:

$$m(x) = [f(x), g(x), h(x)] = x^6 - 4x^4 - x^2 + 4.$$

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Найти НОД и НОК пар многочленов:

1) $f(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1,$

$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 \ \in Q[x]$$

2) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 1,$

$$g(x) = x^4 - 4\sqrt{2}x^3 + 6x^2 + 4\sqrt{2}x + 1 \ \in R[x]$$

3) $f(x) = x^5 + (1 - i)x^4 + x^3 - ix^2 - 1,$

$$g(x) = x^4 - ix^3 - (1 - i)x^2 - x + 1 \ \in C[x]$$

## Практическое занятие №5
## Неприводимые кратные множители. Кратные корни многочлена.

### Теоретический материал

### Неприводимые над полем многочлены

**Определение 1**. *Многочлен $f(x)$ положительной степени называется **приводимым над полем P**, если его можно представить в виде произведения двух других многочленов положительной степени над полем P*.

**Определение 2**. *Многочлен $g(x)$ положительной степени называется **неприводимым над полем P**, если его нельзя представить в виде произведения двух других многочленов положительной степени над этим полем.*

Приводимые многочлены называют *составными*, неприводимые многочлены называют *простыми* над полем $P$.

**Пример 1.** $f(x)=x^2-4=(x-2)(x+2)$.

Видим, что многочлен $f(x)$ приводим над полями $Q$, $R$, $C$.

**Пример 2.** $f(x)=x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

Многочлен $f(x)$ приводим над полями $R$, $C$.

**Пример 3**. $f(x)=x^2-2=x^2-(\sqrt{2}\,i)^2=(x-\sqrt{2}\,i)(x+\sqrt{2}\,i)$

Многочлен $f(x)$ приводим над полем $C$.

**Теорема 1**. *Многочлены первой степени неприводимы над любым полем.*

**Доказательство**. Произвольный многочлен первой степени имеет вид $f(x)=a_1x+a_0$. Предположим, что он приводим, тогда его можно представить в виде:

$$\underbrace{f(x)}_{ст.=1}=\overbrace{f_1(x)\cdot f_2(x)}^{ст.=2}$$

Получили неравенство степеней, следовательно, $f(x)$ − неприводимый многочлен.

**Теорема 2**. *Если многочлен $f(x)$ неприводим над полем $P$, то и многочлен $c \cdot f(x)$ (при любом $c \neq 0$) также неприводим над полем $P$.*

Доказательство очевидно из определения.

**Теорема 3**. *Если многочлен $f(x)$ неприводим над полем $P$ и многочлен $g(x)$ – произвольный многочлен над полем $P$, тогда либо $g(x)$ делится на $f(x)$, либо $f(x)$ и $g(x)$ − взаимно простые многочлены.*

**Доказательство**. Обозначим $НОД(f(x),g(x))=d(x)$.

Если $d(x)$ – многочлен нулевой степени (число), то его можно считать равным 1, и многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые.

Если же $d(x)$ – это многочлен ненулевой степени, разделим $f(x)$ на $d(x)$. Получим $f(x)=d(x) \cdot q(x)$, но так как $f(x)$ неприводим, то многочлен $q(x)$ в этом случае имеет нулевую степень. Значит, $f(x)=d(x) \cdot q$ => $f(x)$ делится на $d(x)$ => $f(x)$ делится на $d(x) \cdot q$, а => $f(x)$ делится на $g(x)$. Теорема доказана.

**Следствие**. *Если многочлен $f(x)$ неприводим и $g(x)$ не делится на $f(x)$, то многочлены $f(x)$ и $g(x)$ взаимно простые.*

**Теорема 4**. *Если многочлен $f(x)$ неприводим и произведение некоторых многочленов $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$ делится на $f(x)$, то хотя бы один из многочленов делится на $f(x)$.*

## Разложение многочлена в произведение нормированных неприводимых множителей

Докажем вспомогательную

**лемму**: *если $p(x)$ и $q(x)$ – неприводимые нормированные многочлены и $p(x)$ делится на $q(x)$, то $p(x)=q(x)$.*

**Доказательство**. По условию $p(x)$ делится на $q(x)$ => $p(x)=q(x) \cdot \varphi(x)$. Но так как многочлен $p(x)$ неприводим, то многочлен $\varphi(x)$ имеет нулевую степень => $p(x)=q(x) \cdot \varphi$, а так как многочлены $p(x)$ и $q(x)$ нормированные, то $\varphi=1$ => $p(x)=q(x)$. Лемма доказана.

**Теорема 1 (основная теорема теории делимости многочленов)**. *Всякий многочлен выше нулевой степени можно единственным образом* *представить в виде произведения элемента поля P и нормированных неприводимых над полем P многочленов, то есть*

$$f(x)=a\cdot p_1(x)\cdot p_2(x)\cdot\ldots\cdot f_k(x) \quad \textbf{(1)}.$$

**Доказательство**. Докажем теорему методом математической индукции по степени многочлена.

Пусть степень многочлена $f(x)$ равна единице ($n$=1) =>

$$f(x)=a_1x+a_0=a_1(x+\frac{a_0}{a_1}) \text{ => теорема справедлива.}$$

Пусть теорема верна для многочлена степени меньше, чем $n$. На основе этого предположения докажем, что теорема верна и для многочленов степени $n$:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

Возможны два случая:

1) если многочлен $f(x)$ неприводим, то поступаем следующим образом:

$$f(x)=a_n(x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1})+\ldots+(\frac{a_1}{a_n}x+\frac{a_0}{a_n}) \text{ => теорема доказана.}$$

2) если $f(x)$ приводим, то $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$, при этом каждый из сомножителей должен иметь степень меньше $n$, значит, для каждого из них мы используем наше предположение, т.е.

$$f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$$

$$f_1(x)=a\cdot p_1(x)\cdot\ldots\cdot p_s(x)$$

$$f_2(x)=b\cdot p_{s+1}(x)\cdot\ldots\cdot p_k(x)$$

$$f_1(x)\cdot f_2(x)=c\cdot p_1(x)\cdot\ldots\cdot p_k(x),$$

$$c=a\cdot b \text{=>разложение доказано.}$$

Докажем единственность разложения (1).

Предположим, что для $f(x)$ существует другое аналогичное разложение: $f(x)=d\cdot q_1(x)\cdot\ldots\cdot q_l(x)$. Приравнивая оба эти разложения, получаем

$$c\cdot p_1(x)\cdot\ldots\cdot p_k(x)=d\cdot q_1(x)\cdot\ldots\cdot q_L(x) \quad (*).$$

Левая часть равенства (*) делится на $p_1(x)$, следовательно, должна делиться и правая часть, а по предыдущей теореме хотя бы один из сомножителей в правой части делится на $p_1(x)$. Не нарушая порядка нумерации, будем считать, что на $p_1(x)$ делится $q_1(x)$. По условию теоремы $q_1(x)$ и $p_1(x)$ – нормированные неприводимые многочлены, значит, по доказанной лемме они равны, поэтому в равенстве (*) можно сократить обе части на $p_1(x)$. Оставшийся многочлен при этом вновь будет иметь степень меньшую $n$, поэтому можно сослаться на наше предположение. Получим, что $p_2(x)=q_2(x)$. Этот процесс продолжим до тех пор, пока не получим, что $c=d$. Теорема доказана.

**Определение 1**. *Разложение многочлена f(x), в котором объединены одинаковые нормированные неприводимые множители, называется* ***каноническим разложением многочлена*** *f(x) и имеет вид:*

$$f(x) = a \cdot p_1^{\alpha_1}(x) \cdot p_2^{\alpha_2}(x) \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}(x).$$

## Неприводимые кратные множители многочлена

**Определение 1**. *Неприводимый многочлен p(x) над полем P называется* ***неприводимым кратным множителем для многочлена f(x),*** *если многочлен f(x) делится нацело на $p^m(x)$ и f(x) не делится на $p^{m+1}(x)$.*

Число $m$ называется *кратностью множителя*.

Если $m=1$, то множитель называется *простым*.

**Пример 1.**

$$f(x)=x^5+x^4-8x^3-8x^2+16x+16=(x-2)^2(x+2)^2(x+1).$$

$p_1(x)=(x-2)$ − двукратный множитель.

$p_2(x)=(x+2)$ − двукратный множитель.

$p_3(x)=(x+1)$ − простой множитель.

**Теорема 1**. *Если многочлен p(x) − неприводимый кратный множитель для многочлена f(x) кратности $m>1$, то для многочлена $f'(x)$ многочлен p(x) будет неприводимым кратным множителем кратности $m-1$.*

**Теорема 2**. *Многочлен f(x) имеет неприводимые кратные множители тогда и только тогда, когда НОД(f(x),f'(x)) имеет положительную степень.*

**Доказательство**.

1. Пусть многочлен $f(x)$ имеет неприводимый кратный множитель $p(x)$ кратности $m>1$. По предыдущей теореме $p(x)$ будет неприводимым кратным множителем кратности $m-1$ для производной многочлена $f'(x)$, то есть $f(x)=p^m(x)\cdot q(x)$ и $f'(x)=p^{m-1}(x)\cdot q_1(x)$. Отсюда следует, что многочлен $p^{m-1}(x)$ есть общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$. Тогда, если $d(x)$ –

какой-либо наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $f'(x)$, то $d(x)$ делится на $p^{m-1}(x)$.Так как $m-1>0$, то степень многочлена $d(x)$ должна быть положительна.

2. Пусть $НОД(f(x),f'(x))$ есть многочлен положительной степени, обозначим его $d(x)$. Тогда $f(x)=d(x)\cdot q_2(x)$ и $f'(x)=d(x)\cdot q_3(x)$. Разложим $d(x)$ на неприводимые множители. Пусть $p(x)$ – один из этих множителей, то есть $d(x)=p(x)\cdot q_4(x)$. Подставим полученное равенство в выражение для $f(x)$ и $f'(x)$, получим $f(x)=p(x)\cdot q_4(x)\cdot q_2(x)$ и $f'(x)=p(x)\cdot q_4(x)\cdot q_3(x)$, следовательно $p(x)$ является неприводимым кратным множителем для $f(x)$ и $f'(x)$. Таким образом, многочлен $f(x)$ имеет неприводимые кратные множители. Теорема доказана.

## Схема выделения кратных множителей

Рассмотрим алгоритм, позволяющий отыскать неприводимые кратные множители многочлена $f(x)$.

Введем обозначения:

$X_1$ – произведение всех простых неприводимых множителей в каноническом разложении $f(x)$;

$X_2$ – произведение всех двукратных неприводимых множителей, взятых по одному;

$X_3$ – произведение всех трёхкратных неприводимых множителей, взятых по одному и т.д.

Если многочлен $f(x)$ не имеет множителей кратности $k$, то будем считать, что $X_k=1$.

**Пример 1**. $f(x)=(x-1)(x-2)(x^2+1)^2(x+1)^2(x+5)^4$

$X_1=(x-1)(x-2)$;

$X_2=(x^2+1)(x+1)$;

$X_3=1$;

$X_4=(x+5)$.

$f(x)=X_1\cdot X_2^2\cdot X_3^3\cdot X_4^4.$

Пусть дан многочлен $f(x)$. Будем считать, что кратность множителя многочлена $f(x)=4$, тогда $f(x)=c\cdot X_1\cdot X_2^2\cdot X_3^3\cdot X_4^4$. Выделим кратные множители многочлена $f(x)$.

*1 шаг*:

Найдём

$$f'(x);\ \ d_1(x) = \text{НОД}\big(f(x), f'(x)\big) = a_1 \cdot X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^3$$

$$d_1{}'(x);\ \ d_2(x) = \text{НОД}\left(d_1(x), d_1{}'(x)\right) = a_2 \cdot X_3 \cdot X_4^2$$

$$d_2{}'(x);\ \ d_3(x) = \text{НОД}\left(d_2(x), d_2{}'(x)\right) = a_3 \cdot X_4$$

$$d_3{}'(x);\ \ d_4(x) = \text{НОД}\left(d_3(x), d_3{}'(x)\right) = a_4$$

Первый шаг продолжаем до тех пор, пока в качестве НОД не получим число.

*2 шаг*:

Найдём отношения

$$e_1(x) = \frac{f(x)}{d_1(x)} = b_1 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$$

$$e_2(x) = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = b_2 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$$

$$e_3(x) = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = b_3 \cdot X_3 \cdot X_4$$

$$e_4(x) = \frac{d_3(x)}{d_4(x)} = b_4 \cdot X_4$$

*3 шаг*:

Найдём отношения

$$\frac{e_1(x)}{e_2(x)} = \text{c}_1 \cdot X_1$$

$$\frac{e_2(x)}{e_3(x)} = \text{c}_2 \cdot X_2$$

$$\frac{e_3(x)}{e_4(x)} = \text{c}_3 \cdot X_3$$

$$\frac{e_4(x)}{1} = \text{c}_4 \cdot X_4$$

Указанный алгоритм позволяет выделить кратные множители многочлена с точностью до множителя нулевой степени.

## Кратные корни многочленов

**Определение 1**. *Число $x_0$ называется **корнем многочлена f(x) кратности m**, если f(x) делится на $(x\text{-}x_0)^m$ и не делится на $(x\text{-}x_0)^{m+1}$.*

**Теорема 1**. *Число* $x_0$ *является кратным корнем многочлена* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда* $f(x_0)=f'(x_0)=0$.

**Доказательство**.

1. Пусть $x_0$ – корень многочлена $f(x)$ кратности $m>1$. Тогда двучлен $(x-x_0)$ является неприводимым множителем для многочлена $f(x)$ кратности $m$. Для производной многочлена $f'(x)$ двучлен $(x-x_0)$ будет иметь кратность $m-1>0$, тогда можно записать:

$f(x)=(x-x_0)^m\cdot q(x)$,

$f'(x)=(x-x_0)^{m-1}\, q_1(x)$

Подставляя вместо $x$ значение $x_0$, получим

$f(x_0)=(x_0-x_0)^m\cdot q(x_0)=0$,

$f'(x_0)=(x_0-x_0)^{m-1}\cdot q_1(x_0)=0$.

2. Пусть $f(x_0)=f'(x_0)=0$. Докажем, что $x_0$ будет кратным корнем. Действительно, если бы $x_0$ являлся простым корнем многочлена $f(x)$, то множитель $(x-x_0)$ не входил бы в разложение производной $f'(x_0)$, а значит $f'(x_0)\neq 0$. Значит, кратность $x_0$ как минимум равна двум. Теорема доказана.

**Теорема 2**. *Число* $x_0$ *является корнем кратности* $m$ *для многочлена* $f(x)$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0, \text{ а } f^{(m)}(x_0)\neq 0. \qquad \mathbf{(*)}$$

**Доказательство**.

1. Разложим многочлен $f(x)$ по формуле Тейлора по степеням разности $(x-x_0)$, т.е.

$$f(x)=\underbrace{f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(m-1)}(x_0)}{m-1!}(x-x_0)^{m-1}}_{r(x)}+$$

$$+[\underbrace{\frac{f^{m}(x_0)}{m!}+\ldots+\frac{f^{n}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-m}}_{q(x)}](x-x_0)^m$$

Пусть $x_0$ – корень многочлена кратности $m$, тогда $r(x)=0$, откуда $f(x_0)=f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(m-1)}(x_0)=0$. Условие (*) выполняется, поскольку $q(x)$ не делится на $(x-x_0)$, все слагаемые в $q(x)$, кроме первого, делятся на $(x-x_0)$, а значит первое слагаемое отлично от нуля => $f^{(m)}(x_0)\neq 0$.

2. Пусть выполняется условие (*). Покажем, что число $x_0$ − корень кратности $m$ многочлена $f(x)$. По разложению $f(x)$, $r(x)=0$, а $q(x)$ не делится

на $(x\text{-}x_0)$, тогда получаем $f(x)=(x\text{-}x_0)^m\cdot q(x)$, следовательно, $x_0$ – корень кратности $m$. Теорема доказана.

## Решение задач

**Задача 1**. *Над каким из полей Q, R или C приводимы многочлены*

$$a)\ f(x) = x^2 - 4x - 2$$

$$\text{б) } f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

$$\text{в) } f(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

$$\text{г) } f(x) = 3x - 6\ ?$$

На практике удобно пользоваться следующими свойствами:

1) Если $f(x)$ приводим над полем $P$ то он приводим над любым расширением этого поля. Поэтому при исследовании $f(x)$ на приводимость начинают с возможно более «узкого» поля, над которым $f(x)$ определен.

2) Если $f(x)$ неприводим над полем $P$, то он неприводим над любым его подполем.

$$\text{а) } x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \left(x - 2 - \sqrt{2}\right)\left(x - 2 + \sqrt{2}\right) \text{ приводим над } R \text{ и } C.$$

$$\text{б)} x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

$$x^2(x-1) - (x-1) = 0$$

$$(x-1)(x^2-1) = 0$$

$$(x-1)^2(x+1) = 0$$

$$f(x) \text{ приводим над } Q, R, C.$$

в) $f(x) = 3x^2 - 2x + 4$ неприводим над $Q$, $R$, но является приводимым над полем $C$, поскольку имеет два мнимых комплексно-сопряженных корня.

г) $f(x) = 3x - 6$ неприводим над Q, R, C.

**Задача 2**. *Имеет ли многочлен $f(x)=x^3-4x^2+5x-2$ кратные множители?*

Решение:

Чтобы воспользоваться теоремой 2, найдём *НОД(f(x),f'(x))*.

$$f'(x)=3x^2-8x+5.$$

1) $f(x):f'(x)$

$9f(x):f'(x)$

$r(x)=-2x+2=-2(x-1)$

$r_1(x)=x-1.$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3 | 9 | -36 | 45 | -18 |
| 8 | | 24 | -15 | |
| -5 | | | -32 | 20 |
| | | | | |
| | 3 | -4 | -2 | 2 |

2) $f'(x):r_1(x)$

$r_2(x)=0.$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 3 | -8 | 5 |
| 1 | 3 | -5 | 0 |

*НОД(f(x),f'(x))=x-1* – не является многочленом нулевой степени, следовательно, *f(x)* и *f'(x)* не взаимно простые многочлены, и *f(x)* имеет кратные множители.

**Задача 3**. *Выделить кратные множители многочлена*

$$f(x)=x^5-3x^4+4x^3-4x^2+3x-1.$$

Решение:

*1 шаг:*

$f'(x)=5x^4-12x^3+12x^2-8x+3$. Найдём НОД$(f(x); f'(x))$:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 25 | -75 | 100 | -100 | 75 | -25 |
| 12 | | 60 | -60 | 40 | -15 | |
| -12 | | | -36 | 36 | -24 | 9 |
| 8 | | | | | | |
| -3 | | | | | | |
| | 5 | -3 | 4 | -24 | 36 | -16 |

$r(x)=4x^3-24x^2+36x-16=4(x^3-6x^2+9x-4).$

$r_1(x)=x^3-6x^2+9x-4.$

$f'(x):r_1(x)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | -12 | 12 | -8 | 3 |
| 6 | | 30 | -45 | 20 | |
| -9 | | | 108 | -162 | 72 |
| 4 | | | | | |
| | 5 | 18 | 75 | -150 | 75 |

$r(x)=75x^2-150x+75=75(x^2-2x+1).$

$r_2(x)=x^2-2x+1.$

$r_1(x):r_2(x)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -6 | 9 | -4 |
| 2 | | 2 | -1 | |
| -1 | | | -8 | 4 |
| | 1 | -4 | 0 | 0 |

$r_3(x)=0.$

$НОД=x^2-2x+1=d_1(x).$

$$d_1'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$$

$$\text{НОД}(d_1(x), d_1'(x)) = x - 1 = d_2(x)$$

$r_1(x)=0.$

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1 | -2 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | 0 |

$$d_2'(x) = 1$$

$$\text{НОД}(d_2(x), d_2'(x)) = 1 = d_3(x)$$

Итак,

$d_1(x)=x^2-2x+1;\ \ d_2(x)=x-1;\ \ d_3(x)=1.$

*2 шаг:*

Находим отношения:

$$e_1 = \frac{f(x)}{d_1(x)} = x^3 - x^2 + x - 1,$$

$$e_2 = \frac{d_1(x)}{d_2(x)} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = x - 1,$$

$$e_3 = \frac{d_2(x)}{d_3(x)} = \frac{x - 1}{1} = x - 1$$

*3 шаг:*

Вычисляем отношения:

$$X_1 = \frac{e_1}{e_2} = \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1} = x^2 + 1,$$

$$X_2 = \frac{e_2}{e_3} = \frac{x - 1}{x - 1} = 1,$$

$$X_3 = \frac{e_3}{1} = \frac{x - 1}{1} = x - 1$$

Получили $f(x)=(x^2+1)(x-1)^3$ – разложение исходного многочлена в произведение неприводимых кратных множителей.

**Замечание.** Вычислить такое разложение можно другим способом, определив корни этого многочлена и их кратность:

1) над полем комплексных чисел многочлен $f(x)$ имеет ровно пять корней: $x_1=i$; $x_2=-i$; $x_3=x_4=x_5=1$, т.е. 1 – корень кратности три;

2) над полем действительных и рациональных чисел многочлен $f(x)$ имеет единственный корень $x=1$ кратности три.

**Задача 4**. *Определить кратность корня $x_0$ многочлена:*

$$f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8, \qquad x_0=2$$

Решение:

По схеме Горнера имеем:

| | 1 | -5 | 7 | -2 | 4 | -8 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 1 | -3 | 1 | 0 | 4 | 0 |
| 2 | 1 | -1 | -1 | -2 | 0 | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | | |

Дальнейшее деление не даст в остатке ноль. Таким образом, $f(x)=(x-2)^3(x^2+x+1)$, то есть $x_0=2$ − корень кратности 3.

**Задача 5**. *Определить a и b так, чтобы многочлен $f(x)= x^5+ax^2+bx+1$ имел число -2 корнем кратности не ниже 2.*

Решение:

Число -2 будет корнем кратности не ниже 2, если значения $f(x)$ и его производной $f'(x)=5x^4+2ax+b$ равны 0 при $x=-2$.

Приравнивая $f(-2)$ и $f'(-2)$ к нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4a-2b=31 \\ -4a+b=-80 \end{cases},$$

отсюда $a=\frac{129}{4}, b=49$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Приведите примеры и контрпримеры неприводимых над данным полем многочленов.

**2.** Отделить кратные множители многочлена

1) $x^6 - 6x^4 - 4x^3 + 9x^2 + 12x + 4$
2) $x^5 - 10x^4 - 20x^2 - 15x - 4$
3) $x^6 + 2x^5 + x^4 + 4x^2 + 8x + 4$
4) $x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2$

**3.** Отделить кратные множители многочленов и найти их корни:

$$x^5 - 5x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 40x + 16$$
$$2x^6 + 6x^5 + 6x^4 + x^3 - 3x^2 - 3x - 1$$
$$x^5 - 6ix^4 - 14x^3 + 16ix^2 + 9x - 2i$$

## Семестровые задания по разделу I

**1.** *Выполнить деление с остатком $f(x)$ на $g(x)$:*

*а)* $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2-5x+6$, $g(x)=x^2-3x+1$;

*б)* $f(x)=3x^3-22x^2+30x+27$, $g(x)=x^2-8x+15$;

*в)* $f(x)=3x^5+2x^4-3x^3+7x^2-5x-4$, $g(x)=x^3-2x^2+3x-7$.

**2.** *При каком условии* $x^3+px+q$ *делится нацело на* $x^2+mx-1$?

**3.** *Пользуясь схемой Горнера, найти значение многочлена $f(x)$ в точке $a$:*

*а)* $f(x)=x^5-7x^4+17x^3-19x^2+16x-12$, $a=2$;

*б)* $f(x)=4x^3+x^2$, $a=-1-i$;

*в)* $f(x)=x^3-3x+2$, $a=-2$.

**4.** *Найти НОД($f(x)$,$g(x)$) и выразить его линейно через $f(x)$ и $g(x)$, если:*

*а)* $f(x)=x^5+3x^4+x^3+x^2+3x+1$, $g(x)=x^4+2x^3+x+2$;

*б)* $f(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$, $g(x)=x^3-2x^2+x-2$;

*в)* $f(x)=x^4+2x^2-3$, $g(x)=x^3-x^2+2x-2$.

**5.** *Пользуясь алгоритмом Евклида, подобрать многочлены $u(x)$ и $v(x)$ так, чтобы $f_1(x)u(x)+f_2(x)v(x)=1$:*

*а)* $f_1(x)=3x^3-2x^2+x+2$, $f_2(x)=x^2-x+1$;

*б)* $f_1(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1$, $f_2(x)=x^2-x-1$.

**6.** *Найти НОК двух многочленов:*

*а)* $f(x)=2x^3+x-3$, $g(x)= x^2+x-2$;

*б)* $f(x)=x^4+6x^3+17x^2+24x+12$, $g(x)=x^3-2x^2-13x-10$.

**7.** *Разложить многочлен по степеням двучлена* $x-x_0$:

*а)* $f(x)=x^5+1,\ \ x+2;$

*б)* $f(x)=2x^5-5x^3-8x,\ \ x+3;$

*в)* $f(x)=x^4-3ix^3+(1-i)x^2+2x+(1+i),\ \ x-i.$

**8.** *Найти значения многочлена* $f(x)$ *и его производных при* $x=x_0$:

*а)* $f(x)=x^5-4x^3+6x^2-8x+10,\ \ x_0=2;$

*б)* $f(x)=x^4-3ix^3-4x^2+5ix-1,\ \ x_0=1+2i.$

**9.** *Чему равен показатель кратности корня* $x_0$ *многочлена* $f(x)$?

*а)* $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8,\ x_0=2;$

*б)* $f(x)=x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16,\ x_0=-2.$

**10.** *Определить* $a$ *и* $b$ *так, чтобы трёхчлен* $ax^4+bx^3+1$ *делился на* $(x-1)^2$.

**11.** *Выделить кратные множители многочлена:*

*а)* $f(x)=x^6-6x^4-4x^3+9x^2+12x+4;$

*б)* $f(x)=x^5-10x^3-20x^2-15x-4;$

*в)* $f(x)=x^6-15x^4+8x^3+51x^2-72x+27;$

*г)* $f(x)=x^7-3x^6+5x^5-7x^4+7x^3-5x^2+3x-1.$

# Раздел II. Многочлены от нескольких переменных

## Практическое занятие №6
## Степень многочлена от нескольких переменных. Лексикографическое упорядочение членов многочлена.

## Теоретический материал

### Кратное трансцендентное расширение *$K[x_1, x_2, ..., x_n]$* области целостности *K*

Рассмотрим простое трансцендентное расширение области целостности $K[x_1]$. Построим простое трансцендентное расширение $K[x_1]$ с помощью буквы $x_2$, получим расширение $K[x_1,x_2]$, которое по отношению к $K$ будет *кратным трансцендентным расширением*. Используя такой алгоритм $n$ раз, мы получим *кратное трансцендентное расширение* $K[x_1,x_2,...x_n]$ области целостности К.

В дальнейшем под областью целостности $K$ будем рассматривать область целых чисел $Z$. Тогда любой элемент кратного трансцендентного расширения представляет собой сумму $\sum a\, x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, где $a \in K$, а $k_1$, $k_2$, ..., $k_n$ – целые неотрицательные числа, $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ – трансцендентные элементы.

Любой элемент кратного трансцендентного расширения назовём ***многочленом от нескольких переменных*** и будем обозначать его $f(x_1, ..., x_n)$.

Чтобы сложить два многочлена от нескольких переменных, достаточно выполнить приведения подобных членов этих многочленов, имеющих равные показатели при $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. Чтобы умножить многочлены от нескольких переменных надо умножить каждый член одного из них на каждый член другого, а затем выполнить приведение подобных членов.

Мы определили операции сложения и умножения на множестве $K[x_1, x_2, ..., x_n]$. Можно доказать, что полученная алгебра является областью целостности.

Для многочленов от нескольких переменных можно построить теорию делимости, обобщающую теорию делимости многочленов от одной переменной. То есть можно вести понятие делимого, делителя, частного, остатка от деления, НОД, НОК многочленов, а также понятия неприводимого и приводимого многочлена.

**Теорема.** *Любой многочлен от нескольких переменных раскладывается в произведение неприводимых множителей, которое определяется однозначно с точностью до множителя нулевой степени.*

## Степень многочлена от нескольких переменных

Пусть дан произвольный многочлен от нескольких переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$. Если в его записи нет подобных членов, такую запись называют *нормальной*.

**Определение 1.** ***Степенью одночлена*** $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}$ *называется сумма* $k_1+k_2+\cdots+k_n$.

**Определение 2.** ***Степенью многочлена от нескольких переменных*** *называется наибольшая из степеней его одночленов в нормальной записи.*

Степень многочлена от нескольких переменных обозначают:

$$ст.f \text{ или } deg\, f.$$

Нулевому многочлену не приписывается какая-либо степень.

**Пример 1.** $f=3x_1x_2x_3^3-x_1^2x_2+x_2x_3-5$

По определению $ст.f=5$.

**Определение 3.** *Многочлен называется* ***однородным степени m (или формой)****, если все его ненулевые слагаемые имеют одну и ту же степень m.*

**Пример 2.**

$f=x_1^2+x_1x_2$ − форма ст.2;

$g=x_1+2x_2-5x_3$ − форма ст.1.

*Линейная форма* (ст.1) встречается в линейном программировании, *квадратичная* форма (ст. 2) – в геометрии.

**Теорема 1.** *Степень суммы двух многочленов не превосходит наибольшей из степеней слагаемых. Степень произведения двух многочленов равна сумме степеней сомножителей.*

**Пример 3.**

*$f=x_1^2x_2 - 3x_2^3x_1 - 5$,  $g=-x_1^2x_2+3x_2^3x_1 - 4x_1x_2-x_2+6$.*

*Ст. $f=4$, ст. $g=4$.*

*$f+g=-4x_1x_2 - x_2+1$*

*Ст. $(f+g)=2\leq 4$.*

**Пример 4.**

*$f=x_1^2x_2 - x_2$,  $g=x_1^3 - x_1x_2$.*

*Ст. $f=3$, ст. $g=3$.*

*$f\cdot g=x_1^5x_2 - x_1^3x_2 - x_1^3x_2^2+x_1x_2^2$*

*Ст. $(f\cdot g)=3+3=6$.*

## Словарное упорядочение членов многочлена

Рассмотрим два произвольных слагаемых многочлена от нескольких переменных:

$U=ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$,

$V=bx_1^{l_1}x_2^{l_2}\dots x_n^{l_n}$.

**Определение 1.** *Слагаемое U считается* ***выше*** *слагаемого V, если выполняется одно из условий:*

*либо* $k_1 > l_1$,

*либо* $k_1 = l_1$, *но* $k_2 > l_2$,

*либо* $k_1 = l_1$, $k_2 = l_2$, *но* $k_3 > l_3$,

… ,

*либо* $k_n > l_n$.

Если слагаемое *U* выше слагаемого *V*, этот факт обозначают $U\succ V$. Отношение «выше» является отношением строгого линейного порядка на множестве слагаемых многочленов.

**Пример 1.** Пусть $U= 5x_1x_2x_3^2$ ;  $V= 2x_1x_2^2x_3^2$ .

По определению *V* выше *U*.

Будем записывать многочлен от нескольких переменных, начиная с его высшего члена, упорядочивая его слагаемые по отношению «$\succ$». Полученная таким образом запись называется *словарной (лексикографической)*.

**Пример 2.** $f = x_2^4+x_1x_2x_3+3x_1x_2-2x_2x_3 =$

$= x_1x_2x_3+3x_1x_2+x_2^4-2x_2x_3$

**Теорема 1.** *Высший член произведения многочленов от нескольких переменных равен произведению высших членов сомножителей.*

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Упорядочите многочлены лексикографически и укажите их старшие члены:

1) $273x_1x_2^3 - 4x_1^3x_2$
2) $x_1x_3 + x_2x_3 - x_1x_2 - x_1^2$
3) $x_1x_3 + x_1x_2x_3 - x_1x_2x_3^2 - x_1x_2$

**2.** Приведите пример трёхчлена, у которого высший член является первым, а старший член – последним.

**3.** Приведите примеры многочленов от трёх переменных, у которых каждый член имеет одну и ту же степень, запишите их лексикографически.

**4.** Выпишите все одночлены от трёх переменных четвёртой степени с коэффициентом 1 и составьте из них лексикографическую запись многочлена.

# Практическое занятие №7
# Симметрические многочлены

## Теоретический материал

## Симметрические многочлены

Пусть дан произвольный многочлен $f$ от нескольких переменных. Поменяем в нём индекс $i$ на индекс $j$. мы получим другой многочлен. Если в результате такой подстановки многочлен не изменится, его называют симметрическим.

**Определение 1.** *Многочлен f от нескольких переменных называется* ***симметрическим многочленом****, если для любой подстановки* $\tau \in S_n$ *(множество всех подстановок) выполняется равенство:* $f(x_1,\dots,x_n)=f(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(n)})$.

**Пример 1.**

$f=x_1+x_2=x_2+x_1 \Rightarrow f$ – симметрический многочлен.

$f=x_1+2x_2 \neq 2x_1+x_2 \Rightarrow f$ – не симметрический многочлен.

$f=x_1^2+\dots+x_n^2+x_1+\dots+x_n$ переходит в себя при любой подстановке элементов, следовательно, многочлен симметричен.

Можно доказать, что симметрические многочлены образуют подкольцо кольца многочленов от нескольких переменных.

**Определение 2.** ***Элементарными симметрическими многочленами*** *от* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *называют многочлены*

$\delta_1=x_1+x_2+\dots+x_n$

$\delta_2=x_1x_2+x_1x_3+\dots+x_{n-1}x_n$

$\delta_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_{n-2}x_{n-1}x_n$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$\delta_n=x_1x_2\dots x_n$

Заметим, что если производить сложение и умножение элементарных симметрических многочленов, в результате получим симметрический многочлен. На следующем примере покажем, что его можно записать в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.

**Пример 2.** *Выразить многочлен* $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 5x_1x_2x_3 \in Q[x_1, x_2\ x_3]$ *через элементарные симметрические многочлены.*

Решение:

Высший член $x_1^3$, ему соответствует система показателей 3 0 0 ($x_1^3x_2^0x_3^0$). Такой же высший член имеет многочлен $\delta_1^{3-0}\delta_2^{0-0}\delta_3^0 = \delta_1^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_3 + 3x_1x_3^2 + 3x_2^2x_3 + 3x_2x_3^2 + 6x_1x_2x_3$.

Найдём разность $f - \delta_1^3 = -3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 - 3x_1^2x_3 - 3x_1x_3^2 - 3x_2^2x_3 - 3x_2x_3^2 - x_1x_2x_3$ .

Высший член полученного многочлена $-3x_1^2x_2$, ему соответствует система показателей 2 1 0. Такой же высший член у многочлена $-3\delta_1^{2-1}\delta_2^{1-0}\delta_3^0 = -3\delta_1\delta_2 = -3(x_1 + x_2 + x_3) * (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -3x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_2^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2x_3^2) + 3x_1x_2x_3$.

Вычтем из многочлена $f - \delta_1^3$ многочлен $-3\delta_1\delta_2$:

$$f - \delta_1^3 + 3\delta_1\delta_2 = 8x_1x_2x_3 = 8\delta_3$$

Следовательно,

$f(x_1, x_2, x_3) = \delta_1^3 - 3\ \delta_1\delta_2 + 8\delta_3$ – искомое выражение.

## Основная теорема о симметрических многочленах

**Лемма 1.** *Если* $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$ **(1)** *– высший член симметрического многочлена* $f$ *от* $n$ *переменных, то* $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$.

**Доказательство.** По условию $f$ – симметрический многочлен, поэтому, переставляя индексы в высший член (1), мы получим обязательно слагаемое, содержащееся в *f*. Переставим вначале первый и второй индексы. Получим:

$$ax_2^{k_1}x_1^{k_2}x_3^{k_3}\dots x_n^{k_n} \quad \textbf{(2)}.$$

Из этой формулы следует, что (1) выше (2).

Переставим теперь в высшем члене (1) второй и третий индексы, получим:

$$ax_1^{k_1}x_3^{k_2}x_2^{k_3}\dots x_n^{k_n} \quad \textbf{(3)}.$$

Из этой записи следует, что (1) выше (3). Тогда мы получили: $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \kappa_3$. Проводя далее аналогичные вычисления, приходим к последовательности $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$.

**Лемма 2.** *Высшие члены многочлена* $f$ *и* $\varphi = a\delta_1^{k_1-k_2}\delta_2^{k_2-k_3}\dots\delta_n^{k_n}$ *совпадают.*

**Доказательство.** Найдём высший член многочлена φ. Так как φ является произвольным симметрическим многочленом, то его высший член находится как произведение высших членов сомножителей.

Высший член $\delta_1^{k_1-k_2} = x_1^{k_1-k_2}$

Высший член $\delta_2^{k_2-k_3} = (x_1x_2)^{k_2-k_3}$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Высший член $\delta_n^{k_n} = (x_1x_2\dots x_n)^{k_n}$.

Перемножив, получим:

Высший член

$$\varphi = ax_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3}\dots(x_1x_2\dots x_n)^{k_n} = ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n} = (1).$$

**Определение 1.** *Многочлен* $f$ *считается* ***выше*** *многочлена* $g$, *если высший член* $f$ *выше высшего члена* $g$.

**Определение 2.** *Последовательность многочленов* $\varphi_1 \succ \varphi_2 \succ \dots$ *называется* ***убывающей цепочкой многочленов***.

**Лемма 3.** *Убывающая цепочка симметрических многочленов не может быть бесконечной.*

**Доказательство.** Рассмотрим убывающую цепочку симметрических многочленов $\varphi_1 \succ \varphi_2 \succ \dots$. Рассмотрим высший член первого многочлена $\varphi_1$: $U_1 = a_1x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. Рассмотрим теперь высший член следующего многочлена $\varphi_i$: $U_i = a_ix_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_n^{m_n}$. Так как $\varphi_1$ выше $\varphi_i$, следовательно, $U_1$ выше $U_i$. Выясним, сколько может быть таких $\varphi_i$. Очевидно, их может быть столько, сколько может быть убывающих высших членов $U_i$: $k_1 \geq m_1, \dots, k_n \geq m_n$ (∗). Каждому высшему члену $U_i$ соответствует упорядоченный набор $U_i(m_1,\dots,m_n)$, который можно называть вектором. Таких конечных векторов, для которых выполняется условие (∗), будет конечное число, так как координаты этих векторов – натуральные числа, и в самом простейшем случае они ограничиваются нулями. Убывающая цепочка чисел обязательно будет конечной.

**Основная теорема о симметрических многочленах.** *Всякий симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный симметрический многочлен $f$. Выполним следующую последовательность действий (алгоритм):

-вычислим высший член многочлена $f$: $a_1 x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ .

-для него построим многочлен φ с таким же высшим членом (его существование доказано в лемме 2)

-вычислим $f_1 = f - \varphi$.

Так как высшие члены при вычитании пропадут (лемма 2), то $f$ выше $f_1$.

С многочленом $f_1$ проделываем те же этапы. Тогда мы получим многочлен $f_2$ такой, что $f_1$ выше $f_2$. К $f_2$ применяем тот же алгоритм, то есть получим убывающую цепочку многочленов, а по лемме 3 этот процесс обязательно конечен, поэтому на некотором шаге получим: $f_к - \varphi_к = 0$. Значит, мы можем найти представление для многочлена $f$:

$$f = f_1 + \varphi = \varphi + \varphi_1 + f_2 = \dots = \varphi + \varphi_1 + \dots + \varphi_к$$

## Решение задач

Рассмотрим менее трудоёмкий алгоритм, позволяющий выразить данный многочлен через элементарные симметрические многочлены.

**Задача 1.** $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 5x_1x_2x_3$ .

Решение:

Имеем однородный симметрический многочлен, так как каждое слагаемое имеет показатель 3. Составим таблицу:

| *Высшие члены* | *Система показателей высших членов* | *Комбинация основных симметрических многочленов* | |
|---|---|---|---|
| $1x_1^3$ | 3 0 0 | $\delta_1^{3-0}\ \delta_2^{0-0}\ \delta_3^0$ | $1\delta_1^3$ |
| $Ax_1^2x_2$ | 2 1 0 | $\delta_1^{2-1}\ \delta_2^{1-0}\ \delta_3^0$ | $A\delta_1\delta_2$ |
| $Bx_1x_2x_3$ | 1 1 1 | $\delta_1^{1-1}\ \delta_2^{1-1}\ \delta_3^1$ | $B\delta_3^1$ |

Таким образом, $f(x_1, x_2, x_3) = \delta_1^3 + A\delta_1\delta_2 + B\delta_3$

Найдем значение A и B, используя таблицу, учитывая, что

$\delta_1 = x_1 + x_2 + x_3$ ,

$\delta_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$,

$\delta_3 = x_1x_2x_3$,

и придавая $x_1$, $x_2$, $x_3$ произвольные значения.

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 1 | 8 |

На основе этой таблицы получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 = 2^3 + 2A + 0 \cdot B \\ 8 = 3^3 + 3 \cdot 3A + 1 \cdot B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = 8 + 2A \\ 8 = 27 + 9A + B \end{cases}$$

Решив данную систему, получаем $A = -3, B = 8$.

Подставим эти значения в $f(x, x_2, x_3)$:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 8\delta_3.$$

**Замечание 1.** Система показателей $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ каждого высшего члена должна удовлетворять условию $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \kappa_3$, в то же время сумма $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 = ст. f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

**Замечание 2.** Если симметрический многочлен неоднородный, то его представляют как сумму однородных многочленов, а затем по отдельности выражают через основные симметрические многочлены каждый однородный многочлен.

**Задача 2.** *Вычислить сумму квадратов корней уравнения, не находя их:* $x^3 + 2x - 3 = 0$.

Решение:

Пусть $x_1$, $x_2$, $x_3$ – корни данного уравнения. Нам надо найти значение $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Предварительно $f(x_1, x_2, x_3)$ запишем через простейшие симметрические многочлены: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^3$

| | | |
|---|---|---|
| $1x_1^2$ | 2 0 0 | $1\delta_1^2$ |
| $Ax_1x_2$ | 1 1 0 | $A\delta_2$ |

$f(x_1, x_2, x_3) = \delta_1^2 + A\delta_2$.

Найдем значение А, используя таблицу

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\delta_1$ | $\delta_2$ | $\delta_3$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 2 |

$$2 = 2^2 + 1 \cdot A$$
$$A = -2$$

$f(x_1, x_2, x_3) = \delta_1^2 - 2\delta_2$.

Основываясь на теореме Виета, будем иметь:

$\delta_1 = -a = 0$, где $a$ – коэффициент при $x^2$ в уравнении $x^3 + 2x - 3 = 0$,

$\delta_2 = b = 2$, где $b$ – коэффициент при $x$ в этом уравнении.

Тогда значение $f(x_1, x_2, x_3) = 0^2 - 2 \cdot 2 = -4$.

Ответ: сумма квадратов корней уравнения равна –4.

**Задача 3.** Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – корни уравнения $2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$. От корней данного уравнения вычислить значения симметрического многочлена

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1 - x_2)^2 + (x_2^2 + x_3^2)(x_2 - x_3)^2 + (x_1^2 + x_3^2)(x_1 - x_3)^2$$

Решение:

Многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ однородный четвёртой степени и представлен в виде суммы трёх слагаемых. Высший член первого слагаемого $x_1^4$, высший член второго слагаемого $x_2^4$, высший член третьего слагаемого $x_1^4$. Так как высший член первого слагаемого равен высшему члену третьего, то высший член многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$ равен сумме высших членов первого и третьего слагаемых, т.е. $2x_1^4$.

Найдём все наборы неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, k_3$, удовлетворяющих условиям: $k_1 + k_2 + k_3 = 4, k_1 \geq k_2 \geq k_3, k_1 \leq 4$. Эти наборы вместе с набором показателей высшего члена впишем в таблицу:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 0 | $\sigma_1^4$ |
| 3 | 1 | 0 | $\sigma_1^2\sigma_2$ |
| 2 | 2 | 0 | $\sigma_2^2$ |
| 2 | 1 | 1 | $\sigma_1\, \sigma_3$ |

Справа указаны многочлены, высшие члены которых $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2}\sigma_3^{l_3}$ имеют показатели $l_1 = k_1 - k_2,\ l_2 = k_2 - k_3,\ l_3 = k_3$. Тогда многочлен $f(x_1, x_2, x_3)$ можно представить через элементарные симметрические многочлены в виде:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2\sigma_1^4 + A\sigma_1^2\sigma_2 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1\,\sigma_3$$

Для определения $A, B, C$ будем придавать $x_1, x_2, x_3$ различные значения и вычислим

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\sigma_2 = x_1\,x_2 + x_1\,x_3 + x_2x_3$$
$$\sigma_3 = x_1\,x_2x_3$$

Результаты запишем в таблицу:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $f$ | *уравнения* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *1* | *1* | *0* | *2* | *1* | *0* | *2* | $2 \cdot 2^4 + A \cdot 2^2 \cdot 1 + B \cdot 1^2 + 0 = 2$ |
| *1* | *-1* | *0* | *0* | *-1* | *0* | *10* | $(-1)^2 \cdot B = 10$ |
| *1* | *1* | *1* | *3* | *3* | *1* | *0* | $2 \cdot 3^4 + A \cdot 3^2 \cdot 3 + B \cdot 3^2 + C \cdot 3 \cdot 1 = 0$ |

Решая систему

$$\begin{cases} 4A + B = 2 - 32, \\ B = 10 \\ 27A + 9B + 3C = -162 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} A = -10, \\ B = 10, \\ C = 6 \end{cases}$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 2\sigma_1^4 - 10\sigma_1^2\sigma_2 + 10\sigma_2^2 + 6\sigma_1\,\sigma_3$$

по формулам Виета имеем:

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{a_1}{a_0} = -1$$
$$\sigma_2 = \alpha_1\,\alpha_2 + \alpha_1\,\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{a_2}{a_0} = \frac{1}{2}$$
$$\sigma_3 = \alpha_1\,\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0} = \frac{1}{2}$$

где $a_0, a_1,\ a_2,\ a_3$ – коэффициенты исходного уравнения $2x^3 + 2x^2 + x - 1 = 0$.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Вычислить сумму кубов корней уравнений:

$$x^4 + 3x + 3 = 0$$
$$3x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$$

**2.** Найти сумму четвёртых степеней корней уравнений:

$$-2x^4 - 2x^3 + 4x - 3 = 0$$

$$2x^3 - 2x^2 + 4x + 6 = 0$$

$$x^4 + x + 1 = 0$$

**3.** Найти сумму пятых степеней корней многочлена

$$x^6 + 2x^5 - 5x^4 - 17x^3 - 20x^2 - 12x - 2$$

**4.** Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты (кубы) корней данного многочлена:

1) $x^2 - 3x + 5$
2) $x^3 + 2x - 1$

**5.** Составьте симметрический многочлен от трёх переменных наименьшей степени, содержащий данное слагаемое, и представьте его лексикографической записью:

1) $3x_1x_2^3x_3^2$
2) $x_1x_3^2$
3) $x_1x_2x_3$
4) $x_3^3$

**6.** Расположите в порядке убывания по высоте все элементарные симметрические многочлены от четырёх переменных.

**7.** Выразите через элементарные симметрические многочлены степенные суммы

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$
2) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$
3) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$
4) $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$

**8.** Найдите значение данного симметрического многочлена от корней многочлена $h(x)$:

1) $x_1x_2^3 + x_1x_3^3 + x_2x_3^3 + x_1^3x_2 + x_1^3x_3 + x_2^3x_3$

$$h(x) = 3x^3 - 6x^2 + 3x + 6$$

$$2)\quad (3x_1 - x_2 - x_3)\cdot(3x_2 - x_1 - x_3)\cdot(3x_3 - x_1 - x_2)$$
$$h(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 3$$

**9.** Выразить многочлены через основные симметрические многочлены:

1) $2x_1^3 + 2x_2^3 + 2x_3^3 - 3x_1x_2x_3 + (x_1+x_2+x_3)$
2) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2$
3) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_1^2x_2^2 - 2x_1^2x_3^2 - 2x_2^2x_3^2$
4) $(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$
5) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$

# Практическое занятие №8
# Результант двух многочленов и его применение

## Теоретический материал

### Результант двух многочленов и его применение

Пусть даны два многочлена от одной переменной:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$
$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

**Определение 1.** ***Результантом*** *двух многочленов* $f$ *и* $g$ *называется определитель порядка* $n+m$*, составленный следующим образом:*

$$R(f,g) =$$

$$\begin{vmatrix}
a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & & a_1 & a_0 & 0 & 0 & & 0 \\
0 & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & a_n & & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 0 \\
 & & & & \dots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & b_{m-1} & & b_1 & b_0 & 0 & 0 & & 0 \\
0 & b_m & b_{m-1} & \dots & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & b_m & & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & 0 \\
 & & & & \dots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & b_0
\end{vmatrix}$$

**Замечание.** *Результат можно вычислить также по формуле*

$$R(f,g) = b_m^n * f(B_1) * f(B_2) * \dots * f(B_m), \quad (1)$$

где $b_m -$ старший коэффициент $g(x)$, $n$ = *ст.*$f(x)$, $B_1, \dots, B_m$ – корни $g(x)$.

Заметим в формуле (1), что если хотя бы одно из чисел $B_1, B_2, \dots, B_m$ является одновременно корнем $f(x)$, то $R(f,g) = 0$.

Поэтому справедлива следующая

**Теорема 1.** *Многочлены* $f$ *и* $g$ *имеют общий корень тогда и только тогда, когда их результат равен 0.*

## Решение задач

**Задача 1.** *Вычислить результант многочленов:*

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$
$$g(x) = 2x^2 + x - 1.$$

Решение:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$= -9 + 15 - 24 = -8.$

Вычислим результант иным способом:

$B_1 = \frac{1}{2}, B_2 = -1 \; 2x^2 + x - 1 = 0$

$$R(f,g) = 2^2 * f\left(\frac{1}{2}\right) * f(-1) = 4 * \left(\frac{3}{4} - 2 + 1\right) * (3 + 4 + 1)$$

$$= 4 * \left(-\frac{1}{4}\right) * 8 = -8$$

$$D = 1 + 4 * 2 = 9$$

$$x_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}; \; x_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

**Задача 2.** *Имеют ли многочлены*

$$f(x) = x^2 - x + 1, \qquad g(x) = x^2 - 1$$

*общий корень?*

Решение:

$$R(f,g) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 1 = 3 \neq 0$$

Вывод: у данных многочленов нет общих корней. По теореме Безу у них нет и общих делителей, следовательно, эти многочлены взаимно простые.

**Задача 3.** *При каких значениях $\lambda$ полиномы*

$$f(x) = x^3 - \lambda x^2 + \lambda x - 1; \; g(x) = x^2 + \lambda$$

*имеют общие корни?*

Решение:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \lambda & -1 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\lambda & \lambda & -1 \\ \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda^2+1 & \lambda^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda \\ \lambda & \lambda^2+1 & \lambda^2 \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 1 + \lambda^4 + \lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 =$$

$$= (\lambda^2 - 1)^2.$$

$(\lambda^2 - 1)^2 = 0.$

$\lambda = \pm 1.$

При $\lambda$=1 $f(x) = x^2 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1);\ g(x) = x^2 + 1.$

Общим корнем является число $\pm i$ .

При $\lambda$=-1 $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)(x^2-1);$

$$g(x) = x^2 - 1$$

Общие корни $\pm 1$.

**Задача 4.** *Являются ли взаимно простыми многочлены:*

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$g(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2?$$

Решение:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Поскольку результант равен нулю, многочлены $f$ и $g$ имеют общие корни, следовательно, они не являются взаимно простыми.

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Найти результант данных многочленов:

1) $x^4 - x^2 + x + 1,\quad x^2 + x + 1$

2) $x^4 - x^2 + x + 1,\quad x^3 + x + 1$

3) $3x^3 - 2x^2 + x + 2,\quad x^2 - 2x + 3$

**2.** При каком $\lambda$ многочлены

$$f(x) = 4x^3 - \lambda x + 1 \text{ и } g(x) = 2x^2 - \lambda x + 1$$

имеют общий корень?

**3.** Используя результант, определить, при каких значениях параметра многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень:

1) $f(x) = x^2 - 3x + k,\ g(x) = x^2 - 4x + k + 1$
2) $f(x) = x^2 + kx - 5,\ g(x) = x^2 + (k+2)x - 7$
3) $f(x) = x^2 + 3x - k,\ g(x) = x^2 - 2kx + 3$

**3.** Найдите значения $\lambda$, при которых данный многочлен имеет кратные корни

1) $x^3 + \lambda x - 2$
2) $x^3 - 5x^2 - \lambda x + \lambda$
3) $y^4 - (\lambda + 3)y^2 - 2\lambda y - \lambda$

**5.** Найдите дискриминант многочлена

1) $x^3 + 2x^2 - x - 1$
2) $x^3 - x^2 + 3x - 2$
3) $x^4 - x^3 - x + 1$
4) $x^4 + 3x^3 - 4x - 1$

## Практическое занятие №9

## Исключение переменной из системы двух уравнений с двумя переменными. Решение иррациональных уравнений

### Теоретический материал

### Исключение переменной из системы двух уравнений с двумя переменными

Результант применяется при решении систем двух уравнений с двумя неизвестными вида $\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$.

Представим левые части уравнений системы в виде многочленов одной из переменных, например, $x$. В этом случае коэффициенты многочленов будут зависеть от y:

$f(x,y) = a_n(y)x^n + a_{n-1}(y)x^{n-1} + \cdots + a_1(y)x + a_0(y) = 0$

$g(x,y) = b_m(y)x^m + b_{m-1}(y)x^{m-1} + \cdots + b_1(y)x + b_0(y) = 0$

Составим и вычислим результант $R(f,g)$, это будет функция от $y$. Поскольку мы ищем общие корни многочленов $f$ и $g$, приравняем $R(f,g)$ к нулю. Найдём таким образом нули функции $y_1, y_2, \dots, y_k$. Каждое полученное значение $y$ подставим в исходную систему уравнений и найдем для него соответствующие значение $x$. Тем самым получим пары $(x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, k$, образующие множество решений исходной системы.

### Решение задач

**Задача 1.** *Решить систему уравнений:*

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - x - y = 0 \\ x^2 + xy + y^2 + x = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2 + (2y-1) * x + (y^2 - y) = 0 \\ x^2 + (y+1) * x + y^2 = 0 \end{cases}$$

Результант:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2y-1 & y^2-y & 0 \\ 0 & 1 & 2y-1 & y^2-y \\ 1 & y+1 & y^2 & 0 \\ 0 & 1 & y+1 & y^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2y-1 & y^2-y & 0 \\ 0 & 1 & 2y-1 & y^2-y \\ 0 & -y-2 & y & 0 \\ 0 & 1 & y+1 & y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2y-1 & y^2-y \\ -y+2 & y & 0 \\ 1 & y+1 & y^2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2y-1 & y^2-y \\ -y+2 & y & 0 \\ 0 & -y+2 & y \end{vmatrix} == y^2 + (2-y)^2 * (y^2-y) - y(2-y) * (2y-1) = 0 .$$

$y^2 + (4 - 4y + y^2)(y^2 - y) - y(4y - 2 - 2y^2 + y) = 0.$
$y^2 + 4y^2 - 4y - 4y^3 + 4y^2\, y^4 - y^3 - 4y^2 + 2y + 2y^3 - y^2 = 0.$
$y^4 - 3y^3 + 4y^2 - 2y = 0.$
$y(y^3 - 3y^2 + 4y - 2) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y^3 - 3y^2 + 4y - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$y = 1$ – корень второго уравнения.

$$(y-1)(y^2 - 2y + 2) = 0$$

Итак, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ – подставим в исходную систему.

При $y = 0$

$\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{array}{c} 2x^2 = 0 \\ x = 0 \end{array}$ получим решение $(0, 0)$

При $y = 1$

$\begin{cases} x^2 + 2x + 1 - x - 1 = 0 \\ x^2 + x + 1 + x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+1) = 0 \\ (x+1)^2 = 0 \end{cases}$

$$x = -1$$

Ответ: $(0, 0), (-1, 1)$

**Задача 2.** *Исключить x из системы уравнений:*

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ yx^2 + y^2x - 6 = 0 \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} x^2 - yx + (y^2 - 3) = 0 \\ yx^2 + y^2x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$R=\begin{vmatrix}1 & -y & y^2-3 & 0\\ 0 & 1 & -y & y^2-3\\ y & y^2 & -6 & 0\\ 0 & y & y^2 & -6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -y & y^2-3 & 0\\ 0 & 1 & -y & y^2-3\\ 0 & 2y^2 & -y^3+3y-6 & 0\\ 0 & y & y^2 & -6\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -y & y^2-3\\ 2y^2 & -y^3+3y-6 & 0\\ y & y^2 & -6\end{vmatrix}$$

$$= -6(-y^3+3y-6)+2y^4*(y^2-3)$$

$$-y(y^2-3)(-y^3+3y-6)-12y^2=$$

$$=3y^6-12y^4+9y^2-36y+36=0$$

Ответ: $y^6-4y^4+3y^2-12y+12=0.$

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Используя результант, исключить $x$ из системы уравнений:

1) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=1,\\ x^2y+xy+y^2=3\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=3,\\ x^2y-xy^2=6\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2+2xy+4y^2=3,\\ x^2y-2xy^2=3\end{cases}$

**2.** Используя результант, исключить $y$ из системы уравнений:

1) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=3,\\ x^2y+xy^2=6\end{cases}$

2) $\begin{cases}x^2+xy-y^2=2,\\ x^2y-xy^2=3\end{cases}$

3) $\begin{cases}x^2-xy+y^2=1,\\ x^2y+xy+y^2=3\end{cases}$

**3.** Используя результант, решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2+x+y=0,\\ x^2+xy+y^2-x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2-x-y=0,\\ x^2+xy+y^2+x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 7xy + 4x^2 + 13x - 2y - 3 = 0, \\ y^2 - 14xy + 9x^2 + 28x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$$

**4.** Решите иррациональные уравнения:

$$x + \sqrt{25 - x^2} + x\sqrt{25 - x^2} = 19$$

$$12\left(\sqrt{1 - x^2} + x\right) - 35x\sqrt{1 - x^2} = 0$$

$$(x^2 - 2x + 4)\sqrt{9 + 2x - x^2} + (9 + 2x - x^2)\sqrt{x^2 - 2x + 4} = 30$$

## Семестровые задания по разделу II

**1.** *Выразить симметрический многочлен через основные симметрические многочлены.*

*а)* $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$

*б)* $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^4+x_2^4+x_3^4-2x_1^2x_2^2-2x_2^2x_3^2-2x_3^2x_1^2$

*в)* $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2+x_2^2)(x_1^2+x_3^2)(x_2^2+x_3^2)$

*г)* $f(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2-x_3)(2x_2-x_1-x_3)(2x_3-x_1-x_2)$

*д)* $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^3+x_2^3+x_3^3-2x_1^2x_2^2-2x_1^2x_3^2-2x_2^2x_3^2$

**2.** *Дан многочлен* $f(x)=x^3+2x-1$. *Составить многочлен, корнями которого являются квадраты корней многочлена* $f(x)$.

**3.** *Вычислить* $x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3+x_1^3x_3+x_1x_3^3$ *от корней уравнения* $x^3-x^2-4x+1=0$ *(корни не находить).*

**4.** *Используя формулы Виета, построить многочлен по его корням:*

$$x_1=\sqrt{3},\ x_2=-\sqrt{3},\ x_3=3,\ x_4=-2.$$

**5.** *Исключить x из системы уравнений:*

$$\begin{cases} x^3-xy-y^3+y=0 \\ x^2+x-y^2=1 \end{cases}$$

**5.** *Решить системы симметрических уравнений:*

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{5}{6} \\ \dfrac{1}{x^2y}+\dfrac{1}{xy^2}=30 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^3y^3}+\dfrac{1}{y^3}=17 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{y}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}=18 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^4}+\dfrac{1}{y^2}=92 \\ xy=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

## Литература


1. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов. − М.: Просвещение, 1980. — 176 с.

2. Винберг Э.Б. Симметрия многочленов. − М.: МЦНМО, 2001. − 24 с.

3. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. − М.: Книга по требованию, 2013. – 560с.

4. Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. − СПб.: Лань, 2007. – 560с.

5. Ларин С.В. Алгебра: многочлены: учеб. пособие для СПО. – М.: Изд-во Юрайт, 2018. – 136с.

6. Мишина А.П., Проскуряков И.В. Высшая алгебра. − М., 1962. – 380с.

7. Окунев Л.Я. Высшая алгебра. – М., Лань, 2009. – 336с.

8. Прасолов В.В. Многочлены. − М.: МЦНМО, 2003. − 336 с.

9. Солодовников А.С, Родина М.А. Задачник-практикум по алгебре. − М.: Просвещение, 1985. − 127 с.

10. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. − М.: Наука, 1979. – 416с.

11. Табачников С.Л. Многочлены. − М: ФАЗИС, 2000. − 200 с.

12. Фаддеев Д.К. Лекции по алгебре. − СПб.: Лань, 2007.

13. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. − СПб.: Лань, 2008.

14. Числа и многочлены / Сост. А.А. Егоров. − М., Бюро Квантум, 2000. − 128 с.