



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.О.04.05 Теория случайных процессов**

**Направление подготовки:** 01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Направленность (профиль):** Компьютерное моделирование экономических процессов

**Квалификация (степень):** бакалавр

**Форма обучения:** очная,

**Институт:** математики, естествознания и техники

**Кафедра:** математики и методики ее преподавания

	очная форма	очно-заочная форма	заочная форма
Курс	4		
Семестр/триместр	7		

Лекции	24		
Лабораторные занятия	–		
Практические (семинарские) занятия	12		
Консультации	2		
Форма(ы) промежуточной аттестации	Экзамен - 0,3		
Контроль	36		
Иные формы работы	–		
Самостоятельная работа	105,7		

**Всего часов: 180**

**Трудоемкость: 5 зачетных единиц.**

Разработчик рабочей программы:

доктор педагогических наук, доцент С.Н. Дворяткина

## I. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

**Цель изучения дисциплины:** профессиональная подготовка в области построения и анализа стохастических моделей, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего применения в экономической сфере.

**Задачи изучения дисциплины:**

- 1) ознакомление с основными моделями случайных процессов;
- 2) выработка умений и навыков строить стохастические модели реальных явлений;
- 3) ознакомление с основными методами теории случайных процессов;
- 4) рассмотрение возможных экономических приложений и основных классических задач, решаемых в истории науки.

**Место дисциплины в структуре ОПОП:** реализуется в рамках обязательной части блока Б1. Дисциплины (модули).

**Планируемые результаты обучения по дисциплине:**

Код компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-1	<b>Знать:</b> - факты, концепции, принципы теорий, связанные с прикладной математикой и информатикой;	<b>Знает:</b> - определения и свойства основных объектов изучения теории случайных процессов; - формулировки наиболее важных утверждений, методы их доказательства, возможные сферы их приложений.
	<b>Уметь:</b> - разрабатывать алгоритмы, вычислительные модели и модели данных для решения научно-исследовательских задач;	<b>Умеет:</b> - решать обобщенные и практико-ориентированные задачи вычислительного и теоретического характера методами случайных процессов в области экономики; - устанавливать взаимосвязи между вводимыми понятиями данной дисциплины со смежными понятиями теории вероятностей, алгеброй, дифференциальными уравнениями; - доказывать излагавшиеся утверждения и родственные им новые.
	<b>Владеть:</b> - навыками применения математического аппарата для решения научно-исследовательских задач.	<b>Владеет:</b> разнообразным математическим аппаратом, подбирая сочетания различных методов, для описания и анализа стохастических моделей.

## II. СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего	Аудиторные занятия			Сам. раб.
			ЛК	ПЗ	ЛБ	
	<b>Раздел 1. Введение в теорию случайных процессов</b>	<b>22,7</b>	<b>2</b>			<b>20,7</b>
1.	Тема 1. Необходимость создания теории случайных процессов	8				8
2.	Тема 2. Основные понятия, виды и классы случайных процессов	14,7	2			12,7
6	<b>Раздел 2. Математический аппарат марковских процессов</b>	<b>65</b>	<b>14</b>	<b>6</b>		<b>45</b>
7	Тема 4. Математический аппарат дискретных цепей Маркова	33	6	2		25
8	Тема 5. Дискретный случайный марковский процесс	32	8	4		20
	<b>Раздел 3. Приложения теории случайных процессов</b>	<b>54</b>	<b>8</b>	<b>6</b>		<b>40</b>
9	Тема 6. Марковские модели массового обслуживания	28	4	4		20
10	Тема 7. Элементы теории мартингалов и ее приложения к классическим задачам финансового рынка	26	4	2		20
11	<i>Экзамен</i>	<i>0,3</i>				
12	<i>Консультации</i>	<i>2</i>				
13	<i>Контроль</i>	<i>36</i>				
14	<i>Итого за 7 семестр</i>	<i>180</i>				
15	<b>ИТОГО:</b>	<b>180</b>	<b>24</b>	<b>12</b>		<b>105,7</b>

### III. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Текущая аттестация проводится в форме теста.

#### Типовой вариант теста (7 семестр)

1. Если случайный процесс является стационарным в широком смысле, то

- а) он является также стационарным в узком смысле
- б) его дисперсии конечны
- в) корреляционная функция положительна
- г) математическое ожидание не зависит от времени, а корреляционная функция зависит от разности аргументов

2. Укажите тип случайного процесса, наиболее адекватно описывающий количество людей, стоящих в очереди.

- а) процесс с независимыми значениями
- б) процесс с независимыми приращениями
- в) цепь Маркова с дискретным временем
- г) цепь Маркова с непрерывным временем
- д) гауссовский процесс

3. Какой случайный процесс является математической моделью броуновского движения?

- а) гауссовский процесс
- б) процесс Пуассона
- в) цепь Маркова с дискретным временем
- г) винеровский процесс
- д) цепь Маркова с непрерывным временем

4. Случайный процесс  $\{\xi_t\}$  с независимыми приращениями, если

- а) он является также винеровским;
- б) для любых  $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$  случайные величины  $\xi(t_{i+1}) - \xi(t_i)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ , независимы в совокупности
- в) математическое ожидание равно постоянной
- г) корреляционная функция положительна

5. Вероятность поглощения в задаче полубесконечного случайного блуждания на прямой с поглощающим экраном

- а) всегда равна единице
- б) никогда не равна единице
- в) всегда равна нулю
- г) никогда не равна нулю

6. В случае независимости состояний цепи Маркова

- а) переходные вероятности постоянны
- б) строки матрицы переходных вероятностей различны
- в) определитель матрицы переходных вероятностей равен 1
- г) все строки матрицы переходных вероятностей одинаковы

7. Однородная цепь Маркова с дискретным временем исчерпывающе характеризуется

- а) матрицей переходных интенсивностей
- б) матрицей переходных вероятностей
- в) корреляционной функцией
- г) одномерной функцией распределения

8. Производится серия опытов, в каждом из которых подбрасываются две монеты. Обозначим через  $S_1$  – выпадение двух гербов;  $S_2$  – выпадение герба и решки;  $S_3$  – выпадение двух решек. Матрица переходных вероятностей имеет вид:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \text{ г) } \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

9. Для однородной цепи Маркова вектор вероятности состояний после  $n$  шагов равен:

- а) произведению вектора вероятностей состояний после  $(n-1)$  шагов на матрицу переходных вероятностей
- б) произведению матрицы переходных вероятностей в  $n$ -ой степени
- в) произведению матрицы переходных вероятностей на вектор вероятностей состояний после  $(n-1)$  шагов
- г) вектору вероятностей состояний в  $n$ -ой степени

10. Задана матрица переходных вероятностей для цепи Маркова  $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,7 & 0,3 \end{pmatrix}$ . Матрица

перехода на втором шаге равна:

- а)  $\begin{pmatrix} 0,04 & 0,16 \\ 0,49 & 0,09 \end{pmatrix}$
- б)  $\begin{pmatrix} 0,60 & 0,40 \\ 0,35 & 0,65 \end{pmatrix}$
- в)  $\begin{pmatrix} 0,2 & 0,7 \\ 0,8 & 0,3 \end{pmatrix}$
- г)  $\begin{pmatrix} 0,6 & 0,35 \\ 0,4 & 0,65 \end{pmatrix}$

11. Пусть в начальный момент времени система с равной вероятностью находится в одном из возможных состояний, изображаемых точкой на оси  $ox$ :  $x=-1$  – состояние  $S_1$ ;  $x=0$  – состояние  $S_2$ ;  $x=1$  – состояние  $S_3$ ;  $x=2$  – состояние  $S_4$ . В зависимости от случая точка может перемещаться вправо или влево на единичное расстояние: вправо с вероятностью  $1/6$ , влево с вероятностью  $5/6$ . Из состояний  $S_1$  и  $S_4$  перемещения невозможны. Вероятности на втором шагах равны:

- а)  $(1/4; 1/4; 1/4; 1/4)$ ;
- б)  $(11/24; 5/24; 1/24; 7/24)$ ;
- в)  $(13/144; 5/144; 5/144; 91/144)$ ;
- г)  $(1; 0; 0; 0)$ .

12. Вероятность разорения при игре в «орлянку» с бесконечно богатым соперником

- а) равна единице

б) меньше единицы

в) равна нулю

г) меньше единицы, но больше нуля

13. Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника стреляющим первым дуэлянтом при каждом выстреле равна 0,2, вторым – 0,5. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти вероятность «выигрыша» первого дуэлянта.

а) 0,2

б) 5/13

в) 0,5

г) 2/5

д) другой ответ

14. ЭВМ может находиться в одном из следующих состояний:  $S_1$ -исправна, работает;  $S_2$  – неисправна (остановлена) и идет поиск неисправности;  $S_3$  – неисправность обнаружена и идет ремонт;  $S_4$  – ремонт закончен и идет подготовка к пуску. Известно: среднее время безотказной работы ЭВМ равно 12 часам; для ремонта ее приходится останавливаться в среднем на 6 часов; поиск неисправностей длится в среднем 0,5 часа; подготовка к пуску занимает 1 час. Предельные вероятности состояний рассматриваемой системы равны:

а)  $p_1=24/39$ ;  $p_2=1/39$ ;  $p_3=12/39$ ;  $p_4=2/39$ .

б)  $p_1=1/2$ ;  $p_2=1/48$ ;  $p_3=1/4$ ;  $p_4=1/24$ .

в)  $p_1=2/3$ ;  $p_2=1/3$ ;  $p_3=1/9$ ;  $p_4=2/9$ .

г)  $p_1=2/9$ ;  $p_2=1/9$ ;  $p_3=5/9$ ;  $p_4=1/9$ .

15. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ . Стационарное

распределение вероятностей равно:

а)  $(1/2; 1/4)$ ;

б)  $(1/2; 5/2)$ ;

в)  $(1/4; 3/4)$ ;

г)  $(2/3; 1/3)$ .

16. Имеется случайное блуждание по одномерной целочисленной решетке, где  $p_{i,i+1}=p$ ,  $p_{i,i-1}=q$  для всех целых  $i$ . Вероятность  $p_{00}^{(2n)}$  равна:

а) 1;

б) 0;

в)  $p$ ;

г)  $C_n^{2n} p^n q^n$ .

17. Распределение числа событий, произошедших за равные промежутки времени в простейшем потоке событий описывается

а) распределением Пуассона

б) формулой Эрланга

в) показательным распределением

г) гауссовским распределением

д) равномерным распределением

18. К какому процессу относится матрица плотностей вероятностей переходов из одного состояния в другое ?

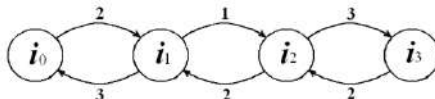
$$\begin{pmatrix} -\lambda_{12} & \lambda_{21} & 0 & 0 \\ \lambda_{12} & -(\lambda_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{32} & 0 \\ 0 & \lambda_{23} & -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) & \lambda_{43} \\ 0 & 0 & \lambda_{34} & -\lambda_{43} \end{pmatrix}$$

- а) процессу гибели и размножения
- б) процессу с независимыми приращениями
- в) цепи Маркова с дискретным временем
- г) гауссовскому процессу
- д) винеровскому процессу

19. Задача Коши для системы уравнений Колмогорова имеет

- а) всегда неотрицательное решение
- б) только положительные решения
- в) нулевые решения
- г) положительные и отрицательные решения.

20. Граф состояний системы представлен на рисунке.



Система линейных алгебраических уравнений для предельных вероятностей имеет вид:

а) 
$$\begin{cases} -2p_0 + 3p_1 = 0 \\ 2p_0 - 4p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 - 5p_2 + 2p_3 = 0 \\ 3p_2 - 2p_3 = 0 \\ 2p_0 + p_1 + 3p_2 - 7p_3 = 0 \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} -2p_0 + 3p_1 = 0 \\ 2p_0 - 3p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 - 5p_2 + 2p_3 = 0 \\ 3p_2 - 2p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} -2p_0 + 3p_1 = 0 \\ 2p_0 - 4p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 - 5p_2 + 2p_3 = 0 \\ 3p_2 - 2p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} -2p_0 + 3p_1 = 0 \\ 2p_0 - 3p_1 + 2p_2 = 0 \\ p_1 - 3p_2 + 2p_3 = 0 \\ 3p_2 - 2p_3 = 0 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме экзамена с использованием следующих оценочных материалов: перечень вопросов к экзамену.

**Вопросы к экзамену  
(7 семестр, очная форма обучения)**

1. Классические задачи, иллюстрирующие необходимость построения теории случайных процессов. Понятие случайного процесса.
2. Классификация случайных процессов. Процесс с независимыми приращениями. Мартингалы.
3. Классификация случайных процессов. Марковские процессы. Стационарные случайные процессы.
4. Классификация марковских случайных процессов.
5. Понятие дискретной цепи Маркова и ее вероятностных характеристик.
6. Вероятностная структура однородной цепи Маркова (вывод формулы  $p(n)=p(0)P^n$ ).
7. Определение вероятности перехода цепи Маркова за  $m$  шагов.
8. Примеры цепей Маркова.
9. Классификация состояний цепи Маркова.
10. Критерий возвратности. Применение критерия возвратности к одномерному случайному блужданию по целочисленной решетке.
11. Предельная теорема для конечных цепей Маркова.
12. Понятие марковского процесса и основных его вероятностных характеристик.
13. Вывод дифференциальных уравнений Колмогорова. Составление уравнений Колмогорова с использованием графа состояний.
14. Эргодические свойства однородных марковских случайных процессов.
15. Определение предельных вероятностей состояний марковского процесса для двух состояний.
16. Понятие пуассоновского процесса. Примеры пуассоновского процесса.
17. Утверждение о распределении промежутков времени и моментов времени для пуассоновского распределения.
18. Понятие процесса чистого рождения. Теорема Феллера для процесса чистого рождения.
19. Процесс рождения и гибели.
20. Процессы массового обслуживания. Основные понятия и классификация СМО.
21. Характеристики простейшего потока. Основные свойства простейшего потока. Время ожидания и время обслуживания.
22. Принципы построения моделей массового обслуживания.
23. Основные характеристики систем массового обслуживания с отказами. Уравнения Эрланга.
24. Основные характеристики систем массового обслуживания с ожиданием.
25. Понятие мартингала, субмартингала, супермартингала. Свойства мартингала, субмартингала, супермартингала.
26. Разложение Дуба.
27. Тождество Вальда. Доказательство тождества Вальда по Колмогорову-Прохорову.
28. Применение тождества Вальда для случайного блуждания.



29. Теорема Дуба о преобразовании свободного выбора.  
30. Неравенство Дуба для максимального значения мартингала.

#### **IV. ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

##### **4.1. Основная литература**

1. Кацман, Ю. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы : учебник / Ю. Кацман ; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск : Издательство Томского политехнического университета, 2013. – 131 с. : ил., табл., схем. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=442107> (дата обращения: 13.08.2020). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-4387-0173-6. – Текст : электронный.

##### **4.2. Дополнительная литература**

1. Булинский, А.В. Теория случайных процессов : [16+] / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – Москва : Физматлит, 2005. – 403 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=68121> (дата обращения: 13.08.2020). – ISBN 978-5-9221-0335-0. – Текст : электронный.
2. Соколов, Г.А. Теория случайных процессов для экономистов : учебное пособие / Г.А. Соколов. – Москва : Физматлит, 2010. – 208 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=69334> (дата обращения: 13.08.2020). – ISBN 978-5-9221-1100-3. – Текст : электронный.

#### **V. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

<b>№ пп</b>	<b>Ссылка на информационный ресурс</b>	<b>Наименование разработки в электронной форме</b>	<b>Доступность</b>
1.	<a href="http://mathedu.ru">http://mathedu.ru</a>	Математическое образование: прошлое и настоящее (сайт с ЭБ, включающей дореволюционные источники, литературу советского периода)	Свободный доступ.
2	<a href="http://www.iprbookshop.ru/">http://www.iprbookshop.ru/</a>	Электронно-библиотечная система (ЭБС)	Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем индивидуальный неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет
3.	<a href="http://www.exponenta.ru">http://www.exponenta.ru</a>	Образовательный математический сайт	Свободный доступ

4.	<a href="http://www.matchclub.ru">http://www.matchclub.ru</a>	Образовательный математический сайт	Свободный доступ
5.	<a href="http://www.fismat.ru">http://www.fismat.ru</a>	Образовательный математический сайт	Свободный доступ
6.	<a href="http://www.mathnet.ru">http://www.mathnet.ru</a>	Образовательный математический сайт	Свободный доступ
7.	<a href="http://www.krugosvet.ru">http://www.krugosvet.ru</a>	Электронная энциклопедия, в которой представлен материал по основным математическим терминам, а также биографические данные об известных математиках.	Свободный доступ
8.	<a href="http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/Books.htm">http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/Books.htm</a>	Математическая библиотека, постоянно пополняемое собрание университетских учебников, исследований по математическому анализу, алгебре, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальным уравнениям, математической физике.	Неограниченный доступ
9.	<a href="http://ilib.mccme.ru">http://ilib.mccme.ru</a>	ЭБ с книгами по математике.	Свободный доступ.

## VI. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

№ пп	Ссылка на информационный ресурс	Наименование разработки в электронной форме	Доступность
1.	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>	Электронно-библиотечная система (ЭБС) Университетская библиотека онлайн	Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем предоставляется неограниченный индивидуальный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет
2.	<a href="http://www.garant.ru">www.garant.ru</a>	Информационно-правовой портал	Свободный доступ
3.	<a href="http://www.elibrary.ru">www.elibrary.ru</a>	Российский информационный портал в области науки, технологии, медицины и образования	Свободный доступ
4.	<a href="http://www.consultant.ru">www.consultant.ru</a>	Российская компьютерная справочно-правовая система	Свободный доступ

## **VII. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

При реализации учебной дисциплины применяется следующее лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Windows;
- Microsoft Office;
- LibreOffice и др.

## **VIII. ОБОРУДОВАНИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Учебные занятия проводятся в аудиториях, укомплектованных специализированной мебелью, в том числе стационарными или переносными техническими средствами обучения (проектор, экран, компьютер/ноутбук).

Самостоятельная работа проводится в кабинетах, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.