



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Б1.О.04.04 - Функциональный анализ**

**Направление подготовки:** 01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Направленность (профиль):** Моделирование и цифровизация социально-экономических систем

**Квалификация (степень):** бакалавр

**Форма обучения:** очная

**Институт:** Математики, естествознания и техники

**Кафедра:** Математики и методики её преподавания

	очная форма	очно-заочная форма	заочная форма
Курс	2, 3		
Семестр/триместр	4, 5		

Лекции	36		
Лабораторные занятия			
Практические (семинарские) занятия	54		
в т. ч. практическая подготовка			
Форма(ы) промежуточной аттестации	Зачет 4 сем., Эк- замен 5 сем.-0,3		
Контроль	9		
Иные формы работы			
Самостоятельная работа	117		

Всего часов: 206

Трудоемкость: 6 зачетных единиц.

Разработчик(и) рабочей программы: канд. ф.-м. наук, доцент Елецких И.А.

## I. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

**Цель изучения дисциплины:** Целью преподавания дисциплины является создание целостного представления о предмете и методах общей теории дифференциального и интегрального исчисления в линейных нормированных пространствах, получение спектральных разложений самосопряженных операторов, изучение методами анализа дифференциально-операторных уравнений, а также изучение дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве.

### Задачи изучения дисциплины:

- раскрыть студентам значение курса для современных методов исследования в математике;
- ознакомить студентов с технологией построения теории абстрактной функции;
- изучить вопросы дифференцирования и интегрирования абстрактных функций;
- научить формулировать задачи в операторном виде и делать выводы о разрешимости операторных уравнений, используя свойства входящих в них операторов;
- изучить методы решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве;
- рассмотрение свойств неотрицательных операторов в линейных нормированных пространствах;
- изучение спектрального разложения самосопряженного оператора;
- изучение методами анализа дифференциально-операторных уравнений в банаховом пространстве;
- развивать умения самостоятельной работы с научной и математической литературой.

**Место дисциплины в структуре ОПОП:** реализуется в рамках базовой (обязательной) части блока Б1. Дисциплины (модули).

### Планируемые результаты обучения по дисциплине:

Код компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
ОПК-3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	<b>Знать:</b> - основы дискретной математики, численных методов, теории вероятностей и математической статистики, методы оптимизации и оптимального управления;	<b>Знает:</b> - методы решения задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве.
	<b>Уметь:</b> - адаптировать стандартные математические модели к решению конкретных научно-исследовательских задач;	<b>Умеет:</b> - адаптировать стандартные математические модели к решению конкретных научно-исследовательских задач; - уметь применять свойства операторов для определения разрешимости уравнений, записанных в операторной форме.
	<b>Владеть:</b> - методами математического, информационного и имитационного моделирования по тематике	<b>Владеет:</b> - методами математического, информационного и имитационного моделирования

## II. СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего	Аудиторные занятия			Сам. раб.
			ЛК	ПЗ	ЛБ	
	Семестр 4					
	Раздел 1. _____	72	18	18		36
1.	Тема 1. Метрические, линейные, нормированные пространства	17	4	4		9
2.	Тема 2. Линейные операторы	17	4	4		9
3.	Тема 3. Дифференциальное исчисление в линейных нормированных пространствах	19	6	4		9
4.	Тема 4. Абстрактные функции числовой переменной	19	4	6		9
5.	Форма отчетности	зачет				
	Итого за _____ семестр	72	18	18		36
6.	семестр 5					
	Раздел 2.					
7.	Тема 5. Сопряженные операторы и пространства		4	8		16
8.	Тема 6. Теория линейных уравнений в банаховых пространствах		4	8		16
9.	Тема 7. Элементы спектральной теории линейных операторов		4	8		16
10.	Тема 8. Абстрактные функции ограниченной вариации. Спектральные разложения самосопряженных операторов		2	4		16
11.	Тема 9. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и методы их решения		4	8		16,7
12.			18	36		80,7
13.	Контроль	9				
14.	Форма отчетности	Экзамен 0,3				
	ИТОГО:		18	36		80,7

## Очно-заочная форма обучения (не реализуется)

## Заочная форма обучения (не реализуется)

### III. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Текущая аттестация проводится в форме контрольной работы, теста, реферата, творческого задания, кейса и др.

#### Типовой вариант контрольной работы (4 семестр)

1. Пространство  $R$  последовательностей (действительных или комплексных) чисел  $f_n$  будет метрическим, если расстояние между двумя последовательностями  $f=\{f_n\}$  и  $g=\{g_n\}$  определить как  $\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n - g_n|}{1 + |f_n - g_n|}$ . Проверить выполнимость аксиом метрического пространства.
2. Пусть  $E$  – линейное пространство и в  $E$  двумя способами введены нормы  $\|x\|_1$  и  $\|x\|_2$ . Нормы  $\|x\|_1$  и  $\|x\|_2$  называются эквивалентными, если существуют числа  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  такие, что  $(\forall x \in E) \quad \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$ . Докажите, что отношение эквивалентности обладает свойством симметричности: если  $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$ , то  $\|x\|_2 \sim \|x\|_1$ .
3. В пространстве  $R_M$  квадратных матриц  $A=(a_{ij})$  ( $i, j=1, \dots, n$ ) порядка  $n$  матрицы будем рассматривать как операторы, действующие на векторы. Найти  $A^{-1}$ , если

$$\text{А). } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{Б). } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Найти различные нормы матрицы  $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$ . Провести улучшение  $\|A\|$  и указать преобразующую матрицу.

#### Типовой вариант контрольной работы (5 семестр)

1. Доказать, что следующие функционалы являются линейными непрерывными и найти их нормы:  
А).  $f[x(t)] = \int_{-1}^1 x(t) \cos t dt$ ,  $x \in L^2(-1,1)$ ; Б).  $f[x(t)] = \int_0^1 x(\sqrt{t}) dt$ ,  $x \in L^2(0,1)$ .
2. Найдите оператор, сопряженный к оператору  $A: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$ , если  
А).  $Ax(t) = x(t^2)$ ; Б).  $Ax(t) = \int_0^1 t^2 x(t^3) dt$ .
3. Доказать, что если  $P_1$  и  $P_2$  ( $P_1, P_2 \in L(E)$ ) – проекторы, то  $P=P_1+P_2$  – проектор, если  $P_1P_2=0$ . В этом случае  $F = F_1 \oplus F_2$ , где  $F_i = P_i(E)$  ( $i=1,2$ ).
4. Доказать, что компактное метрическое пространство полно.

### **Примерная тематика рефератов**

1. Линейное дифференциальное уравнение с постоянным оператором в банаховом пространстве.
2. Эволюционный оператор и решение линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.
3. Дифференциальное уравнение с периодической оператор-функцией в банаховом пространстве.
4. Линейные дифференциальные уравнения в комплексной плоскости.
5. Компактность в метрических пространствах.
6. Евклидовы пространства.
7. Интеграл Стильтеса в линейных нормированных пространствах.
8. Тригонометрические ряды в линейных нормированных пространствах.
9. Элементы дифференциального исчисления для нелинейных операторов в банаховом пространстве.
10. Элементы дифференциального исчисления для нелинейных операторов в банаховом пространстве.

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме зачета в 4 семестре и экзамена в 5 семестре с использованием следующих оценочных материалов

### **Вопросы к зачету (4 семестр, очная форма обучения)**

1. Метрические пространства. Свойства метрических пространств.
2. Теорема о категориях. Принцип сжимающих отображений и его приложение для решения задачи Коши.
3. Линейные нормированные пространства. Конечномерные пространства.
4. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства.
5. Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывные линейные операторы. Ограниченные линейные операторы. Норма линейного оператора.
6. Ряды в пространстве линейных ограниченных операторов. Сильная сходимость. Принцип равномерной ограниченности.
7. Обратные операторы в линейных нормированных пространствах. Множество нулей. Теорема Банаха. Примеры обратных операторов.
8. Левый и правый обратные операторы. Существование обратных операторов.
9. Понятие дифференцируемости. Сильная и слабая дифференцируемость в линейных нормированных пространствах.
10. Формула Лагранжа конечных приращений.

### **Вопросы к экзамену (5 семестр, очная форма обучения)**

1. Метрические пространства. Примеры метрических пространств.
2. Свойства метрических пространств (принцип вложенных шаров).
3. Свойства метрических пространств (теорема о категориях).
4. Свойства метрических пространств (принцип сжимающих отображений и его обобщение).
5. Линейные нормированные пространства.

6. Пространства со скалярным произведением.
7. Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывные линейные операторы.
8. Ограниченные линейные операторы.
9. Нормированное пространство  $L(X, Y)$ . Норма линейного оператора.
10. Равномерная сходимость линейных операторов.
11. Ряды в  $L(X, Y)$ . Пространство  $L(X)$ .
12. Принцип равномерной ограниченности.
13. Обратные операторы в линейных нормированных пространствах Множество нулей. Теорема Банаха.
14. Левый и правый обратные операторы.
15. Существование обратных операторов.
16. Понятие дифференцируемости. Сильная и слабая дифференцируемость в линейных нормированных пространствах.
17. Производная сложной функции.
18. Формула Лагранжа конечных приращений.
19. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью.
20. Производные второго порядка.
21. Отображение  $m$ -мерного евклидова пространства в  $n$ -мерное.
22. Понятие абстрактной функции. Предел и непрерывность.
23. Дифференцирование абстрактной функции.
24. Степенные ряды в нормированном пространстве.
25. Аналитические абстрактные функции и ряды Тейлора.
26. Метод малого параметра в простейшем случае.

## IV. ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1. Основная литература

1. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613> (дата обращения: 24.08.2021). – ISBN 5-9221-0272-9. – Текст : электронный.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник : [16+] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – Москва : Физматлит, 2012. – 573 с. – (Классический университетский учебник). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563> (дата обращения: 24.08.2021). – ISBN 978-5-9221-0266-7. – Текст : электронный.

### 4.2. Дополнительная литература

1. Кунакова, Е. Ю. Лекции по функциональному анализу : учебное пособие / Е. Ю. Кунакова, И. Л. Томашевский ; Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова. – Архангельск : Северный (Арктический) федеральный университет (САФУ), 2013. – 119 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436315> (дата обращения: 24.08.2021). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-261-00759-3. – Текст : электронный.

2. Кутузов, А. С. Введение в функциональный анализ : учебное пособие : [16+] / А. С. Кутузов. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 482 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571413> (дата обращения: 24.08.2021). – ISBN 978-5-4499-0433-1. – DOI 10.23681/571413. – Текст : электронный.

## V. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№ пп	Ссылка на информационный ресурс	Наименование разработки в электронной форме	Доступность
1.	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>	Электронно-библиотечная система (ЭБС) Университетская библиотека онлайн	Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем индивидуальный неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет
2.	<a href="http://www.exponenta.ru">http://www.exponenta.ru</a>	Образовательный математический сайт, содержащий математические пакеты для поддержки проводимых занятий, а также методические разработки	Неограниченный доступ
3.	<a href="https://www.matburo.ru/">https://www.matburo.ru/</a>	Справочная информация по математическим дисциплинам	Неограниченный доступ
4.	<a href="http://allmath.ru">http://allmath.ru</a>	Математический портал, содержащий разделы: высшая математика, прикладная математика, школьная математика, олимпиадная математика.	Неограниченный доступ
5.	<a href="http://www.e.lanbook.com">http://www.e.lanbook.com</a>	Издательство «Лань»	Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем индивидуальный неограниченный доступ/
6.	<u>ЭБС «Юрайт»</u>	Виртуальный читальный зал учебников и учебных пособий от авторов из ведущих вузов России по экономическим, юридическим, гуманитарным, инженерно-техническим и естественно-научным направлениям и специальностям.	<u><a href="http://biblio-online.ru">biblio-online.ru</a></u> Доступ после регистрации

## **VI. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ**

1.	<a href="http://zbMATH.org">zbMATH</a>	Математическая база данных, охватывающая около 4 000 000 документов, из более 3 000 журналов и 170 000 книг по математике, статистике, информатике, физике, естественным наукам	Доступ свободный <a href="http://zbmath.org">zbmath.org</a> Доступ свободный
2.	<a href="http://www.garant.ru">www.garant.ru</a>	Информационно-правовой портал	Свободный доступ
3.	<a href="http://www.elibrary.ru">www.elibrary.ru</a>	Российский информационный портал в области науки, технологии, медицины и образования	Свободный доступ
4.	<a href="http://www.consultant.ru">www.consultant.ru</a>	Российская компьютерная справочно-правовая система	Свободный доступ

## **VII. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

При реализации учебной дисциплины применяется следующее лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Windows;
- Microsoft Office;
- LibreOffice и др.

## **VIII. ОБОРУДОВАНИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Учебные занятия проводятся в аудиториях, укомплектованных специализированной мебелью, в том числе стационарными или переносными техническими средствами обучения (проектор, экран, компьютер/ноутбук).

Самостоятельная работа проводится в кабинетах, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.