МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

С.Н. Дворяткина, О.Н. Прокуратова

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Елец – 2019

УДК 519.21
ББК 22.171
Д 24

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина
от 31. 01. 2019 г., протокол № 1

Рецензенты:

Масина О.Н., доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина;

Розанова С.А., доктор педагогических наук, профессор кафедры высшей математики Российского технологического университета (МИРЭА).

С.Н. Дворяткина, Прокуратова О.Н.

Д 24 Марковские процессы и простейшие модели теории массового обслуживания: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019. – 79 с.
ISBN 978-5-00151-063-5

В учебном пособии рассмотрены основы современной теории марковских процессов – важного самостоятельного раздела теории случайных процессов, который используется при построении моделей функционирования систем массового обслуживания. В книге приводятся общие сведения по теории случайных процессов и теории массового обслуживания, более подробно изложен материал по теории марковских процессов с дискретным временем (цепи Маркова) и непрерывным временем. В пособии предложены задачи для самостоятельного решения и теоретические вопросы для проверки качества усвоения материала по каждой из тем.

Пособие рассчитано на подготовку будущих бакалавров направлений подготовки «Прикладная математика и информатика», «Информационная безопасность», «Информатика и вычислительная техника», «Радиотехника» и др. Оно также может быть полезно магистрантам и аспирантам.

УДК 519.21
ББК 22.171

ISBN 978-5-00151-063-5

ВВЕДЕНИЕ

Теория случайных процессов является обширной областью современной математики, которую невозможно охватить даже несколькими годовыми курсами. Поэтому целью данного пособия было познакомить студентов только с некоторыми ключевыми аспектами данной теории, представляющих продолжение и развитие теории вероятностей. С формальной точки зрения теория случайных процессов выделяется из теории вероятностей более сложной струкурой множества значений, которые принимают случайные величины, и разнообразием способов задания вероятностной меры. В тоже время теория случайных процессов изучает закономерности случайных явлений в динамике их развития, изменяющихся во времени, пространстве или ином процессе. Выбор содержания курса был определен, прежде всего, его продолжительностью и интересами авторов. Тем не менее, нет никаких сомнений в том, что идеи, факты, методы, представленные в пособии, будут полезны для дальнейшего освоения других важнейших разделов теории случайных процессов. Теория случайных процессов имеет многочисленные приложения в экономике, физике, информатике, финансах, химии, биологии, медицине, кибернетике, метеорологии, теории связи и других науках. Случайные процессы являются основой для построения математических моделей динамических систем любой природы и моделей массового обслуживания.

Основными целями изучения курса являются приобретение теоретических знаний по теории случайных процессов и практических навыков по применению ее методов для исследования и моделирования случайных явлений в динамике их развития. Главные задачи освоения курса состоят в том, чтобы ознакомить студентов с основными типами случайных процессов, марковскими процесами с дискретным пространством состояний и дискретным (и непрерывным) временем, вероятностными характеристиками марковского случайного процесса, возможными его приложениями в теории массовогообслуживания и основными практико-ориентированными задачами.

Изучение дисциплины «Теория случайных процессов» имеет большое значение для подготовки специалистов по многим техническим и экономическим специальностям, а также в области информатики, информационной безопасности и управления. Освоение дисциплины способствует развитию у студента профессиональных компетенций, готовит к творческой и инновационной деятельности в выбранной профессиональной области.

В условиях современных ФГОС третьего поколения значимое число часов выделяется на самостоятельную работу студента. Современный исследователь должен уметь самостоятельно разрабатывать алгоритмы для решения научно-исследовательских задач, вычислительные и имитационные модели реальных явлений, интерпретировать полученные результаты. Самостоятельная работа должна включать использование математических пакетов для решения различных практических задач теории случайных процессов и ее приложений. В пособии авторы представили конкретные примеры реализации обозначенных положений, неоднократно апробированных в учебном процессе высшей школы.

Библиография содержит некоторые источники, которые авторы используют при чтении лекций, а также могут быть рекомендованы в качестве дополнительной литературы для более детального и глубокого изучения теории случайных процессов.

Авторы выражают искреннюю благодарность своим аппонентам — профессорам Ольге Николаевне Масиной и Светлане Алексеевне Розановой за полезные предложения и рекомендации.

Тема 1. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Необходимость создания теории случайных процессов

Следуя исторической концепции, с тем чтобы объяснить возникновение и развитие основных положений новой научной теории, дадим краткое обоснование появлению теории случайных процессов. В результате изучения реальных процессов во времени многие ученые, в том числе физики, биологи, инженеры и другие, подошли к важной проблеме. Теория вероятностей предлагала им в качестве математического аппарата лишь средства, изучавшие стационарные состояния. Необходима же была теория, которая изучала случайные величины, зависящие от одного или нескольких непрерывно изменяющихся параметров. В XX веке проблема достигла своей зрелости, вызвав эвристическое направление в поисках ее решения.

Начало общей теории случайных процессов было положено работами советских математиков А.Н. Колмогоровым (1903–1987), А.Я. Хинчиным (1894–1959), Е.Е. Слуцким (1880–1948), Н. Винером (1894–1965), Дж. Дуба (1910-2004), П. Леви (1886-1971). Однако у них были предшественники − П. Лаплас, Л. Башелье, Ж. Пуанкаре, А.А. Марков. А.Н. Колмогоровым было дано систематическое и строгое построение основ теории стохастических процессов без последействий (процессов марковского типа). В работах А.Я. Хинчина была создана теория стационарных процессов. Н. Винер в середине двадцатых годов при изучении броуновского движения ввел в рассмотрение процесс, получивший название винеровского процесса. Работы Е.Е. Слуцкого (1880–1948) посвящены изучению теории случайных функций. В наши дни теория случайных процессов занимает центральное место не только в теории вероятностей, но также в естествознании, в инженерном деле, в экономике, в организации производства, в теории связи, в теории массового обслуживания и др.

Прежде чем перейти к изучению основных элементов теории случайных процессов, рассмотрим некоторые задачи, которые явились исходным пунктом новой теории.

Изучение процесса диффузии

Рассмотрим поведение какой-нибудь молекулы газа или жидкости. Эта молекула в случайные моменты сталкивается с другими молекулами, меняет при этом направление движения и скорость. Состояние молекулы, таким образом, подвержено случайным изменениям и представляет собой ничто иное, как случайный процесс, который определяется шестью параметрами – тремя координатами и тремя компонентами скорости. Как быстро протекает процесс диффузии, по каким законам, когда образующая смесь становится однородной? На все эти вопросы дает ответ статистическая теория диффузии[1], в основе которой лежит теория случайных процессов. Подобные задачи возникают в химии при изучении химических реакций. Теория случайных процессов дает ответы на следующие вопросы: какая часть молекул уже вступила в реакцию, какова особенность протекания реакции во времени и др.?

Изучение явлений, протекающих по принципу радиоактивного распада

Многочисленные наблюдения показывают, что распад от дельных атомов происходит в случайно взятые моменты времени и расположение этих моментов, если количество распадающегося вещества не превосходит некоторого определенного критического предела, не зависит друг от друга. Для изучения процесса радиоактивного распада важно определить вероятность того, что за определенный промежуток времени распадается то или иное число атомов. Аналогично происходят многие другие процессы:

- процесс броуновского движения, который определяет число частиц, оказавшихся в данный момент в определенной области пространства. Изучением таких процессов занимается статистическая теория броуновского движения. Напомним, что в 1827 году шотландский ботаник Р. Броун (1773-1858) обнаружил под микроскопом хаотическое движение частиц цветочной пыльцы в воде. Для описания процессов такого рода требуются вероятностно-статистические подходы[2];

---

[1] Попытка изучения средствами теории вероятностей явления диффузии была предпринята в 1914 г. двумя известными физиками — М. Планком (1858–1847) и А. Фоккером (1887–1972).

[2] Теория броуновского движения, исходящая из теоретико-вероятностных предпосылок, была разработана в 1905 г. двумя известными физиками М. Смолуховским (1872–1917) и А. Эйнштейном (1879–1955). Основные положения их трудов использовались неоднократно как при изучении физических явлений, так и в различных инженерных задачах. В частности, именно с этих работ, а также с работ Эрланга, проявился широкий интерес к процессу Пуассона. Впрочем, сам Пуассон ввел в рассмотрение только распределение Пуассона, но он заслужил, чтобы его имя произносилось и при изучении случайных процессов, связанных с его распределением.

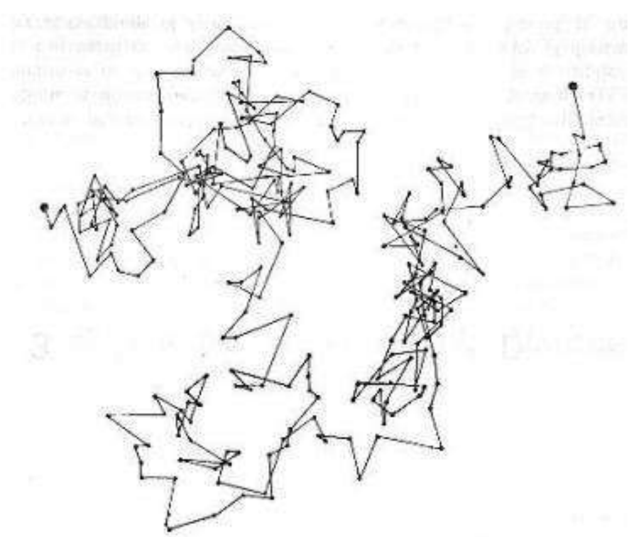


Рис. 1. **Броуновское движение**

- различные процессы массового обслуживания. Например, число вызовов от абонентов, поступающих на телефонную станцию, количество обращений в банкоматы, терминалы оплаты сотовой связи и др., базовой основой которых является также теория случайных процессов;
- исследование различных флуктуаций на бирже ценных бумаг[3].

Исследования, связанные с фондовой биржей

Одним из способов ограничения массы денег, обращающихся в стране, является использование различных векселей, расписок и других ценных бумаг, которые монопольно выпускаются государством. Известно, что акции ликвидны, то есть могут быть проданы на рынке — превращены в ту или иную валюту. Как правильно выбрать стратегию биржевой игры на основе прошлых данных о ценах закрытия, как проследить динамику цен акций за какой-то период, как удачно выбрать момент покупки и продажи акций? На эти вопросы также дает ответ теория случайных процессов.

1.2. Понятие случайного процесса

В курсе теории вероятностей основой аксиоматики является понятие вероятностного пространства (Ω, U, P), где Ω – пространство элементарных событий, U – σ-алгебра подмножеств Ω, называемая событиями, P – вероятностная мера на U. Случайной величиной X, принимающей значе-

[3] В диссертации Л.Башелье (1870-1946), написанной в 1900 году под руководством А.Пуанкаре (1854-1912), "La Th´eorie de la Sp´eculation"(1900) впервые, на несколько лет раньше физиков, была предложена модель для описания флуктуаций на бирже курсов ценных бумаг, которая содержала математическую теорию броуновского движения.

ния в множестве B, называется любая функция $X:\Omega \to B$, измеримая относительно *U*. Обычно за множество B принимают $B = Z$, или $B = R_1$, или $B = R_n$ (в случае векторных случайных величин или геометрических вероятностей). В теории случайных процессов используется та же конструкция и практически та же терминология, определенная для случайных величин[4].

Введем понятие случайного процесса, базирующегося на аксиоматике теории вероятностей.

Определение 1.2.1. *Случайным процессом* $\{X(t,\omega)\}$ *называют последовательность или совокупность случайных величин, заданных на вероятностном пространстве* (Ω, U, P) *и зависящих от параметра t,* $t \in T$ *(t интерпретируется как время).*

Определение 1.2.2. *Реализацией (траекторией) случайного процесса называется неслучайная функция* $X(w_0;t)$*, полученная при фиксированном* $\omega_0 \in \Omega$*. Совокупность всех возможных реализаций называют ансамблем реализаций данного случайного процесса.*

Определение 1.1.3. *Сечением случайного процесса называется случайная величина* $X(t_0,\omega)$*, полученная при фиксированном* $t_0 \in T$.

Пример 1.1.1. Разработан реактивный двигатель новой конструкции, где p(t) — функция времени, $t \in T=[0; t_0]$, описывающая теоретический закон изменения давления в камере сгорания (t=0 – момент запуска двигателя). В связи с тем, что невозможно изготовить два идентичных двигателя, то изменение давления в камере сгорания – случайный процесс X{t; ω}, где ω – вектор конструктивно-технологических характеристик двигателя.

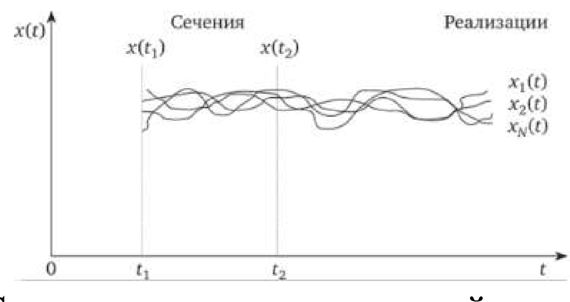


Рис. 2. **Сечения и реализации случайного процесса**

---

[4] Только в качестве множества B выбирается множество более сложной структуры. Например, если $B = Z^z$ или $B = R^z$, то случайная величина *X* принимает значения в пространстве целочисленных или действительных последовательностей, и говорят, что *X* – случайный процесс с дискретным временем

Таким образом, случайный процесс можно рассматривать либо как совокупность случайных величин $X(t)$, зависящих от параметра t, либо как совокупность реализаций процесса $X(w_0;t)$. При этом для определения случайного процесса необходимо задавать вероятностную меру в пространстве реализаций процесса.

1.3. Типы случайных процессов

Основные признаки, по которым различаются случайные процессы, касаются природы пространства состояний, обозначаемого через E, временного параметра T и отношений зависимости между случайными величинами.

Определение 1.3.1. *Пространство состояний − это пространство, которому принадлежат все возможные значения, принимаемые всеми случайными величинами* $X(t)$ *или* X_t*. Если E совпадает с R, то процесс* $\{X(t)\}$ *называется действительным случайным процессом. Если E − евклидово k-мерное пространство, то процесс* $\{X(t)\}$ *является k-мерным.*

Определение 1.3.2. *Если* $T=\{0,1,2\ldots\}$*, то* $\{X(t)\}$ *является процессом с дискретным временем. Если* $T=[0;\infty)$*, то* $\{X(t)\}$ *– процесс с непрерывным временем.*

Пример 1.3.1. Любой выборочный контроль продукции будет относиться к случайным процессам с дискретными состояниями (e_1 – годная, e_2 – негодная продукция) и дискретным временем (t_1, t_2 – время проверки). С другой стороны, случай отказа любой машины можно отнести к случайным процессам с дискретными состояниями, но непрерывным временем. Регистрацию температуры воздуха в определенные моменты времени можно отнести к случайному процессу с непрерывным состоянием и дискретным временем, в свою очередь случайный процесс изменения напряжения в электросети питания ЭВМ является примером случайного процесса с непрерывным состоянием и временем.

Важной чертой случайного процесса $\{X(t)\}$ является зависимость между случайными величинами $X(t)$. Характер этой зависимости определяется заданием совместных функций распределений для каждого конечного семейства $X(t_1)$, $X(t_2)$,…. В теории случайных процессов выделяют различные широкие классы случайных процессов, которые могут и пересекаться. Опишем некоторые классические типы случайных процессов, характеризующиеся различными видами зависимости между $X(t)$, $t \in T$.

1. Марковские процессы

Являются самым крупным направлением в теории случайных процессов.

Определение 1.3.2. *Случайный процесс $\{X(t)\}$ называется марковским, если выполняется условие Маркова: для любых упорядоченных моментов времени $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ справедливо соотношение:*

$$P\{X(t_n) = e_n / X(t_1) = e_1, X(t_2) = e_2, \ldots, X(t_{n-1}) = e_{n-1}\} =$$
$$= P\{X(t_n) = e_n / X(t_{n-1}) = e_{n-1}\},$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E$.

Для 3-х моментов времени $t_i < t_j < t_k$ условие Маркова примет вид:

$$P\left\{X(t_k) = e_k / X\left(t_j\right) = e_j, X(t_i) = e_i\right\} = P\left\{X(t_k) = e_k / X\left(t_j\right) = e_j\right\}.$$

Таким образом, будущее состояние системы зависит от прошлого только через настоящее. Марковские процессы являются естественным обобщением детерминированных процессов, рассматриваемых в классической физике. В детерминированных процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет ход процесса в будущем; в марковских процессах состояние системы в момент времени t_0 однозначно определяет распределение вероятностей хода процесса при $t > t_0$, причем никакие сведения о ходе процесса до момента времени t не изменяют это распределение. Любые случайные блуждания по целым числам — числовой линии (известная как «прогулка пьяницы») и проблемы разорения игрока представляют собой классические примеры марковских процессов с дискретным временем. Двумя важными примерами марковских процессов с непрерывным временем являются винеровский процесс, известный как процесс броуновского движения, и процесс Пуассона. Марковские процессы получили широкое применение в качестве статистических моделей реальных явлений — в теории массового обслуживания (например, в исследовании очередей клиентов), при изучении систем круиз-контроля в автомобилях, систем хранения, обменных курсов валют и др. Алгоритм

PageRank, который первоначально был предложен для поисковой системы Google в Интернете, основан на марковском процессе.

2. Стационарные случайные процессы

Являются вторым по значимости классом случайных процессов.

Определение 1.3.3. *Случайный процесс* $\{X(t)\}$, $t \in T \le R_1$ *называется стационарным в узком смысле, если совместные распределения семейств* $\left(X(t_1+h), X(t_2+h)\ ,.., X(t_n+h)\right)$ *и* $\left(X(t_1), X(t_2),.., X(t_2)\right)$ *одинаковы при всех* $n>0$ *и всех* $t_1, t_2, ..., t_n \in T$*, т.е. n-мерная функция распределения инвариантна относительно сдвига во времени.*

Определение 1.3.4. *Случайный процесс* $\{X(t)\}$, $t \in T \le R_1$ *называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание и дисперсия не зависят от времени, а ковариационная функция зависит только от разности своих аргументов, т.е.* $B(t,t+h)=B(h)$, *где* $B(t,t+h)=\operatorname{cov}\left(X(t,\omega), X(t+h,\omega)\right)$.

Узкое и широкое определения стационарности не тождественны. Случайные процессы, стационарные в узком смысле, всегда стационарны в широком смысле, но не наоборот.

Например, для случайных марковских процессов понятия стационарности в узком и широком смысле являются близкими, но не совпадают. Обычно если вводят стационарный марковский процесс, то в узком смысле. Для гауссовых процессов понятия стационарности в узком и широком смыслах совпадают, поскольку их n-мерные функции вероятности полностью определяются средним значением и ковариационной функцией.

Схема стационарных случайных процессов с хорошим приближением описывает многие реальные явления, сопровождающиеся неупорядоченными флуктуациями. Так, например, пульсации силы тока или напряжения в электрической цепи (электрический "шум") можно рассматривать как стационарный случайный процесс, если эта цепь находится в стационарном режиме, т.е. если все ее макроскопические характеристики и все условия, вызывающие протекание через нее тока, не меняются во времени; пульсации скорости в точке турбулентного течения представляют собой стационарный случайный процесс, если не меняются общие условия, порождающие рассматриваемое течение (т. е. течение является установившимся), и т. д.

Выделение понятия стационарного случайного процесса и получение первых относящихся к нему математических результатов, как было отмечено выше, являются заслугой Е.Е. Слуцкого и относятся к концу 20-х и началу 30-х гг. XX века. В дальнейшем важные работы по теории стационарных случайных процессов были выполнены А.Я. Хининым, А.Н. Колмогоровым, Г. Крамером, Н. Винером и др.

3. Мартингалы

В последние десятилетия интенсивно ведутся исследования класса случайных процессов, которые называются мартингалами[5]. Общность этого класса определяется тем, что на характер зависимости между случайными величинами накладываются довольно слабые условия, выражаемые в терминах условных математических ожиданий.

Пусть $\{X(t)\}$, $t \in T$ – действительный случайный процесс с дискретным или непрерывным параметром *T*.

Определение 1.3.5. *Случайный процесс* $\{X(t)\}$ *называется мартингалом, если для упорядоченных моментов времени* $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_{n+1}, t_i \in T$ *справедливо* $E\{X(t_{n+1}) / X(t_1) = e_1, ..., X(t_n) = e_n\} = e_n$, *для всех допустимых значений* $e_1, e_2, ..., e_n$.

Иными словами, условное математическое ожидание мартингала в следующий момент времени равно его значению в предыдущий момент времени. Мартингал – это процесс без сноса (в том смысле, что его математическое ожидание в следующий момент времени совпадает со значением в текущий момент).

Пример 1.3.2. Если $X(t)$ описывает состояние капитала игрока в момент *t*, то по определению мартингала средняя величина его капитала в момент t_{n+1} при условии, что в момент t_n он располагал капиталом e_n , равно e_n, независимо от того, каков был его капитал в предшествующие моменты времени.

В математической теории мартингалов основную роль играют моменты остановки ν. В математических моделях финансового рынка процесс $\{X(t)\}$ может описывать, например, цену акций в момент *t*, а случайный

---

[5] Французский финансовый математик Л. Башелье создал общую математическую теорию безобидных игр – мартингал, которая позднее, после исследований Ж. Вилле, П. Леей, Д. Дуба (1910–2004) и др., стала одним из важнейших классов стохастических процессов.

момент ν соответствовать моменту продажи пакета его владельцем. Мартингалы с успехом применяются в генетике, теории потенциала, стохастических интегралах и т.д.

4. Процесс с независимыми приращениями

Именно с изучения данного класса возникла теория случайных процессов. Вначале изучались винеровские процессы (процессы броуновского движения)[6], затем более общие процессы с независимыми приращениями.

Определение 1.3.6. *Случайный процесс* $\{X(t)\}$, $t_i \in T \leq R_1$ *– процесс с независимыми приращениями, если его приращения на неперекрывающихся отрезках не зависят друг от друга: для* $\forall t_1 < t_2 < \ldots < t_n \in T$ *приращения случайных величин* $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$, *независимы.*

Примерами процессов с независимыми приращениями являются процесс броуновского движения (процесс с независимыми приращениями, для которых распределение величины $X(t+h) - X(t)$, $t \geq 0$, $h > 0$ является гауссовым), процесс Пуассона (стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями, если $X(t) - X(s)$, $\forall t$, $s \geq 0$, $s < t$), безгранично делимые распределения и другие.

Контрольные вопросы и задачи по теме 1

1. Какие классические задачи, иллюстрируют необходимость построения теории случайных процессов?
2. Какие положения аксиоматики теории вероятностей лежат в основе теории случайных процессов?
3. Назовите основные понятия теории случайных процессов.
4. Что понимается под случайным процессом?

---

[6] Представляет собой модель движения маленькой частицы, взвешенной в жидкости или газе и совершающей хаотическое движение в результате столкновения с молекулами окружающей среды. Впервые такое явление наблюдал голландский натуралист (известен как изобретатель микроскопа) Антони ван Левенгук (1632–1723) в 1670 году, изучая поведение частицы пыльцы в водном растворе под микроскопом. Английский ботаник Р. Броун (1773–1858) в 1828 г. подробно описал свойства этого движения. Математически строгую теорию броуновского движения построил в 1923 г. Н. Винер (1894–1964), однако значение его работы было понято после создания аксиоматической теории вероятностей А.Н. Колмогоровым.

5. Является ли винеровский процесс: а) гаусовским процессом; б) марковским процессом?

6. Какой случайный процесс является математической моделью броуновского движения?

7. Объясните, в чем отличие понятий стационарности в широком и в узком смысле.

8. Какой тип случайного процесса наиболее адекватно описывает количество людей, стоящих в очереди.

9. Какие основные характеристики случайного процесса относятся к марковскому процессу?

10. Случайный процесс $X(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, где ω – неслучайная константа, A и φ независимы, $E(A)=m$, $D(A)=\sigma^2$, φ равномерно распределена на отрезке $[0; 2\pi]$.

а) Найти одномерную плотность распределения, построить ее график.

б) Вычислить математическое ожидание, дисперсию и корреляционную функцию для $X(t)$.

в) Доказать, что это стационарный в широком смысле случайный процесс.

Тема 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДИСКРЕТНЫХ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ

Цепь Маркова – одна из первых строго математически обоснованных моделей случайных процессов. Такой процесс был впервые рассмотрен в работе А.А. Маркова (1856–1922), посвященной анализу последовательности гласных и согласных букв в русском тексте. Общая теория марковских процессов и их классификация была дана А.Н. Колмогоровым в 1930 году. Его исследования дали логически безупречную математическую основу общей теории марковских процессов. В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в самых различных областях наук: в механике, физике, химии и др. Благодаря сравнительной простоте и наглядности математического аппарата, высокой достоверности и точности получаемых решений, особое внимание марковские процессы приобрели у специалистов, занимающихся исследованием операций и теорией принятия оптимальных решений.

2.1. Классификация марковских случайных процессов

Марковские процессы различаются состояниями во времени и в пространстве (рис. 3). В отношении состояния процесса во времени различают два типа марковских процессов: с дискретным временем и непрерывным временем.

Определение 2.1.1. *Марковским случайным процессом с дискретным временем называется такой процесс, у которого переходы из одного состояния в другое возможны в строго определённые, заранее заданные моменты времени* $t_1, t_2, \ldots, t_k$*, называемые шагами процесса. Такой процесс называется цепью Маркова или процессом с дискретным параметром T, который может быть процессом с конечным или бесконечным множеством состояний.*

Определение 2.1.2. *Марковским случайным процессом с непрерывным временем называется такой процесс, у которого переход из одного состояния в другое возможен в любой момент времени t.*

Случайные процессы, в том числе марковские, могут быть с дискретным числом состояний. В этом случае они называются **дискретными случайными процессами**. Число состояний является счётным конечным или бесконечным. И выделяют класс непрерывных случайных процессов, для которых возможно бесконечное множество состояний.

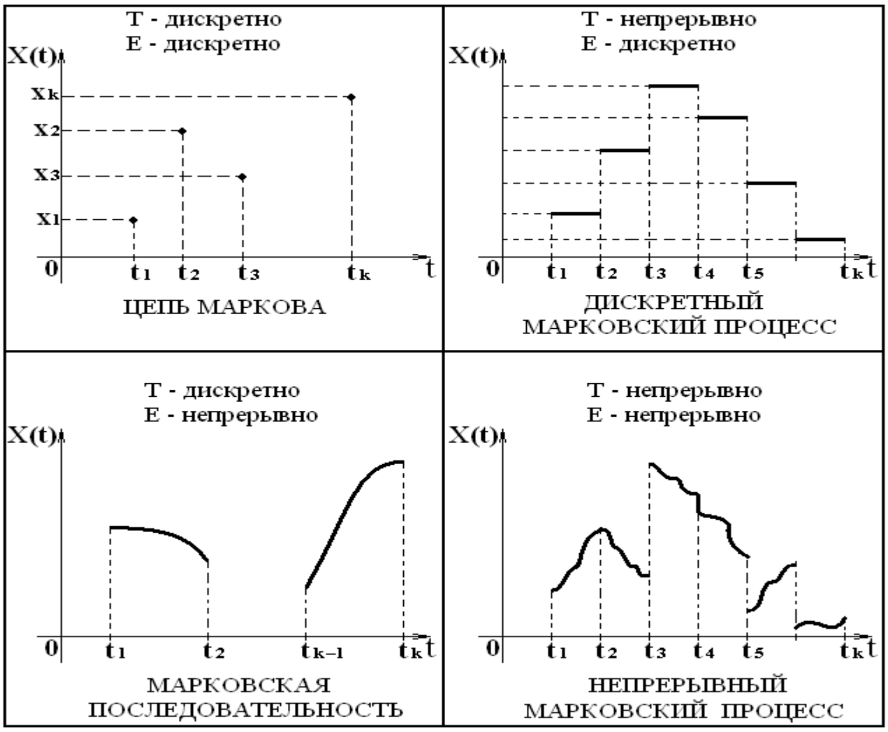


Рис. 3. **Классификация марковских случайных процессов**

2.2. Вероятностные характеристики цепей Маркова

Пусть $E=\{e_0,e_1,...,e_k,...\}$ – некоторое конечное или счетное множество состояний. Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_n\}$, $n=0,1,...$, которые принимают значения из заданного множества с вероятностями $P_k(n)=P\{X_n=e_k\}$, $k=0,1,...$. Таким образом, X_n – случайная величина с дискретным (конечным или счетным) множеством состояний *E*. Случайную последовательность $\{X_n\}$, $n=0,1,...$ указанного типа называют дискретной цепью.

Определение 2.2.1. *Случайная последовательность* $\{X_n\}$ *называется дискретной цепью Маркова*[7]*, если она является дискретной цепью и обладает марковским свойством, т.е. для любых* $n\geq 1$ *и любых элементов* $e_0,e_1,...,e_n$ *множества E выполнено равенство:*

---

[7] В данном разделе меняется только терминология для изучения цепей Маркова в различных приложениях. Выражение "результатом *n*-го испытания оказалось событие E_n" заменяется на следующее – "в момент времени n система находится в состоянии E_n"; термин "условная вероятность p_{ij}" заменяется на термин "вероятность перехода системы из состояния E_i в состояние E_j".

$$P\{X_n = e_n / X_{n-1} = e_{n-1}, ..., X_0 = e_0\} = P\{X_n = e_n / X_{n-1} = e_{n-1}\}.$$

Из определения следует, что дискретная цепь Маркова является частным случаем марковского процесса. Будем считать, что пространство Е – измеримое множество, в котором все одноточечные множества также измеримы. Если в момент $n \geq 1$ произошло событие $\{X_n = e_k\}$, то говорят, что цепь Маркова находится в состоянии e_k. Если же известно, что для всех $n \geq 1$ выполнено $\{X_{n-1} = e_k\}$ и $\{X_n = e_{k+1}\}$, то говорят, что цепь на n–м шаге перешла из состояния e_k в состояние e_{k+1}. Если E имеет конечное число состояний, то соответствующая цепь Маркова называется **конечной**.

Определение 2.2.2. *Вероятность случайной величины X_n попасть в состояние j, если известно, что X_{n-1} находится в состоянии i, называется одношаговой переходной вероятностью и обозначается p_{ij}.*

По определению: $p_{ij} = P\{X_n = j / X_{n-1} = i\}$, $i, j \in E$.

Определение 2.2.3. *Матрица P, элементами которой являются вероятности перехода p_{ij}, называется переходной матрицей цепи Маркова $\{X_n\}$ за один шаг (матрица перехода).*

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Матрица перехода является стандартным способом представления цепей Маркова. Переходная матрица обладает свойствами:

1) $0 \leq p_{ij} \leq 1$, для любых $i, j = 0,1...$.

2) $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$, $\forall i = 0,1...$.

Матрица, удовлетворяющая свойствам 1,2, называется **стохастической**. Стохастические матрицы, удовлетворяющие дополнительному условию – суммы элементов в каждом столбце равны 1, называются **дважды стохастическими**.

Пример 2.2.1. Имеется случайное блуждание системы, которое интерпретируется как положение движущейся частицы по числовой оси. Если частица находится в состоянии е, то за один шаг она может перейти в одно из своих соседних состояний (e-1) или (e+1) или остаться в e. Причем

$P\{X_{t+1} = e+1/X_t = e\} = p$;

$P\{X_{t+1} = e-1/X_t = e\} = q$;

$P\{X_{t+1} = e/X_t = e\} = 0$.

Постройте матрицу переходных вероятностей, если:

а) процесс, достигнув состояния e_1 или e_5 остается там навсегда (e_1, e_5 – поглощающие состояния) ;

б) процесс, достигнув одного из граничных состояний e_1 или e_5, направляется в центральное состояние e_3, где e_1 и e_5 граничные состояния.

Решение .

Матрицы переходных вероятностей имеют вид:

а) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ б) $$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Поскольку вероятности зависят только от текущей позиции, а не от каких-либо предыдущих позиций, то случайное блуждание удовлетворяет определению цепи Маркова.

Пример 2.2.2. Предположим, что бакалавр с вероятностью p каждый год выбывает из университета, с вероятностью q остается на том же курсе на следующий год, и с вероятностью r переходит на следующий курс. Постройте матрицу переходных вероятностей, введя состояния: e_1 – выбыл, e_2 – окончил, e_3 – 4-й курс e_4 – 3-й курс, e_5 – 2-ой курс, e_6 – 1-ый курс.

Решение.

Матрица переходных вероятностей примет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & r & q & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & r & q & 0 & 0 \\ p & 0 & 0 & r & q & 0 \\ p & 0 & 0 & 0 & r & q \end{pmatrix}$$

Определение 2.2.4. *Цепь Маркова называется однородной, если для всех* $n \geq 1$ *переходные вероятности не зависят от номера испытания (шага), т.е. остаются постоянными в ходе процесса:* $p_{ij}(n) = p_{ij}$.

Определение 2.2.5. *Вероятность* $p_k(n) = P\{X_n = e_k\}$, $e_k \in E$ *называется вероятностью состояния* e_k *в момент времени* $n \geq 0$. *Вектор*

$p(n)=\left(p_0(n), p_1(n),...\right)$ *называется распределением вероятностей состояний цепи Маркова* $\{X_n\}$ *в момент* $n \geq 0$.

Очевидно, что $p(n)$ удовлетворяет при каждом $n<\infty$ условию нормировки: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(n)=1$. Компоненты вектора $p(n)$ показывают, какие из возможных состояний цепи Маркова в момент n являются наиболее вероятными, а какие нет. Процесс полностью определен, если задана матрица переходных вероятностей и вероятности начальных состояний.

Теорема 2.2.1. *Пара* $(P, p(0))$ *полностью описывает вероятностную структуру однородной цепи Маркова*.

Доказательство. Пусть $P\{X_0 = e_0\} = p_{i_0}$.

По определению условной вероятности имеем:

$$P\{X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_n = e_n\} =$$
$$= P\{X_n = e_n / X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_{n-1} = e_{n-1}\} \times P\{X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_{n-1} = e_{n-1}\}.$$

Но по определению марковского процесса:

$$P\{X_n = e_n / X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_{n-1} = e_{n-1}\} = P\{X_n = e_n / X_{n-1} = e_{n-1}\} = p_{i_{n-1}i_n}.$$

Используя последние два равенства, получим:

$$P\{X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_n = e_n\} =$$
$$= P\{X_n = e_n / X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_{n-1} = e_{n-1}\} \cdot p_{i_{n-1}i_n}.$$

Используя индукцию, окончательно имеем:

$$P\{X_0 = e_0, X_1 = e_1, ..., X_n = e_n\} = p_{i_0} \prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1}i_k}. \qquad (2.2.1)$$

или в векторной форме: $p(n) = p(0)P^n$.

Замечание 2.2.1. Если $p_{kj}^{(m)}(n) = P\left\{X_{n+m} = e_j / X_n = e_k\right\}$ – вероятность перехода их состояния e_k в состояние e_j за $m \geq 1$ шагов, то для однородной цепи Маркова имеем:

$$p(n+m) = p(n)P^m.$$

Первая задача в теории цепей Маркова состоит в определении вероятности перехода из состояния *i* в состояние *j* за *m* шагов. Пусть $\{X_n\}$ – цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей *P* и множеством состояний *E*. Матрица переходных вероятностей определяет вероятности перехода за

1 шаг. Пользуясь формулой (11.2.1), можно найти вероятности переходов за m шагов $P\{X_{n+m} = j / X_n = i\} = p_{kj}^{(m)}$, суммируя вероятности по всем возможным значениям.

Пример 2.2.3. Пусть p(0) = (0; 0; 1; 0; 0) и $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: p(1), p(2), p(3).

Решение.

$$p(1) = p(0) \cdot P = (0; 0; 1; 0; 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (0; \tfrac{1}{2}; 0; \tfrac{1}{2}; 0);$$

$$p(2) = p(1) \cdot P = (0; \tfrac{1}{2}; 0; \tfrac{1}{2}; 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\tfrac{1}{4}; 0; \tfrac{1}{2}; 0; \tfrac{1}{4});$$

$$p(3) = p(2) \cdot P = (\tfrac{1}{4}; 0; \tfrac{1}{2}; 0; \tfrac{1}{4}) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{4}; 0; \tfrac{1}{4}; \tfrac{1}{4}).$$

Теорема 2.2.2. *Для однородной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P при любом* $m \ge 1$ *справедливо равенство:* $P^{(m)} = P^m$.

Доказательство. Так как по формуле полной вероятности при $\forall k \in \{1, 2, ..., m-1\}$ и $\forall i, j \in T$

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{r=1}^{n} p_{ir}^{(k)} p_{rj}^{(m-k)}, \qquad (2.2.2.)$$

то согласно (2.2.2) между матрицей с различными индексами существует соотношение $P^{(m)} = P^{(k)} P^{(m-k)}$.

В частности, при $m = 2$ находим, что

$$P^{(2)} = P^{(1)}P^{(1)} = \left(P^{(1)}\right)^2 = P^2,$$

при $m = 3$:

$$P^{(3)} = P^{(1)}P^{(2)} = \left(P^{(1)}\right)^3 = P^3.$$

И при $\forall m$ получим: $P^{(m)} = P^m$.

Доказательство (2.2.2) закончено.

Пример 2.2.4. Через фиксированные промежутки времени проводится контроль технического состояния прибора, который может находиться в одном из 3-х состояний: e_0 – работает; e_1 – не работает и ожидает ремонта; e_2 – ремонтируется. Пусть X_n – номер состояния прибора при n – проверке. Предполагается, что $\{X_n\}$ является однородной ЦМ с переходной матрицей $P = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & p_{02} \\ 0{,}3 & p_{11} & 0{,}60 \\ p_{20} & 0{,}01 & 0{,}29 \end{pmatrix}$. Найдите неизвестные элементы матрицы и вычислите $p(2)$ при условии, что в момент времени n прибор исправен.

1) Так как $\sum_{j=0}^{n} pij = 1$, то $p_{02} = 0{,}1$; $p_{11} = 0{,}1$; $p_{20} = 0{,}7$.

2) $p(2) = p(0) \cdot P^2$

По условию задачи $p(0) = (1; 0; 0)$. Следовательно,

$p(2) = p(0) \cdot P^2 = (1; 0; 0) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}01 & 0{,}29 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}6 \\ 0{,}7 & 0{,}01 & 0{,}29 \end{pmatrix} = (0{,}74; 0{,}091;$ $0{,}169)$;

Допустим, что в системе протекает марковский дискретный процесс с дискретным временем. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – возможные состояния системы и $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – шаги, в которые система может переходить из состояния в состояние, то есть имеем цепь Маркова.

Определение 2.2.6. *Цепь Маркова называется неоднородной, если переходные вероятности (хотя бы одна) зависят от номера испытания (шага) k.*

В этом случае переходные вероятности будем обозначать $p_{ij}(k)$. Тогда матрица переходных вероятностей будет зависеть от k:

$$P(k)=\begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}.$$

Для неоднородной цепи Маркова вектор распределения вероятностей состояний определяется как

$$\left(p_1(k), p_2(k), ..., p_n(k)\right) = \left(p_1(k-1), p_2(k-1), ..., p_n(k-1)\right) P^{(k)} . \quad ....(2.2.3)$$

Так же для неоднородной цепи имеет место следующая формула:

$$\left(p_1(k), p_2(k), ..., p_n(k)\right) = \left(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0)\right) P^{(1)} P^{(2)} ... P^{(k)} \quad .... (2.2.4)$$

Вероятности состояний $p_i(k)$ $i=1,2...$ неоднородной цепи Маркова на каждом шаге вычисляются либо по рекуррентной формуле (2.2.3), либо по формуле (2.2.4), где $\left(p_1(0), p_2(0), ..., p_n(0)\right)$ – вектор начального распределения вероятностей состояний системы.

2.3. Примеры цепей Маркова

Большое число физических, биологических и экономических явлений описываются цепями Маркова.

Пример 2.3.1. Пространственно-однородные цепи Маркова

Пусть дискретная случайная величина ξ принимает неотрицательные целочисленные значения, причем $P\{\xi=1\}=p_i$, $p_i \ge 0$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, ...$ – результаты независимых наблюдений случайной величины ξ.

а) Определим процесс $\{X_n\}$, $n=0,1,2...$, положив $X_n=\xi_n$, где $X_0=\xi_0$ задано. Матрица переходных вероятностей этого процесса имеет вид

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_0 & p_1 & \cdots & p_n \end{pmatrix}.$$

У P все строки одинаковы, следовательно, случайная величина X_{n+1} не зависит от случайной величины X_n.

б) Определим процесс $\{X_n\}$, $n=0,1,2...$, положив $X_n = S_n$, где $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$. Считаем, что $S_0 = 0$. Найдем матрицу переходных вероятностей.

$$P\{X_{n+1} = j / X_n = i\} = P\{\xi_1 + ... + \xi_{n+1} = j / \xi_1 + ... + \xi_n\} = P\{\xi_{n+1}\} = \begin{cases} p_{i-j}, i \ge j \\ 0, i < j \end{cases}.$$

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ \cdots & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & p_0 & p_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & p_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Процесс $\{X_n\}$ образует ЦМ.

Пример 2.2.2. Одномерные случайные блуждания

Пусть $\eta_1, \eta_2, ...$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. $P\{\eta_k = 1\} = p$, $P\{\eta_k = -1\} = q$, а последовательность $\{\xi_t\}$ строится по правилу

$$\xi_t = max\{\xi_{t-1} + \eta_t, 0\}, \quad t = 0, 1, 2, ...$$

и называется случайным блужданием на множестве неотрицательных целых чисел с отражающим экраном в 0.

$$P\{\xi_{t+1} = i + 1/\xi_t = i\} = p,$$

$$P\{\xi_{t+1} = i - 1/\xi_t = i\} = q = 1 - p, i \ \ge 1,$$

$$P\{\xi_{t+1} = 0/\xi_t = 0\} = q.$$

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & ... \\ q & 0 & p & 0 & ... \\ 0 & q & 0 & p & ... \\ 0 & 0 & q & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}.$$

Пример 2.3.3. Модель Эренфестов для процесса диффузии

Эта модель представляет собой цепь с $(n + 1)$ состояниями и возможными переходами только в состояния, соседние справа и слева. Тогда переходные вероятности определяются равенствами:

$$p_{k,k+1} = 1 - \frac{k}{n}, \quad p_{k,k-1} = \frac{k}{n}.$$

Цепь имеет две физические интерпретации. Подробно рассмотрим первую модель, названную по имени Пауля и Татьяны Эренфестов. Ученые физики описали мысленный эксперимент, при котором перемещали n частиц по двум сосудам. В каждый момент времени $t = 0, 1, \ldots$ случайно, равновероятно и независимо от предыстории выбирается одна из n частиц и перемещается в другой сосуд. Пусть ξ_t – число частиц в первом сосуде в момент t. Состоянием процесса считается число частиц $(0, 1, 2, \ldots, n)$ в первом сосуде, и переходные вероятности имеют вид:

$$P\{\xi_{t+1} = k - 1/\xi_t = k\} = \frac{k}{n}, \qquad P\{\xi_{t+1} = k + 1/\xi_t = k\} = 1 - \frac{k}{n}.$$

Тогда

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{n} & 0 & 1-\frac{1}{n} & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 0 & 1-\frac{2}{n} & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-\frac{2}{n} & 0 & \frac{2}{n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1-\frac{1}{n} & 0 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, эксперимент Эренфестов описывается цепью Маркова. Со второй интерпретацией, представляющей случайное блуждание, в которой вероятность перемещения изменяется при изменении положения (диффузия при наличии центральной силы), читатель подробно может познакомиться в книге [23].

Пример 2.3.4. Ветвящиеся процессы[8]

Предположим, что организм в конце своего времени жизни производит случайное число ξ потомков согласно распределению вероятностей

[8] В 1873–1874 г. Гальтон и де Кандоль указали на ряд примеров исчезновения фамилий английских лордов. Ими, возможно, впервые был поставлен вопрос: какова вероятность исчезновения популяции с течением времени? Модель такой ситуации была предложена и частично решена священником Ватсоном в 1874 г. Полный анализ модели, которая сегодня называется ветвящимся процессом, был закончен Стефансом в 1930 г. Сам же термин "ветвящиеся процессы" был введен А.Н. Колмогоровым. Бурное развитие теории ветвящихся процессов началось с известных работ А.Н. Колмогорова – "Ветвящиеся случайные процессы", "Вычисление финальных вероятностей", выполненных совместно с его учениками Н.А. Дмитриевым и Б.А. Севастьяновым

$$P\{\xi = k\} = p_k, k = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$ В свою очередь потомки независимо друг от друга в конце своего времени жизни производят потомство, согласно того же распределения. Процесс $\{X_n\}$ – марковская цепь, где X_n – численность популяции в –ом поколении. Действительно, если задано значение, например, $X_0 = 1$, то матрица переходных вероятностей определяется

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j/X_n = i\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i = j\},$$

где $\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i$ – общее число потомков.

Подобные процессы служат не только для математического описания роста популяции, но и других явлений, связанных с ветвлением, например, распространение инфекции, химические или ядерные реакции и др.

2.4. Классификация состояний цепей Маркова

Будем рассматривать только однородные цепи Маркова. Пусть E – множество состояний цепи Маркова, $p_{i,j}^{(n)} = P\{\xi_n = j / \xi_0 = i\}$ – вероятность перехода за n шагов из состояний i в состояние j; $f_{ii}^{(n)} = P\{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i/X_0 = i\}$ – вероятность первого возвращения за n шагов в состояние i.

Определение 2.4.1. *Состояние $i \in E$ называется несущественным, если найдется $j \in E$, такое что $p_{ij}^{(m)} > 0$ для некоторого $m \geq 1$, но $p_{ji}^{(n)} = 0$ для всех $n \geq 1$. В противном случае состояние i называется существенным.*

Пример 2.4.1. В цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1, \alpha, \beta, \gamma > 0$$

состояние e_1 несущественно: $p_{11}^{(n)} = \alpha^n \to 0$;

$$p_{12}^{(n)} = (1 - p_{11}^{(n)})\frac{\beta}{\beta+\gamma};\ p_{13}^{(n)} = (1 - p_{11}^{(n)})\frac{\gamma}{\beta+\gamma}.$$

Определение 2.4.2. *Состояние i называется поглощающим, если* $p_{ii} = 1$.

В примере 1 состояния e_2 и e_3 – поглощающие.

Определение 2.4.3. *Состояния $i, j \in E$ называются сообщающимися, если найдутся такие $m, n \geq 1$, что $p_{ij}^{(m)} > 0$ и $p_{ji}^{(n)} > 0$. Сообщающиеся состояния всегда существенны.*

Обозначение $i \leftrightarrow j$.

Свойства:

1) рефлексивность: $i \leftrightarrow i$;

2) симметричность: если $i \leftrightarrow j$, то $j \leftrightarrow i$;

3) транзитивность: если $i \leftrightarrow j$ и $j \leftrightarrow k$, то $i \leftrightarrow k$.

Из свойств 1–3 следует, что все множество состояний E можно разбить на классы эквивалентности. Состояния объединяются в один класс, если они сообщаются друг с другом.

Пример 2.4.2. На дороге имеется две таверны на расстоянии 80 шагов. Находящийся в одном состоянии — 0, 1, 2,…10 шагов от первой таверны Индеец Джо с вероятностью 0,3 делает шаг влево, с вероятностью 0,4 вправо, и с вероятностью 0,3 остается на месте. При этом, попав в одну из таверн, он уже оттуда не выходит.

По условию задачи можно построить цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 00 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & & 00 \\ 0 & 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 & 00 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Состояния 1, 2, …, 9 являются сообщающимися, т. к. существует вероятность того, что за некоторое число шагов Индеец Джо может попадать из любого из этих состояний в любое другое. Состояния 0 и 10 являются поглощающимися, т.к. попав в одно из этих множеств, злодей остается там надолго.

Определение 2.4.4. *Цепь Маркова, состоящая из одного класса сообщающихся состояний, называется неразложимой. Если она содержит более одного класса сообщающихся состояний, то она разложима (на классы).*

Пример 2.4.3. Пусть цепь Маркова имеет следующую матрицу переходных вероятностей:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}.$$

Состояния цепи Маркова распадаются на 2 класса сообщающихся состояний: $\{e_1, e_2\}$ и $\{e_3, e_4, e_5\}$. В зависимости от начального состояния процесс развертывается либо только в первом классе состояний, и его переходы описываются подматрицей P_1, либо только во втором классе и его переходы описывается подматрицей P_2.

Определение 2.4.5. *Пусть d_i – НОД чисел $\{n \geq 1 : p_{i,j}^{(n)} > 0\}$. Состояние i называется периодическим с периодом d_i, если $d_i > 1$. В противном случае состояние – апериодическое.*

Пример 2.4.4. На риунке 4 графически представлена периодическая цепь Маркова. Для состояния e_1 возможны два способа возврата: $e_2 \to e_3 \to e_1$ или $e_2 \to e_3 \to e_4 \to e_5 \to e_3 \to e_1$. Длина пути составляет 3 и 6, следовательно, период состояния e_1 равен 3.

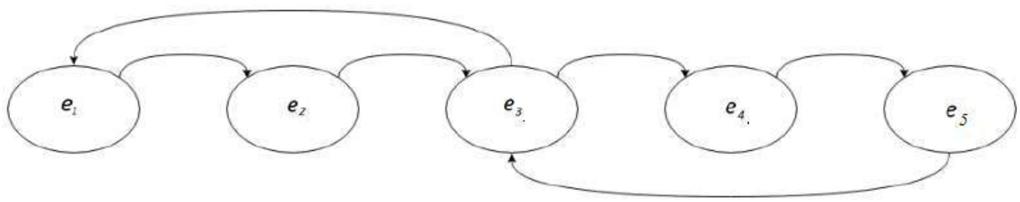


Рис. 4. **Граф периодической цепи Маркова**

Пример 2.4.5. Пусть $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда $P^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^4 = P$ и т.д.

Следовательно, $P_{i,j}^{(n)} = \begin{cases} 1, если\_n \equiv j - i (\mathrm{mod}\_3) \\ 0\_в\_остальных\_случаях \end{cases}.$

Пример 2.4.6. Добавим на графе рис. 4 пару дополнительных ребер. Возможные длины пути для состояния e_1 теперь составляют 3, 5, 7….. .

НОД длин равен 1, следовательно, состояние e_1 является апериодическим. Аналогично можно показать и для состояния e_2 (длина пути составляет 2, 3, 4, 5, ..).

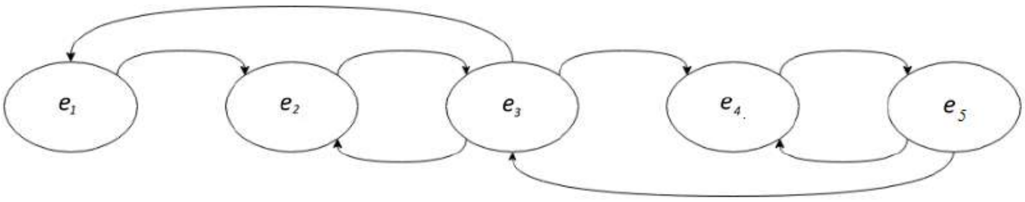


Рис. 5. **Граф апериодической цепи Маркова**

Примем без доказательства следующие утверждения:

1. Если $i \leftrightarrow j$*, то* $d(i) = d(j)$.

Это утверждение определяет период как характеристику класса сообщающихся состояний.

2. Если состояние i *имеет период* $d(i)$*, то* $\exists N < \infty$ *и* $p_{ij}^{(nd(i))} > 0$ *для всех* $n > N$.

Этим утверждается, что возвращение в состояние i может происходить во все достаточно далёкие моменты времени, кратные периоду d(i).

Определение 2.4.6. *Существенное состояние* $i \in E$ *называется возвратным, если* $\exists n < \infty$ *такое что* $P\{X_n = i/X_0 = i\} = 1$*, и невозвратным, если* $P\{X_n = i/X_0 = i\} < 1$.

Определение 2.4.7. *Существенное состояние* $i \in E$ *называется возвратно нулевым, если* $p_{ii}^{(n)} \to 0$*, при* $n \to \infty$.

Определение 2.4.8. *Неразложимая цепь Маркова называется апериодической, если все ее состояния апериодические.*

Для неразложимой цепи Маркова справедливы свойства:

а) если хотя бы одно состояние возвратно, то и все другие – возвратны;

б) если хотя бы одно состояние нулевое, то и все другие – нулевые;

в) если хотя бы одно состояние имеет период $d > 1$, то и все остальные – периодичны с периодом d.

Таким образом, неразложимая цепь Маркова будет апериодической, если хотя бы одно из ее состояний апериодическое.

Теорема 2.4.1 (критерий возвратности). *Состояние i являются возвратными тогда и только, когда*

$$p_i = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

Доказательство. Пусть $\upsilon_n = f_{i,i}^{(n)}$ вероятность впервые вернуться из состояния i в состояние i через n шагов, тогда $w_n = \sum_{m=0}^{n} p_{i,j}^{(m)} p_{i,j}^{(n-m)}$ – вероятность любым способом вернуться в состояние *i* через *n* шагов (вначале через *m* шагов, а затем через оставшиеся (*n – m*) шагов). С учетом введенных обозначений по формуле полной вероятности можно записать:

$\omega_n = v_0\omega_n + v_I\omega_{n-1} + \dots + v_n\omega_0.$

и пусть $v_0 = 0, \omega_0 = 1$. Обратимся к производственным функциям:

$$V(z) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m z^m, \quad W(z) = \sum_{m=0}^{\infty} w_n z^m$$

Полученные соотношения между коэффициентами выражают равенство

$W(z) - \omega_0$=W(z)V(z), $\omega_0 = 1$.

Отсюда *W(z) = 1/(1-V(z))*. По определению возвратности состояния *i* следует, что

$$v = \sum_{m=0}^{\infty} v_m = \lim_{z\to 1} V(z) = 1.$$

Тогда

$$\lim_{z\to 1} W(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1 - V(z)} = \infty.$$

Но

$\lim_{z\to 1} W(z) = \lim_{z\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n,$

и, таким образом, возвратность состояния *i* равносильна тому, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n$ расходится, где $\omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$.

Доказательство (2.4.1) закончено.

Пример 4.2.7. Рассмотрим одномерное случайное блуждание по целочисленной решётке *i = 0,±1,±2,…*. За каждый период частица с вероятностью p перемещается на единицу вправо и с вероятностью q – на единицу влево. Очевидно, что $p_{ii}^{(2n+1)} = 0$, а

$$p_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n q^n.$$

Используя формулу Стирлинга n! ~ $\sqrt{2\pi n n^n e^{-n}}$, получаем;

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{(pq)^n 2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то есть все состояния нулевые. Применяя критерии возвратности, заключаем, что при симметричном случайном блуждании, т.е. когда $p = q = \frac{1}{2}$, то $p_{ii}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} = \infty$, все состояния возвратны. Таким образом, одномерное случайное блуждание возвратно тогда и только тогда, когда $p = q = \frac{1}{2}$. Если $p \neq q$, то $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(2n)} < \infty$; то каждое состояние i является невозвратным.

Теорема 2.4.2. *Если исходное состояние i является возвратным, то система с вероятностью 1 за бесконечно много число шагов бесконечно много раз возвращается в i. Если это состояние является невозвратным, то за бесконечное число шагов система с вероятностью 1 лишь конечное число раз побывает в состоянии i.*

2.5. Стационарное распределение цепи Маркова

Существенной характеристикой случайных процессов является их поведение при $n \to \infty$. Рассмотрим однородную цепь Маркова.

Теорема 2.5.1. Теорема Маркова[9]. *Если при некотором $n < \infty$ все элементы матрицы положительны, то существуют такие постоянные числа p_j, $j \in \{1,2,\dots,n\}$, что независимо от индексов i существуют пределы: $lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j$, где $\sum_{i=1}^{k} p_j = 1, p_j > 0$. Пределы p_1, p_2, ..., p_k не зависят от начального состояния и являются единственным решением системы уравнений $p_i = \sum_{i=1}^{k} p_i p_{ji}$.*

Физический смысл теоремы следующий: вероятность системы находится в состоянии j, практически не зависит от того, в каком состоянии она находилась в далёком прошлом.

Определение 2.5.1. *Распределение вероятностей p_j^*, $j = 0, \pm 1, \dots$, $\sum_j p_j^* = 1$ называют стационарным для однородной цепи Маркова $X_n, n \geq 0$, если при заданном начальном распределении в последующие моменты времени распределение вероятностей $p_j(n) = P\{X_n = j\}$ остаётся неизменным при всех $n \geq 0$: $p_j(n) = p_j^*$ или в общем виде $\lim_{k\to\infty} p(n) P^k = p^*$.*

---

[9] С доказательством теоремы читатель может ознакомиться в книге [6].

Определение 2.5.2. *Цепь Маркова, удовлетворяющая условиям теоремы Маркова, называется эргодической, а распределение вероятностей* $p^* = (p_0, p_1, \ldots)$ *— стационарным распределением цепи Маркова.*

Примем без доказательства следующую теорему.

Теорема 2.5.2. *Для того чтобы конечная цепь Маркова была эргодической, необходимо и достаточно, чтобы она была неразложимой и апериодичной.*

Пример 2.5.1. Цепь Маркова задана матрицей переходных вероятностей $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти стационарное распределение вероятностей.

Решение. Цепь Маркова является неразложимой и апериодической, следовательно, эргодической.

$\begin{cases} p_1 = 0{,}3p_1 + p_2 \\ p_2 = 0{,}7p_1 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$, решив систему уравнений, получим: $\begin{cases} p_1 = 10/17 \\ p_2 = 7/17. \end{cases}$

Следовательно, вектор стационарного распределения имеет вид $\left(\frac{10}{17}; \frac{7}{17}\right)$, т.е. система в далеком будущем вероятнее будет находиться в первом состоянии.

Пример 2.5.2. В городе N каждый житель имеет одну из профессий A, B или C. Дети в следующем поколении сохраняли профессию отцов с вероятностью 0,6; 0,2 и 0,4 соответственно и с равными вероятностями выбирали любую из 2х других профессий. Если в данный момент профессию A имеет 20% жителей, B – 30%, C – 50%, то

1) какое распределение по профессиям будет в следующем поколении?

2) каким будет распределение по профессиям через много поколений?

Решение. Составим вектор начального распределения согласно условию задачи: $p(0) = (0{,}2; 0{,}3; 0{,}5)$

Тогда матрицу распределения вероятностей можно записать следующим образом:

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

1) $p(1)=p(0)\cdot \mathrm{P}=(0{,}2; 0{,}3; 0{,}5) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{pmatrix} =(0{,}39; 0{,}25; 0{,}36).$

2) $\begin{cases} p_1 = 0{,}6p_1 + 0{,}4p_2 + 0{,}3p_3 \\ p_2 = 0{,}2p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}3p_3 \\ p_3 = 0{,}2p_1 + 0{,}4p_2 + 0{,}4p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$. Решив систему, имеем $\begin{cases} p_1 = \dfrac{18}{39} \\ p_2 = \dfrac{9}{39} \\ p_3 = \dfrac{12}{39} \end{cases}$.

Вектор распределения профессий в будущем имеет вид:(18/39; 9/39; 12/39).

Таким образом, все многообразие марковских цепей подразделяется на эргодические и разложимые. Разложимые цепи Маркова содержат невозвратные состояния, называемые поглощающими. Из поглощающего состояния нельзя перейти ни в какое другое.

Для эргодических цепей Маркова возможен переход из любого состояния i в любое состояние j за конечное число шагов. Для эргодических цепей при достаточно большом времени функционирования $(n \to \infty)$ наступает стационарный режим, при котором вероятности p_j — состояние системы не зависят от времени и не зависят от распределения вероятностей в начальный момент времени.

Контрольные вопросы и задачи по теме 2

1. В чем состоит принципиальное отличие марковского процесса с дискретными состояниями от цепи Маркова?

2. Чем неоднородная цепь Маркова отличается от однородной?

3. Как задается дискретная марковская цепь?

4. Приведите классификацию состояний цепи Маркова.

5. Как с помощью матрицы переходных вероятностей для цепи Маркова можно определить вероятности состояний после j шагов, если цепь Маркова является: а) однородной; б) неоднородной?

6. Имеется случайное блуждание по числовой оси, причем

$P\{x_{t+1}=e+1/x_t=e\}=p$, $P\{x_{t+1}=e-1/x_t=e\}=q$, $P\{x_{t+1}=e/x_t=e\}=0$. Постройте матрицу переходных вероятностей при условии:

а) частица, попав в положение e_1, на следующем шаге идёт в e_2; если же попала в состояние e_5, то на следующем шаге возвращается в e_4;

б) частица, достигнув одной из границ e_1 или e_5 перейдёт на другую границу.

7. В стране Оз климат весьма изменчив. Здесь никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно (N), то завтра будет снег (S) или дождь (R) с равной вероятностью. Если сегодня снег (или дождь) то с вероятностью 0,5 погода на следующий день не изменится. Если же она изменится, то в половине случаев будет ясно. Принимая в качестве состояний цепи различные виды погоды R, N, S, постройте матрицу переходных вероятностей.

8. На окружности расположены шесть точек $E_1,\ldots,E_6$, равноотстоящие друг от друга. Частица движется из точки в точки следующим образом: из данной точки она перемещается в одну из ближайших точек с вероятностью 0,25 или диаметрально противоположную с вероятностью 0,5. Построить матрицу переходных вероятностей.

9. Вероятности погодных условий представлены матрицей переходных вероятностей $\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, в которой солнечный день сменяется солнечным с вероятностью 0,8, а дождливый день другим дождливым днем с вероятностью 0,5. Построить матрицу перехода, представляющую модель погоды, на один день (завтра).

10. Цель (самолет) обстреляна из зенитного автомата очередью в четыре снаряда. Возможны состояния цели: i_1- цель невредима; i_2- цель получила незначительные повреждения; i_3- цель получила существенные повреждения, но еще может функционировать; i_4- цель поражена. Определить матрицы переходных вероятностей после каждого выстрела, если матрица переходных вероятностей имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0 & 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0 & 0 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Пусть в начальный момент времени система с равной вероятностью находится в одном из возможных состояний, изображаемых точкой на оси ох: x=-1 – состояние S_1; x=0 – состояние S_2; x=1 – состояние S_3; x=2 – состояние S_4. В зависимости от случая точка может перемещаться вправо или влево на единичное расстояние: вправо с вероятностью 1/6, влево с вероятностью 5/6. Из состояний S_1 и S_4 перемещения невозможны. Определить вероятности на втором шаге.

12. Предположим, что в стране Оз процесс имеет вектор начального распределения p=(2/5;1/5;2/5). Найдите p(1), p(2), p(n).

13. Сегодня в стране Оз хорошая погода. Какая погода наиболее вероятна послезавтра?

14. Для однородной цепи Маркова задана матрица переходных вероятностей и вектор вероятностей на нулевом шаге: $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,4 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$, p=(1;0;0). Найдите векторы вероятностей состояний после первого и второго шагов.

15. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид $P=\begin{pmatrix} 0,61 & 0,17 & 0,22 \\ 0,51 & 0,20 & 0,29 \\ 0,60 & 0,29 & 0,11 \end{pmatrix}$. Распределение по состояниям в момент времени t=0 определяется вектором p=(0,53;0,10;0,37). Найти распределение вероятностей по состояниям в момент времени t=1; 2.

13. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид $P=\begin{pmatrix} 0,36 & 0,28 & 0,36 \\ 0,21 & 0,55 & 0,24 \\ 0,44 & 0,41 & 0,15 \end{pmatrix}$. Распределение по состояниям в момент времени t=0 определяется вектором p=(0,23;0,47;0,3). Найти распределение вероятностей по состояниям в момент времени t=1; 2.

16. Погода на некотором острове бывает дождливой (e_1) и сухой (e_1). Вероятность ежедневных изменений погоды задана матрицей переходных вероятностей $P=\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$. Установите:

а) если сегодня дождь, то какова вероятность что послезавтра будет сухо?
б) если в среду ожидается дождливая погода, с вероятностью 0,3, то какова вероятность что она будет дождливой в ближайшую пятницу?

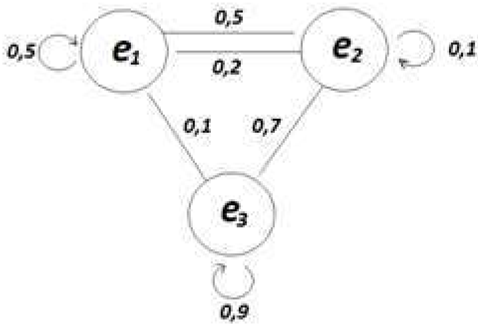
17. Игрок опускает монету в один из 2-х игровых автоматов. Вероятность выигрыша на первом автомате равна c, на втором – d. После проигрыша игрок продолжает игру на том же автомате. Постройте матрицу переходных вероятностей, положив c=0,5 и d=0,25. Определите вероятность того, что он играет с лучшим автоматом: а) во второй игре, б) в третьей игре, в) в четвертой игре, при условии, что выбор автомата для первой игры случаен.

18. Известна матрица переходных вероятностей однородной цепью Маркова.

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Определить вероятность состояний после двух шагов, если на нулевом шаге вероятности состояний одинаковы.

19. Граф состояний цепи Маркова изображен на рисунке. Вектор начального распределения состояний системы имеет вид $p(0) = (1; 0; 0)$. Найти наименьшее вероятное состояние на третьем шаге. Найти финальные вероятности состояний цепи.



20. Два дуэлянта поочередно стреляют друг в друга. Вероятность попадания в соперника стреляющим первым дуэлянтом при каждом выстреле равна $\frac{1}{4}$, вторым — $\frac{1}{2}$. Дуэль продолжается до первого попадания. Найти вероятность выигрыша первого дуэлянта.

21. В стране Лапландия климат изменчив. Здесь никогда не бывает двух ясных дней подряд. Если сегодня ясно, то завтра с одинаковой вероятностью пойдет дождь или снег. Если сегодня дождь (или снег), то с вероятностью 1/2 погода не изменится. Если же она изменится, то в половине случаев снег заменяется дождем или наоборот, и лишь в половине случаев на следующий день будет ясная погода. Требуется: а) принявв качестве состояний цепи различные виды погоды Д, Я, С, выписать матрицу перехода; б) определить вероятности хорошей погоды через три дня после дождя.

22. Центральный процессор мультипрограммной системы в любой момент времени выполняет либо программы пользователя, либо программы операционной системы, либо находится в состоянии ожидания. Продолжительность нахождения системы в каждом состоянии кратна длительности шага t. Определить коэффициент использования процессора, если задана матрица переходных вероятностей: $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0{,}8 & 0{,}05 & 0{,}15 \end{pmatrix}$.

23. Гипотетический фондовый рынок представлен тремя состояниями («бычий рынок», «медвежий рынок», «консолидирующий рынок») и матрицей переходных вероятностей, описывающей активность рынка на бирже. Определить вектор распределения вероятностей состояний рынка через три периода времени, если в настоящее время наблюдается растущий рынок.

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}075 & 0{,}025 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

24. Используя данные предыдущей задачи, рассчитайте долгосрочный прогноз финансового рынка, т. е. определите стационарное распределение вероятностей состояний рынка в будущем.

Тема 3. ДИСКРЕТНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ МАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС

В 1931 г. была опубликована статья А.Н. Колмогорова "Об аналитических методах в теории вероятностей", где были заложены основы теории марковских процессов. Получены уравнения (прямые и обратные), которые управляют вероятностями перехода. Общая теория марковских процессов была создана в 30–40 гг. работами А.Н. Колмогорова, В. Феллера, В. Деблина, П. Леви и др.

3.1. Вероятностные характеристики марковских процессов

Пусть $\{X(t)\}, t \geq 0$ — случайный процесс, принимающий значения при каждом t из множества E. Далее без ограничения общности будем считать, что $i_k = k, k = 0,1, \ldots$

Определение 3.1.1. *Случайная функция* $\{X(t)\}, t \geq 0$, *принимающая значения из множества E, называется марковским процессом с непрерывным временем и дискретным множеством значений, если для любых элементов* $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_{n-1} \leq s \leq t$ *и значений* $i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}, i, j \in E$ *выполнено* $P\{X(t) = j/X(s) = i, X(t_{n-1}) = i_{n-1}, \ldots, X(t_1) = i_1\} = P\{X(t) = j/X(s) = i.\}$

Определение 3.1.2. *Вероятностью перехода марковского процесса* $\{X(t)\}$ *называется функция*

$$p_{i,j}(s,t) = P\{X(t) = j/X(s) = i\}, \qquad \text{где } i,j \in E, 0 \leq s \leq t.$$

Замечание. *Из определения следуют свойства вероятностей перехода:*

1. $\sum_{j \in E} p_{ij}(s,t) = 1$ для всех $i \in E$.
2. $p_{ii}(t,t) = 1$ для всех $i \in E$.
3. $p_{ij}(t,t) = 0$ для всех $i \neq j$.

Возможные значения процесса $\{X(t)\}$, то есть элементы множества E, называют также состояниями процесса $\{X(t)\}$. Поэтому $p_{ij}(s,t)$ – вероятность перехода из состояния i в момент s в состояние j в момент $t, i, j \in E$.

Определение 3.1.3. *Вероятностью i–того состояния в момент времени t ≥ 0 называется величина*

$$p_i(t) = P\{X(t) = i\}, \text{где } i \in E.$$

Очевидно, что

$$p_i(t) \geq 0, \sum_{i \in E} p_i(t) = 1.$$

Между переходными вероятностями и вероятностями состояний имеется связь.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $0 \le s \le u \le t$, *тогда*

$$p_{ij}(s,t) = \sum_k p_{ik}(s,u) p_{kj}(u,t),$$

$$p_i(t) = \sum_k p_k(s) p_{ki}(s,t).$$

Доказательство. Доказывается по формуле полной вероятности.

Замечание. *Равенства, сформулированные в теореме (3.1.1), называются уравнениями Чепмена-Колмогорова.*

Определение 3.1.4. *Марковский процесс* $\{X(t)\}$ *называется однородным, если* $p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(0,t)$, *для всех* $i, j \in E,\ s,t \ge 0$.

Предположим, что при каждом $s \ge 0$ переходная плотность дифференцируема по t при любых $i, j \in E$.

Определение 3.1.5. *Интенсивностью (число актов в единицу времени) перехода* $\lambda_{ij}(t) \ge 0$ *из состояния* i *в состояние* j *в момент* $t \ge 0$ *называется величина* $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p_{ij}(t, t+h)}{h}$, $i \ne j$.

Пример 3.1.1. Показать, что интенсивности переходов однородного процессов не зависят от времени.

Решение. В силу однородности $p_{ij}(t, t+h) = p_{ij}(0,h)$, поэтому $\lambda_{ij}(t) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{p_{ij}(0,h)}{h} = \lambda_{ij}(0) = const$.

Далее мы будем рассматривать только однородные процессы, поэтому $\lambda_{ij}(t) = \lambda_{ij}$, $p_{ij}(s, s+t) = p_{ij}(t)$.

3.2. Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Наибольший практический интерес при исследовании процессов описанного типа представляет вычисление вероятностей его состояния в любой момент $t \ge 0$, если задано начальное распределение вероятностей состояния $p(0)$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $\{X(t)\}$ *— марковский процесс, причем для всех пар состояний i и j определены плотности вероятностей* $\lambda_{ij}, \lambda_{ji}$. *Тогда вероятности состояний системы* $\boldsymbol{p_i(t)}$ *довлетворяют системе уравнений Колмогорова:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_i}{\partial t} = -p_i(t)\sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\lambda_{ik} + \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} p_k(t)\lambda_{ki} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 \end{cases}.$$

Доказательство.

Используем равенство Колмогорова-Чепмена, а именно:

$$p_i(t+h) = \sum_k p_k(t)\cdot p_{ki}(h) \quad (3.2.1)$$

и используем определение интенсивности переходов, тогда

$$p_{ki}(h) = \lambda_{k\,i}h + 0(h).$$

Учитывая, что $\sum\limits_k p_{ik}(h) = 1$, получим

$$p_{ii}(h) = 1 - \sum_{i=1}^{n} p_{ik}(h) = 1 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}h + 0(h).$$

Подставляя последние два условия в равенство (3.2.1), выделив слагаемое $p_i(t)p_{ii}(h)$, имеем:

$$p_i(t+h) = p_i(t)(1 - \sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}h) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\lambda_{ki}h + 0(h);$$

$$\frac{p_i(t+h) - p_i(t)}{h} = -\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}p_i(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\lambda_{ki} + \frac{0(h)}{h}.$$

Для завершения доказательства переходим к пределу при $h\to 0$, получим:

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{n}\lambda_{ik}p_i(t) + \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\lambda_{ki}, \ i\in E,$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_i}{\partial t} = -p_i(t)\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{ik} + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(t)\lambda_{ki} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t) = 1 \end{cases} \qquad (3.2.2.)$$

Доказательство (3.2.1) закончено.

Полученные уравнения (3.2.2.) называются *дифференциальными уравнениями Колмогорова.*

Замечание. Система (3.2.2.) не является линейно независимой, так как имеет решение при каждом $p(0)=\{p_0(0), p_1(0), \ldots\}$.

Для практического составления уравнений Колмогорова удобно пользоваться графическим представлением процесса в виде стохастического графа.

Правило.

Вершинами графа являются состояния процесса. Стрелками указываются возможные переходы, а рядом с каждой стрелкой указывается соответствующая интенсивность перехода. В левой части каждого уравнения стоит дробь $\frac{\partial p_k}{\partial t}$, *в правой части столько слагаемых, сколько стрелок связано с состоянием* i_k. *Слагаемые берутся со знаком «плюс», если стрелка направлена к состоянию, и со знаком «минус», если стрелка выходит из состояния* i_k. *Каждое слагаемое равно произведению интенсивности перехода, указанной на стрелке, на вероятность того состояния, из которого стрелка выходит (рис. 4).*

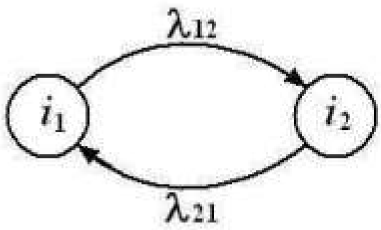


Рис. 6. **Граф марковского процесса с двумя состояниями**

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\lambda_{12} p_1 + \lambda_{21} p_2 \\ \frac{\partial p_2}{\partial t} = -\lambda_{21} p_2 + \lambda_{12} p_1 \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Пример 3.2.1. Двухпроцессорная вычислительная система предназначена для обработки простейшего потока задач, поступающих с интенсивностью λ. Производительность процессоров одинакова. Задача случайным образом принимается на обслуживание процессором. Если оба процессора заняты, пользователь получает отказ. Постройте граф функционирования данной системы и запишите систему дифференциальных уравнений Колмогорова по размеченному графу, если интенсивность решения задач первым процессором равна μ_1 ; вторым — μ_2

Решение.

Рассмотрим возможные состояния системы, которые определяются состояниями процессоров: i_0 – оба процессора простаивают; i_1 – первый процессор занят решением задач, второй простаивает; i_2 – второй процессор занят, первый простаивает; i_3 – оба процессора заняты решением задач. Граф функционирования системы имеет вид (рис. 5):

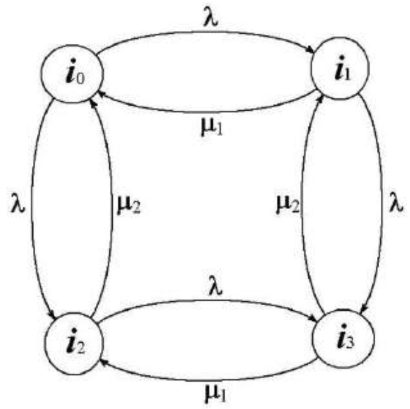


Рис. 7. **Граф марковского процесса, моделирующего работу двухпроцессорной вычислительной системы**

По графу запишем систему линейных дифференциальных уравнений А.Н. Колмогорова.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_0}{\partial t} = -2\lambda p_0 + \mu_2 p_2 + \mu_1 p_1 \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \mu_2 p_3 + \lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu_1 p_1 \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = \lambda p_1 + \lambda p_2 - \mu_2 p_3 - \mu_1 p_3 \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial t} = \mu_1 p_3 + \lambda p_0 - \mu_2 p_2 - \lambda p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_0}{\partial t} = -2\lambda p_0 + \mu_2 p_2 + \mu_1 p_1 \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = \mu_2 p_3 + \lambda p_0 - p_1(\lambda + \mu_1) \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = \lambda p_1 + \lambda p_2 - p_3(\mu_2 + \mu_1) \\ \dfrac{\partial p_3}{\partial t} = \mu_1 p_3 + \lambda p_0 - p_2(\mu_2 + \lambda) \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

Если требуется найти только предельные вероятности, то можно обойти решение довольно громоздкой проблемы Коши.

3.3. Эргодические свойства однородных марковских случайных процессов

Определение 3.3.1. *Марковский процесс* $\{X(t)\}$*, t≥0 называется эргодическим, если для любого начального распределения вероятностей состояний* $\{p_k(0), k \in E\}$ *предельные вероятности* $\lim\limits_{t\to\infty} p_k(t) = \tilde{p}_k$ *, k∈E, причем* $\{\tilde{p}_k, k \in E\}$ *не зависят от* $\{p_k(0), k \in E\}$ *и удовлетворяют условию:* $\tilde{p}_k \geq 0$, $\sum\limits_k \tilde{p}_k = 1$. *При этом распределение вероятностей* $\{\tilde{p}_k, k \in E\}$ *называется стационарным распределением процесса* $\{X(t)\}$.

Если выполнены условия, указанные в определении (3.3.1), то распределение $\{\tilde{p}_k, k \in E\}$ существует и удовлетворяет алгебраическим уравнениям Колмогорова:

$$\begin{cases} -\tilde{p}_i(t)\sum\limits_{\substack{k=1 \\ i\neq k}}^{n} \lambda_{ik} + \sum\limits_{\substack{k=1 \\ i\neq л}}^{n} \tilde{p}_k(t)\lambda_{ki} = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{p}_i(t) = 1 \end{cases}, \qquad (3.3.1)$$

причем решение системы единственно.

Замечание 3.3.1. Система уравнений (3.3.1) получается из системы дифференциальных уравнений (3.2.2), если положить $\dfrac{\partial p_i(t)}{\partial t} = 0, \quad p_i(t) = \tilde{p}_i$, *i* ∈*E*.

Замечание 3.3.2. Система (3.3.1) справедлива, если $\{X(t)\}$имеет конечное число сообщающихся состояний.

Пример 3.3.1. Рассмотрим простейшую задачу теории массового обслуживания – задачу о функционировании одноканальной системы обслуживания с отказами, на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ (заявка, заставшая канал занятым, покидает систему), а интенсивность обслуживания заявки равна величине μ. Определим предельные вероятности состояний рассматриваемого процесса.

Решение. В данном случае система имеет два возможных состояния: e_1 – канал свободен; e_2 – канал занят (рис. 6).

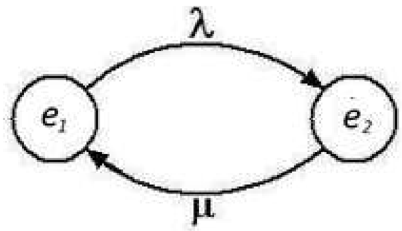


Рис. 8. **Графическое представление одноканальной системы обслуживания**

Математическая модель данного процесса массового обслуживания имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\lambda p_1 + \mu p_2 \\ \dfrac{\partial p_2}{\partial t} = -\mu p_2 + \lambda p_1 \\ p_1 + p_2 = 1. \end{cases}$$

Зададим начальное распределение $p(0) = \{\alpha, 1-\alpha\}$, $0 \le \alpha \le 1$. Подставляя $p_1 = 1 - p_2$ в первое уравнение системы, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p_1}{\partial t} = -\lambda p_1 + \mu(1 - p_1) \\ p_1(0) = \alpha. \end{cases}$$

Решим задачу Коши для линейного неоднородного уравнения.

$$p_1(t) = \left(\alpha - \frac{\mu}{\mu+\lambda}\right) \cdot e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\mu+\lambda}.$$

В силу того, что $\mu + \lambda > 0$, $e^{-(\lambda+\mu)t} \to 0$ при $t \to \infty$, получаем по определению $\tilde{p}_1 = \lim\limits_{t\to\infty} p_1(t) = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda}$. Аналогично получаем $\tilde{p}_2 = \lim\limits_{t\to\infty} p_2(t) = \dfrac{\lambda}{\mu+\lambda}$.

Итак, $\tilde{p} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}; \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)$, что не только доказывает существование предельных вероятностей, но и указывает их значение.

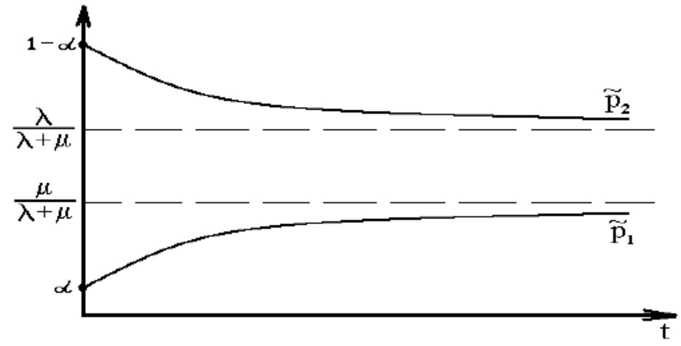


Рис. 9. **Графическая иллюстрация к нахождению предельных вероятностей**

Замечание 3.3.3. Полученные результаты можно вывести, если воспользоваться не определением, а системой уравнений (3.3.1):

$$\begin{cases} -\lambda\tilde{p}_1 + \mu\tilde{p}_2 = 0 \\ -\mu\tilde{p}_2 + \lambda\tilde{p}_1 = 0 \\ \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = 1. \end{cases}$$

Решив систему, получим те же результаты.

3.4. Пуассоновский процесс

Пусть $\{X(t)\}, 0 \le t < \infty$ – марковский процесс, принимающий неотрицательные целочисленные значения. Обозначим $X(t)$ – число появления события за время $t, P(t; t+h)$ – вероятность появления хотя бы одного события на промежутке времени $[t; t+h]$. Предположим, что при каждом t существует постоянная $\lambda(t) = \lim_{h\to 0} \frac{P(t,t+h)}{h}$, которая называется интенсивностью процесса.

Определение 3.4.1. *Простейшим потоком событий называется целочисленный марковский процесс, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $\{X(t)\}$ *– однородный или стационарный процесс, то есть его приращение зависит от величины приращения аргумента* $P\{X(t+h) - X(t) = k\} = P\{X(h) = k\}, \forall t, h \ge 0.$

2) $\{X(t)\}$ *– ординарный процесс, то есть события в потоке следуют строго одно за другим и не происходят вместе*

$$P\{X(t+h)-X(t)=1\}=\lambda h+0(h),$$

$$P\{X(t+h)-X(t)>1\}=0(h).$$

3) $\{X(t)\}$ – *процесс без последействий, то есть случайные величины* $\{X(t_1), X(t_2)-X(t_1), \dots\}$ *независимы в совокупности.*

Замечание 3.4.1. Ординарный процесс без последействий называется пуассоновским процессом.

Из свойства 2 получим два важных следствия:

а) $P\{X(t+h) - X(t) = 0\} = 1 - P\{X(t+h)-X(t) \geq 1\} = 1 - \lambda h + 0(h)$.

б) $P\{X(0)=0\}=1$.

Действительно, $P\{X(t+h)-X(t)=0\}=P\{X(h)=0\}=1-\lambda h+0(h)$, если $h=0$, то $P\{X(0)=0\}=1$.

Условие 2, 2а, 2б с учетом условия 3 в обычных обозначениях можно записать в виде:

$$p_{ik}(h)=\begin{cases} 0, i>k \\ \lambda h+0(h), k-i=1 \\ 1-\lambda h+0(h), k-i\ =0 \\ 0(h), k-i>1. \end{cases}$$

В соответствии с условием граф состояний имеет вид (рис. 8):

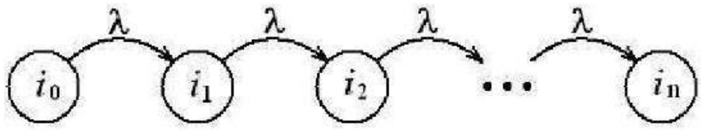


Рис. 10. **Граф пуассоновского процесса**

Составим по графу уравнения Колмогорова

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1}{\partial t}=-\lambda p_1 \\ \frac{\partial p_1}{\partial t}=-\lambda p_1\ +\ \lambda p_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial p_k}{\partial t}=-\lambda p_k\ +\ \lambda p_{k-1} \\ \sum_k pk(t)=1. \end{cases}$$

Начальные условия $p(0) = (1; 0; 0; \ldots; 0)$ имеют вид, обусловленный следствием (б).

Для решения системы уравнений Колмогорова рассмотрим производящую функцию $\varphi(z,t), |z| \le 1$.

$$\varphi(z,t) = Ez^{W(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k(t), |z| \le 1.$$

Очевидно, что $\varphi(z,t)$ удовлетворяет условию уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\lambda\varphi + z\lambda\varphi \\ \varphi(z,0) = z^0 p_0(0) + zp_1(0) + \ \ldots = 1. \end{cases}$$

Получим:

$$\varphi(z,t) = ce^{-(\lambda - \lambda z)t},$$

$$\varphi(z,0) = c = 1,$$

$$\varphi(z,t) = e^{-(\lambda - \lambda z)t} = e^{-\lambda t}\left(1 + \lambda zt + z^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} + \cdots\right),$$

следовательно, $p_k(t) = e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^k}{k!}$.

В полученном выражении $X(t) = \lambda t$ – среднее число появления события за время $(0;\ t)$.

Таким образом, при каждом t случайная величина $X(t)$ распределена по закону Пуассона с параметром λt.

Замечание 3.4.2. *Процесс Пуассона не имеет ни стационарного, ни предельного распределения, так как*
$lim_{t\to\infty} p_k(t) = \tilde{p}_k = 0, \forall k,$ и, следовательно, $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}_k \ne 1$.

Один и тот же математический объект можно интерпретировать по-разному. Пуассоновский процесс мы определили как ординарный процесс с независимыми приращениями. Если же элементы скачков процесса (пуассоновский процесс принимает только целые значения и его траектории – монотонно неубывающие ступенчатые функции) отождествить с точками на действительной оси, то можно будет считать, что пуассоновский процесс – это совокупность случайных точек на прямой или поток моментов наступления событий на оси времени. Поясним сказанное. Пусть система подвержена мгновенным изменениям, которые могут быть обусловлены такими событиями, как распад физической частицы, телефонный вызов и др. Все изменения подобны друг другу, и мы интересуемся только их общим числом. Каждое такое изменение и фиксируется на временной оси, нас же интересует случайное распределение точек на действительной оси.

Рассмотрим распределение промежутков между моментами событий в пуассоновском потоке с интенсивностью $\lambda > 0$. Пусть τ_k – случайная величина, характеризующая длину интервала времени, в течение которого процесс изменяет свое состояние с "$k-1$" на "k"- ое.

Теорема 3.4.1. *Если $\{X(t)\}$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью λ, то распределения промежутков времени τ_k между моментами его скачков независимы и имеют одно и тоже показательное распределение с функцией распределения*

$$F_{\tau_k}(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \\ 0, t \le 0. \end{cases}$$

Доказательство.

$$F_{\tau_k}(t) = P\{\tau_k < t\} = 1 - P\{\tau_k \ge t\},$$

так как $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, то при $\tau_k \ge t$ получим:

$$P\{\tau_k \ge t\} = P\{X(t_{k-1} + t) - X(t_{k-1}) = 0\} = P\{X(t) = 0\} = e^{-\lambda t}.$$

Следовательно,

$$F_{\tau_k}(t) = 1 - P\{\tau_k \ge t,\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, t > 0 \\ 0, t \le 0. \end{cases}$$

Доказательство (3.4.1) закончено.

Независимость случайной величины τ_k от поведения пуассоновского процесса $\{X(t)\}$ на полуоси $(0;\infty)$ следует из независимости приращений $X(t)$ на непересекающихся интервалах. Дифференцируя по t, легко находим плотность вероятности:

$$p_{\tau_k}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t > 0 \\ 0, t \le 0. \end{cases}$$

Пусть случайная величина t_k – момент времени, в который процесс из "$k-1$" состояния переходит в "k"- ое состояние.

Теорема 3.4.2 *Если $\{X(t)\}$ – однородный пуассоновский процесс с интенсивностью λ, то распределения моментов времени t_k имеют распределение Эрланга*

$$p_{t_k}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, t > 0 \\ 0, t \le 0. \end{cases}$$

Доказательство.

Сумма $t_k = \sum_{m=0}^{k-1} e^{-\lambda} t \frac{(\lambda t) m}{m!}$ представляет суммарное время ожидания k-ого события; она имеет функцию распределения

$$F_{t_k}(t) = P\{t_k < t\} = P\{X(t) \ge k\} = 1 - P\{X(t) < k\} = 1 - \sum_{m=0}^{k-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^m}{m!}, t > 0$$

Дифференцируя по t, находим плотность вероятности

$$F'_{t_k}(t) = p_{t_k}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\left(1 + \frac{\lambda t}{1!} + \ldots + \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\right) - e^{-\lambda t}\left(\lambda + \frac{2\lambda t}{2!}\lambda + \ldots + \frac{(k-1)(\lambda t)^{k-2}}{(k-1)!}\lambda\right) =$$

$$= \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}, t > 0$$

Полученное гамма-распределение называют распределением Эрланга.

3.5. Процесс чистого рождения

Простейшим обобщением пуассоновского процесса является процесс чистого рождения, если допустить зависимость вероятности осуществления события в данный момент от числа событий, которые уже произошли. Например, воспроизведение живых организмов, когда при соответствующих условиях – изобилии пищи, отсутствии смертности, отсутствии миграции и т.д., вероятность рождения в данный момент прямо пропорциональна размеру популяции. Определим процесс чистого рождения как марковский процесс $\{X(t)\}, t \ge 0$, удовлетворяющий постулатам:

1) $P\{X(t+h) - X(t) = 1/X(t) = k\} = \lambda_k h + 0_1(h), h \to 0;$
2) $P\{X(t+h) - X(t) = 0/X(t) = k\} = 1 - \lambda_k h + 0_2(h), h \to 0;$
3) $P\{X(t+h) - X(t) < 0/X(t) = k\} = 0, k \ge 0;$
4) $X(0) = 0$ – число рождений в момент $t = 0$.

Если $h > 0$ и $n \geq 1$, то по формуле полной вероятности, марковскому свойству и постулату 3 имеем:

$$p_n(t+h) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P\{X(t+h) = n/X(t) = k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P\{X(t+h) - X(t) = n-k/X(t) = k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) P\{X(t+h) - X(t) = n-k/X(t) = k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_k(t) P\{X(t+h) - X(t) = n-k/X(t) = n\}.$$

При $k = 0,1, \dots, n\ -\ 2$ имеем:

$$P\{X(t+h) - X(t) = n-k/X(t) = k\} \leq$$

$$\leq P\{X(t+h) - X(t) \geq 2/X(t) = k\} = 0_1(h) + 0_2(h)$$

или

$$P\{X(t+h) - X(t) = n-k/X(t) = k\} \leq$$

$$\leq P\{X(t+h) - X(t) \geq 2/X(t) = k\} = 0_3(h).$$

Таким образом,

$$p_n(t+h) = p_n(t)[h - \lambda_n h + 0_2(h)] + p_{n-2}(t)[\lambda_{n-1} h + 0_1(h)] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} p_k(t) 0_3(h)$$

или

$$p_n(t+h) - p_n(t)$$
$$= p_n(t)[-\lambda_n h + 0_2(h)] + p_{n-1}(t)[\lambda_{n-1} h + 0_1(h) + 0_n(h)].$$

Деля на h и переходя к пределу при $h \to 0$, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_0(t)}{\partial t} = \lambda_0 p_0(t) \\ \frac{\partial p_n(t)}{\partial t} = -\lambda_n p_{n(t)} + \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) \end{cases}$$

с начальными условиями $p_0(0) = 1$, $p_n(0) = 0$, $h > 0$. Проведя последовательное и нтегрирование, получим:

$$p_0(t) \ = \ \lambda_0 p_0(t),$$

$$p_{1(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1 - \lambda_0}\left[e^{-\lambda_0 t} - e^{-\lambda_1 t}\right]$$

$$p_{2(t)} = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0}\left[\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_0}\left(e^{-\lambda_0 t} - e^{-\lambda_1 t}\right) + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)\right]$$

Можно выписать и общее решение, убедившись, что $p_k(t) \geq 0$.

Однако, если λ_k растут слишком быстро при росте k, может случиться, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) < 1$.

При каких условиях происходит быстрый рост λ_k, дает следующая теорема ([23], стр. 456).

Теорема 3.5.1 (Феллера). *Для того, чтобы при всех значениях t решения $p_k(t)$ уравнений чистого рождения удовлетворяли соотношению $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} = \infty.$$

Доказательство.

1. Рассмотрим частичную сумму ряда $\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t)$

$$s_n(t) = p_0(t) + p_1(t) + \cdots + p_n(t)$$

Из уравнений размножения вытекает, что

$$s'_n(t) = -\lambda_n p_n(t),$$

Тогда

$$1 - s_n(t) = \lambda_n \int_0^t p_n(\tau) d\tau \qquad (3.5.1)$$

Так как все члены суммы $s_n(t)$ неотрицательны, то при каждом фиксированном t сумма $s_n(t)$ с возрастанием n не убывает. Обозначив

$$lim_{n\to\infty}(1 - s_n(t)) = \mu(t) ,$$

имеем

$$\lambda_n \int_0^t p_n(\tau)d\tau \geq \mu(t),$$

и, следовательно ,

$\int_0^t s_n(\tau)d\tau \geq \mu(t) \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\right)$, так как при любых t, n имеет место неравенство $s_n(t) < 1$, то

$$t \geq \mu(t) \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\right)$$

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}$ расходится, то из последнего неравенства вытекает, что $\mu(t) = 0$, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(1 - s_n(t)) = 0,$$

и, следовательно,

$$s_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

2. Обратно. Из (3.5.1) ясно, что

$$\lambda_n \int_0^t p_n(\tau)d\tau \geq 1$$

и

$$\int_0^t s_n(\tau)d\tau \leq \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{\lambda_n}\right).$$

В пределе при $\mathrm{n} \to \infty$ получаем:

$$\int_0^t (1 - \mu(t))d\tau \leq \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{k}}}$$

Если $\mu(t) = 0, \forall t,$ то $\int_0^t (1 - 0)d\tau = t$, так как *t* произвольно, то $\sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\mathrm{k}}}$ расходится.

3.6. Процесс рождения и гибели

Одно из очевидных обобщений процессов чистого рождения состоит в том, чтобы позволить процессу *{X(t)}* как возрастать, так и убывать, например, из-за гибели членов популяции. Таким образом, если в момент времени *t* процесс находится в состоянии *i*, он может через некоторый случайный отрезок времени перейти в любое из соседних состояний $(i + 1)$ или $(i — 1)$. Возникающие при этом "процессы гибели и рождения" могут рассматриваться как процессы с непрерывным временем, служащие аналогами случайных блужданий. Стохастический граф процесса представлен на рисунке 9 .

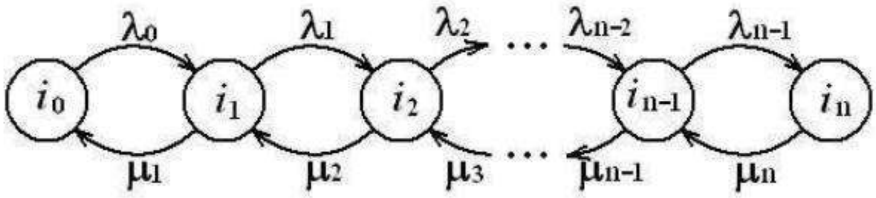


Рис. 11. **Граф марковского процесса, моделирующего процесс рождения и гибели**

Мы предположим, что $\{X(t)\}$ является марковским процессом с состояниями $i_0, i_1, i_2, \ldots$ и, что его вероятности перехода $p_{i,j}(t)$ стационарны. Кроме того предположим, что $p_{i,j}(t)$ удовлетворяют постулатам:

1) $p_{i,j+1}(h) = \lambda_i h + 0(h), i \geq 0;$
2) $p_{i,j-1}(h) = \mu_i h + 0(h), i \geq 1;$
3) $p_{i,j}(h) = 1 - (\lambda_i + \mu_i)h + 0(h),\ i \geq 0;$
4) $p_{i,j}(0) = \delta_{i,j};$
5) $\mu_0 = 0, \lambda_0 > 0, \mu_i , \lambda_i > 0 , i = 1,2, \ldots$

Рассуждениями, подобными тем, которые были проведены выше, можно получить систему уравнений Колмогорова, управляющую процессом гибели и размножения.

$$\begin{cases} \frac{\partial p_0(t)}{\partial t} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \frac{\partial p_k(t)}{\partial t} = -(\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) + \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) \end{cases} \qquad (3.6.1)$$

Вопрос о существовании и единственности решения системы (3.6.1.) совсем не прост. Сформулируем свойства решений дифференциальных уравнений[10].

[10] Первое доказательство теоремы существования и критерия единственности было приведено в работе американского ученого Уильяма Феллера в 1940 г. Подробнее читатель может ознакомиться в учебнике [6].

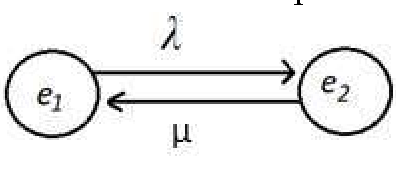
Теорема 3.6.1. *Если* $\lambda_n > 0$ и $\mu_n > 0$ *, то существует положительное решение системы дифференциальных уравнений процесса гибели и рождения, такое что* $\sum p_{k(t)} \leq 0$ *. Если коэффициенты ограничены (или возрастают достаточно медленно), то это решение единственно и удовлетворяет условию* $\sum p_{k(t)} = 0$.

Можно доказать, что при $t \to 0$ пределы существуют, не зависят от начального состояния i и удовлетворяют уравнениям Колмогорова, где правая часть равна нулю, т.е.

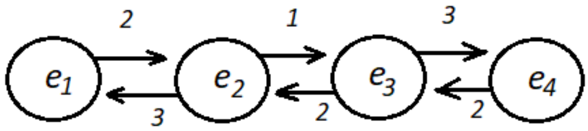
$$\begin{cases} -\lambda_0\widetilde{p_0}(t) + \mu_1\widetilde{p_1}(t) \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ -(\lambda_k+\mu_k)\widetilde{p_k}(t) + \lambda_{k-1}\tilde{p}_{k-1}(t) + \mu_{k+1}\tilde{p}_{k+1}(t) \\ \qquad\qquad\qquad \sum\limits_k \tilde{p}_{k(t)} = 1 \end{cases}$$

Контрольные вопросы и задачи по теме 3

1. Когда марковский процесс называется однородным?
2. Запишите систему уравнений Колмогорова для марковского процесса с множеством возможных состояний. Почему эта система является избыточной? В каких случаях вероятности состояний определяются однозначно?
3. Всегда ли задача Коши для системы уравнений Колмогорова имеет неотрицательное решение?
4. Назовите три основных свойства пуассоновского процесса.
5. Предположим, что поток сбоев ЭВМ является простейшим с интенсивностью λ. Если ЭВМ дает сбой, то он немедленно обнаруживается и производится ремонт, который длится в течение случайного времени t с распределением $E(\mu)$. Вычислить вероятность того, что в момент времени t ЭВМ находится в рабочем состоянии. Рассмотреть случай $t \to \infty$.

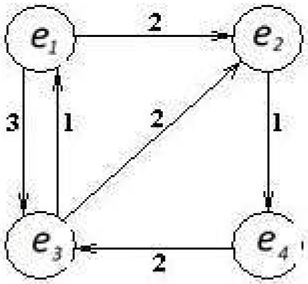


6. Граф состояний системы представлен на рисунке.

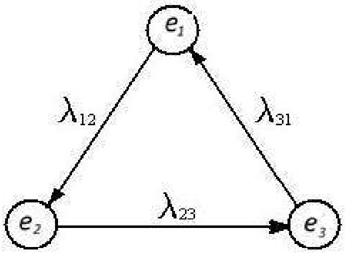


Определите: а) тип процесса; б) предельные вероятности состояний.

7. Процесс изменения состояний представляет собой однородный марковский процесс, изображенный на рисунке. Найти предельные вероятности состояний системы.



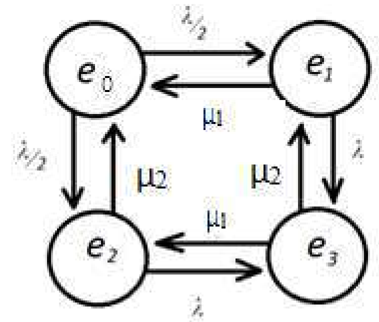
8. Граф состояний системы представлен на рисунке.



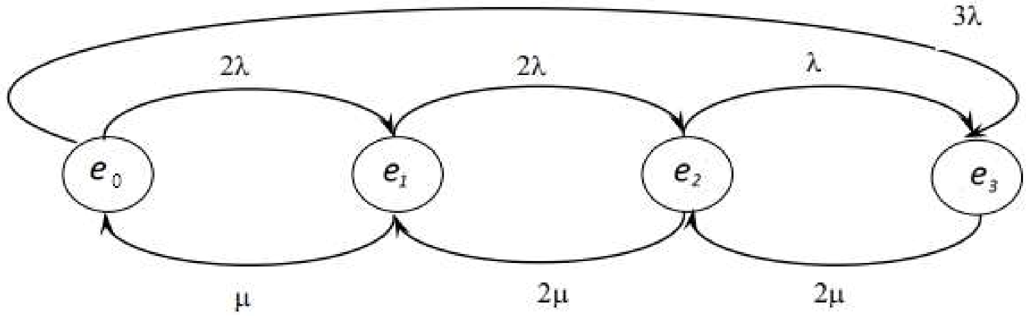
Определите предельные вероятности ее состояний.

9. ЭВМ может находиться в одном из следующих состояний: e_1 – исправна, работает; e_2 – неисправна (остановлена) и идет поиск неисправности; e_3 – неисправность обнаружена и идет ремонт; e_4 – ремонт закончен и идет подготовка к пуску. Известно: среднее время безотказной работы ЭВМ равно 12 часам; для ремонта ее приходится останавливаться в среднем на 3 часа; поиск неисправностей длится в среднем 0,6 часа; подготовка к пуску занимает 2 часа. Определить предельные вероятности состояний рассматриваемой системы.

10. Простейший поток заявок интенсивности λ поступает в систему массового обслуживания, состоящую из 2-х параллельно работающих каналов. Время обслуживания в 1-ом и 2-ом каналах имеет распределение $E(\mu_1)$ и $E(\mu_2)$. Предположим, что обслуживание в каналах происходит независимым образом, заявка выбирается для обслуживания канала случайным образом, если оба канала свободны, найти стационарные вероятности состояния процесса обслуживания. Расчет сделать для случая $\mu_1 = \mu_2$

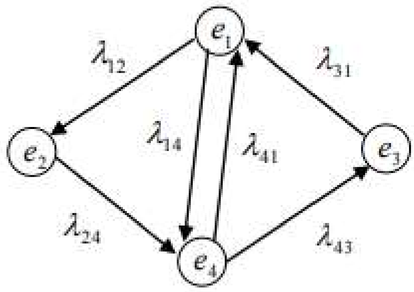


11. Марковский процесс задан схемой гибели-размножения. Построить дифференциальные, алгебраические уравнения и решить систему алгебраических уравнений для $\lambda = 10$ с$^{-1}$, μ=20 с$^{-1}$.



12. Парк авиационного предприятия состоит из N однотипных самолетов. Каждый из самолетов может находиться в одном из двух состояний: e_1 – исправен, e_2 – неисправен и находится в ремонте. Переход самолета из состояния e_1 в состояние e_2 происходит под действием потока неисправностей с интенсивностью λ . Среднее время ремонта неисправного самолета μ. . Поток ремонта тоже является пуассоновским. Составить и решить систему дифференциальных уравнений динамики средних.

13. Пусть дана стохастическая система, граф которой изображен на рисунке. Вычислить предельные вероятности состояний p_1 , p_2 , p_3 , p_4 , если интенсивности потоков событий равны λ_{12}=2; λ_{14}=1; λ_{24}=1;. λ_{31}=3; λ_{41}=2; λ_{43}=2.



14. Матрица Λ в системе уравнений Колмогорова имеет следующий вид $\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$. Найти стационарное распределение вероятностей состояний данного процесса.

15. Некоторая экономическая система может находиться в одном из состояний: e_1 , e_2 , e_3 . При этом состояния e_1 , e_2 , приносят, соответственно, 2000 и 500 ден. ед./сут. Прибыли, а в состоянии e_3 эта экономическая система терпит 4500 ден. ед./сут. убытков. Интенсивности переходов между состояниями таковы: λ_{12}=0,5; λ_{21}=0,3; λ_{23}=0,6;. λ_{32}=1; λ_{31}=0,4; λ_{13}=0. Изобразить граф экономической системы и записать систему дифференциальных уравнений для вероятностей состояний. Найти предельные вероятности для состояний данной системы, вычислить процентное соотношение времен нахождения системы в каждом из состояний. Вычислить среднюю суточную прибыль системы.

Тема 4. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Теория массового обслуживания представляет собой область прикладной математики, использующая методы теории случайных процессов и теории вероятностей для исследования сложных систем различной природы. Предметом исследования теория массового обслуживания является самая неприятная реальная ситуация – ожидание. Очереди наблюдаются всюду – в компьютерных системах, на автозаправочных станциях, в супермаркетах, а также на телефонных станциях. Теория массового обслуживания берет свое начало с исследований А. К. Эрланга[11]. С тех пор его идеи нашли применение в области телекоммуникаций, транспортной инженерии, вычислительной техники, теории надежности, в области промышленного проектирования, в частности, при проектировании заводов, супермаркетов, офисов и больниц, а также в управлении бизнес-проектами. Методы теории массового обслуживания применяются для определения и оптимизации потребностей в персонале, планировании и инвентаризации, что помогает улучшить общее обслуживание клиентов, способствуют принятию обоснованных бизнес-решений при создании и управлении экономически эффективными системами.

4.1. Основные понятия теории массового обслуживания

При решении многих прикладных задач исследователи сталкиваются с процессами, для которых характерна общая структура: в определённую совокупность пунктов, называемую *системой обслуживания*, через некоторые промежутки времени поступают объекты – *входной поток*, которые подвергаются там соответствующим операциям (обслуживанию) и затем покидают систему – *выходной поток*, освобождая линию для следующих объектов. На практике промежутки времени, через которые поступают объекты, время их обслуживания имеют случайный характер. Таким образом, процесс функционирования системы обслуживания представляет собой случайный процесс.

---

[11] **Агнер Краруп Эрланг** (01.01.1878 – 03.02.1929) – датский математик, статистик и инженер, который известен решением в 1909 году классической проблемы определения количества каналов связи на Копенгагенской телефонной станции, необходимых для обеспечения минимального времени ожидания звонка. Тем самым Эрланг стал основоположником теории массового обслуживания.

Определение 4.1.1. *Случайные процессы, соединяющие в себе, по крайней мере, три составляющие — входной поток, систему обслуживания, выходной поток, называются процессами массового обслуживания.*

К процессам массового обслуживания можно отнести:

– *связь* (телефон, почта, телеграф);

– *транспорт* (воздушный, наземный, морские перевозки);

– *культурно-бытовые предприятия* (театры, поликлиники, магазины);

– *производственные процессы* (сборочные линии, ремонт и обслуживание оборудования и т.д.).

Определение 4.1.2. *Объекты, поступающие в систему обслуживания, называются заявками или требованиями.*

Входной поток заявок рассматривают как последовательность *случайных событий*, следующих через какие-то промежутки времени.

Примерами входных потоков заявок являются: вызовы на станции скорой помощи; приход покупателей в супермаркет; выход из строя приборов; поток сбоев ЭВМ и т.д.

Закон распределения входного потока обуславливает характер процесса массового обслуживания.

При массовом поступлении объектов в системе обслуживания могут возникнуть очереди[12]. Структура очередей и поступление из них заявок на обслуживание определяются как свойствами и возможностями систем обслуживания, так и установленными правилами прохождения заявок через эти системы (*дисциплина очереди*).

Например, заявки могут выполняться в порядке поступления (операции на конвейере); с приоритетом (внеочередное право получения билета); в случайном порядке (отбор образцов для статистического анализа); в порядке первого очередного поступления при освободившемся канале обслуживания (приём вызова телефонной станцией) и т.д.

Очереди могут ограничиваться по длине, т.е. по числу находящихся в ней заявок, и по времени ожидания обслуживания. Эти ограничения обусловлены либо возможностями самой системы обслуживания (число мест, объём оперативной памяти), либо поведением объектов обслуживания (от-

[12] Ярким примером практического применения теории очередей стала статья профессора Стэнфордской школы бизнеса Л. Вейна и соавт., в которой которые авторы использовали ее для анализа потенциальных последствий биотеррористической атаки. Была смоделирована система массового обслуживания, позволяющая сократить время ожидания лекарств, что уменьшило количество смертей, вызванных такой атакой.

каз от обслуживания из-за неприемлемости длины очереди или времени ожидания в ней, регламентация порядка обслуживания и т.д.).

Таким образом, основными характеристиками очереди являются *время ожидания* и *время обслуживания*.

Система обслуживания состоит из определённого числа обслуживающих единиц, называемых *каналами обслуживания (серверы),* и могут иметь различную организацию:

– с последовательными каналами;

– с параллельными каналами:

– с комбинированными каналами.

В качестве каналов могут фигурировать: линии связи, различные приборы, лица, выполняющие те или иные операции и т. п.

В зависимости от поступления заявок и образования очередей система может обладать способностями к изменению своей организации. Изменение организации системы обслуживания влияет на структуру очереди и на отношение к ней объектов обслуживания.

Например, при занятости всех каналов обслуживания, поступающие заявки могут получить отказ *(система обслуживания с отказом)* или становится в очередь *(система обслуживания с очередями).*

Таким образом, *предметом теории массового обслуживания* является установление зависимостей между характером потока заявок, числом каналов обслуживания, производительностью отдельного канала и эффективным обслуживанием с целью нахождения эффективных путей управления этими процессами.

Задача теории массового обслуживания – установить зависимость результирующих показателей работы системы массового обслуживания (вероятности того, что заявка будет обслужена; математического ожидания числа обслуженных заявок и т.д.) от входных показателей (количества каналов в системе, параметров входящего потока заявок и т.д.). Результирующими показателями или интересующими нас характеристиками системы массового обслуживания (СМО) являются показатели эффективности СМО, которые описывают способность данной системы справляться с потоком заявок.

4.2. Модели теории массового обслуживания. Простейший поток событий

Модели теории массового обслуживания описывают процессы массового обслуживания — процессы спроса на обслуживание с учетом случайного характера поступления заявок и продолжительности обслуживания.

Назначение моделей теории массового обслуживания состоит в том, чтобы на основе информации о входящем случайном потоке заявок предсказать возможности системы обслуживания, организовать наилучшее выполнение требований для конкретной ситуации и оценить, как это отразится на ее стоимости.

Система массового обслуживания (СМО) возникает тогда, когда происходит массовое появление заявок (требований) на обслуживание и их последующее удовлетворение.

Особенностью СМО является случайный характер исследуемых явлений. Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Состояние СМО меняется скачком в моменты появления каких-то событий (прихода новой заявки, или окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь).

Основными элементами СМО являются:

1) входящий поток заявок (требований) на обслуживание;

2) очередь заявок на обслуживание;

3) приборы (каналы) обслуживания;

4) выходящий поток обслуженных заявок.

На рисунке 12 представлена схема СМО.

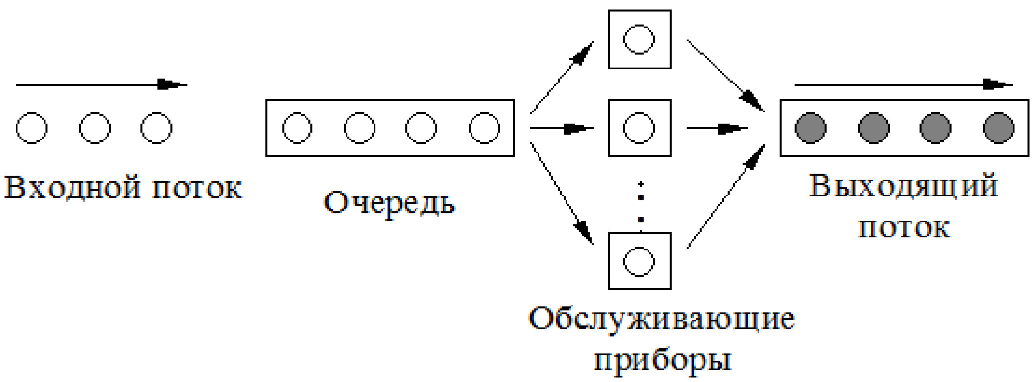


Рис. 12. **Обобщенная схема СМО**

Для систем, относящихся к системам массового обслуживания, существует определенный класс задач, решение которых позволяет ответить, например, на следующие вопросы:

– С какой интенсивностью должно проходить обслуживание или должен выполняться процесс при заданной интенсивности и других параметрах входящего потока требований, чтобы минимизировать очередь или задержку в подготовке документа или другого вида информации?

– Какова вероятность появления задержки или очереди?

– Сколько времени требование находится в очереди, и каким образом минимизировать его задержку?

– Какова вероятность потери требования (клиента)?

– Какова должна быть оптимальная загрузка обслуживающих каналов?

– При каких параметрах системы достигаются минимальные потери прибыли?

К этому перечню можно добавить еще целый ряд задач.

Система обслуживания считается заданной, если известны:

1) поток заявок (требований), его характер;

2) множество обслуживающих каналов;

3) дисциплина обслуживания (совокупность правил, задающих процесс обслуживания).

Часто *входной поток заявок* представляется в виде *простейшего потока*, обладающего свойством стационарности, отсутствия последствия и ординарности. Напомним, что под *потоком событий* понимается последовательность событий, происходящих одно за другим в какие-то моменты времени. Будем рассматривать лишь поток однородных событий, т.е. различающихся только моментами появления. Такой поток можно изобразить как последовательность точек $t_1, t_2, \dots, t_k$ на числовой оси, соответствующих моментам появления событий.

Определение 4.2.1. *Поток событий называется регулярным, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.*

Типичным для СМО является случайный поток заявок.

Определение 4.2.2. *Поток событий называется стационарным, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной τ зависит только от длины участка и не зависит от того, где именно на временной оси Ot расположен этот участок.*

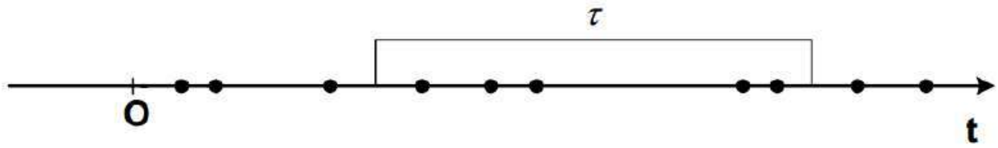


Рис. 13.

Простейший поток событий

Определение 4.2.3. *Поток событий называется потоком без последействия, если для любых не перекрывающихся участков времени* τ_1 *и* τ_2 *число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другой.*

Определение 4.2.4. *Поток событий называется ординарным, если вероятность попадания на временной интервал малой длительности* Δt *двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события (т.е. вероятность реализации отдельного события на интервале* Δt *равна* $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$*, а двух и более равна* $o(\Delta t)$*).*

Определение 4.2.5. *Входной поток событий, обладающий свойствами стационарности, ординарности и если он не имеет последействия, называется простейшим или стационарным пуассоновским потоком.*

Замечание 4.2.1. Условию стационарности удовлетворяет поток заявок, вероятностные характеристики которых не зависят от времени. В частности, для стационарного потока характерна постоянная плотность (среднее число заявок в ед. времени).

Пример 4.2.1. Поток вызовов на городской станции с 12:00 до 13:00 может считаться стационарным, поток вызовов же в течение суток уже не может считаться стационарным, так как ночью плотность ниже, чем днем.

Замечание 4.2.2. Условием отсутствия последействия означает, что заявки поступают в систему независимо друг от друга.

Пример 4.2.2. Поток пассажиров, входящих на станцию метро, можно считать потоком без последействия, т. к. причины, обусловившие приход отдельного пассажира в тот, а не другой момент, как правило, не связаны с аналогичными причинами для других пассажиров. Поток пассажиров, покидающих станцию метро, не считается потоком без последействия, т. к. моменты выхода пассажиров, прибывших одним и тем же поездом, зависимы между собой.

Замечание 4.2.3. Условие ординарности означает, что заявки приходят поодиночке, а не парами, тройками и т.д.

Пример 4.2.3. Поток клиентов, входящих в салон красоты, может считаться ординарным, чего нельзя сказать о потоке клиентов, направляющихся в ЗАГС для регистрации брака.

Рассмотрим основные свойства простейшего потока.

Теорема 4.2.1. *Дискретная случайная величина $\eta(\omega)$, принимающая значения 0, 1, 2, …, и характеризующая при простейшем входном потоке число заявок, поступающих в систему обслуживания на временном интервале длины t, распределена по закону Пуассона с параметром λt.*

Следствие 4.2.1. *Если входной поток является простейшим, то среднее число заявок, поступивших в систему обслуживания на временном интервале длины t равно λt, т.е. $E\,\eta(\omega) = \lambda t$.*

Замечание. Параметр λ представляет собой среднее число заявок, поступавших в ед. времени, поэтому его называют *интенсивностью* или *плотностью простейшего потока*.

Следствие 4.2.2. *Если входной поток заявок является простейшим, то дисперсия случайной величины $\eta(\omega)$, характеризующая рассеивание числа заявок, поступавших в СМО на временном интервале длины t, относительно их среднего значения, равна λt, т.е. $D\eta(\omega) = \lambda t$.*

Из определения простейшего потока длительность τ временного интервала между двумя последовательно поступающими заявками является случайной величиной $\tau(\omega)$.

Теорема 4.2.2. *В случае простейшего входного потока с интенсивностью λ длительность $\tau(\omega)$ временного интервала между двумя последовательными заявками имеет экспоненциальное распределение с параметром λ.*

Следствие 4.2.3. *В случае простейшего потока с интенсивностью λ длительность $\tau(\omega)$ временного интервала между двумя поступающими заявками является случайной величиной с плотностью*

$$p_\tau(T) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda T}, & T > 0 \\ 0, & T \le 0 \end{cases}$$

$$E\tau(\omega) = \frac{1}{\lambda}$$

$$D\tau(\omega) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Кроме характеристик входного потока заявок, режим работы системы зависит от характеристик производительности самой системы — числа каналов и быстродействия каждого канала. Одной из важнейшей характеристикой является время обслуживания одной заявки T_s.

Определение 4.2.5. *Время обслуживания или время пребывания одной заявки в канале обслуживания является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону распределения с плотностью распределения вероятностей*

$$g(t) = \begin{cases} \mu e^{-\mu t}, & t > 0 \\ 0, & t \le 0 \end{cases}$$, где μ – интенсивность обслуживания.

По опр. $Eg(t) = \dfrac{1}{\mu}$.   t

Функция распределения времени обслуживания заявки равна

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)dx = \begin{cases} 1 - e^{-\mu t}, & t > 0 \\ 0, & \le 0 \end{cases}$$

Ее значение равно вероятности того, что к моменту времени Т обслуживание заявки будет завершено, т.е. освободиться канал обслуживания.

4.3. Классификация систем массового обслуживания

Для облегчения процесса моделирования используют классификацию СМО по различным признакам, для которых пригодны определенные группы методов и моделей теории массового обслуживания, упрощающие подбор адекватных математических моделей к решению задач обслуживания. Исследование СМО заключается в нахождении показателей, характеризующих качество и условия работы обслуживающей системы, и показателей, отражающих экономические последствия принятых решений.

Классификация СМО опирается на важнейшее понятием в анализе СМО — понятие состояния системы. Состояние есть некоторое описание системы, на основании которого можно предсказать ее будущее поведение. Пусть S_i – возможное состояние системы обслуживания. За бесконечно малый промежуток времени Δt система обслуживания с простейшим потоком заявок и экспоненциальным законом распределения времени обслуживания остается в прежнем состоянии S_i, либо переходит в состояние S_{i+1} или S_{i-1} при $i \ge 1$, S_1, при $i=0$. При этом:

– если $i = \overline{0, m}$, то занято i каналов и очереди нет — *многоканальная система обслуживания без очереди*;

– если $i = \overline{m, m+1}$, то заняты все m каналов, и в очереди находится (n-m) заявок;

– если n=m, то рассматривают *систему обслуживания с отказами* – формирование очереди не разрешено, поэтому заявка, пришедшая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и теряется;

– если $m<n<\infty$, то рассматривают *систему обслуживания с ограниченной длиной очереди*;

– если $n=\infty$, то рассматривают *систему обслуживания с ожиданием* без ограничений на длину очереди — поступившая заявка, застав все обслуживающие приборы занятыми, становится в очередь и дожидается обслуживания. Число мест для ожидания (длина очереди) не ограничено. Не ограничивается и время ожидания.

Порядок поступления заявок на обслуживание называется дисциплиной обслуживания. В СМО с очередью могут быть следующие варианты дисциплины обслуживания:

а) в порядке поступления заявок (первым пришел – первым обслужился), например, магазины, предприятия бытового обслуживания ;

б) в порядке обратном поступлению, т. е. последняя заявка обслуживается первой (последним пришел – первым обслужился), например, выемка заготовок из бункера;

в) в соответствии с приоритетом (участники ВОВ в поликлинике);

г) в случайном порядке (в системе ПВО объекта при отражении воздушного налета противника).

По количеству обслуживающих приборов (каналов) СМО делятся на *одноканальные* (химчистка, мойка автомобилей) *и многоканальные* (платная дорога с несколькими полосами движения).

Структура СМО и характеристика ее элементов приведены на рисунке 14.

При анализе СМО определяют так же усредненные показатели обслуживания. В зависимости от решаемой задачи ими могут быть:

– среднее количество заявок в системе (L);

– среднее время пребывания заявки в СМО (T);

– среднее время ожидания в очереди (Tq);

– среднее время нахождения на обслуживании (Ts);

– среднее количество заявок в очереди (Lq);

– среднее количество заявок на обслуживании (Ls);

Варьируемыми параметрами обычно являются следующие: количество каналов, их производительность, дисциплина очереди.

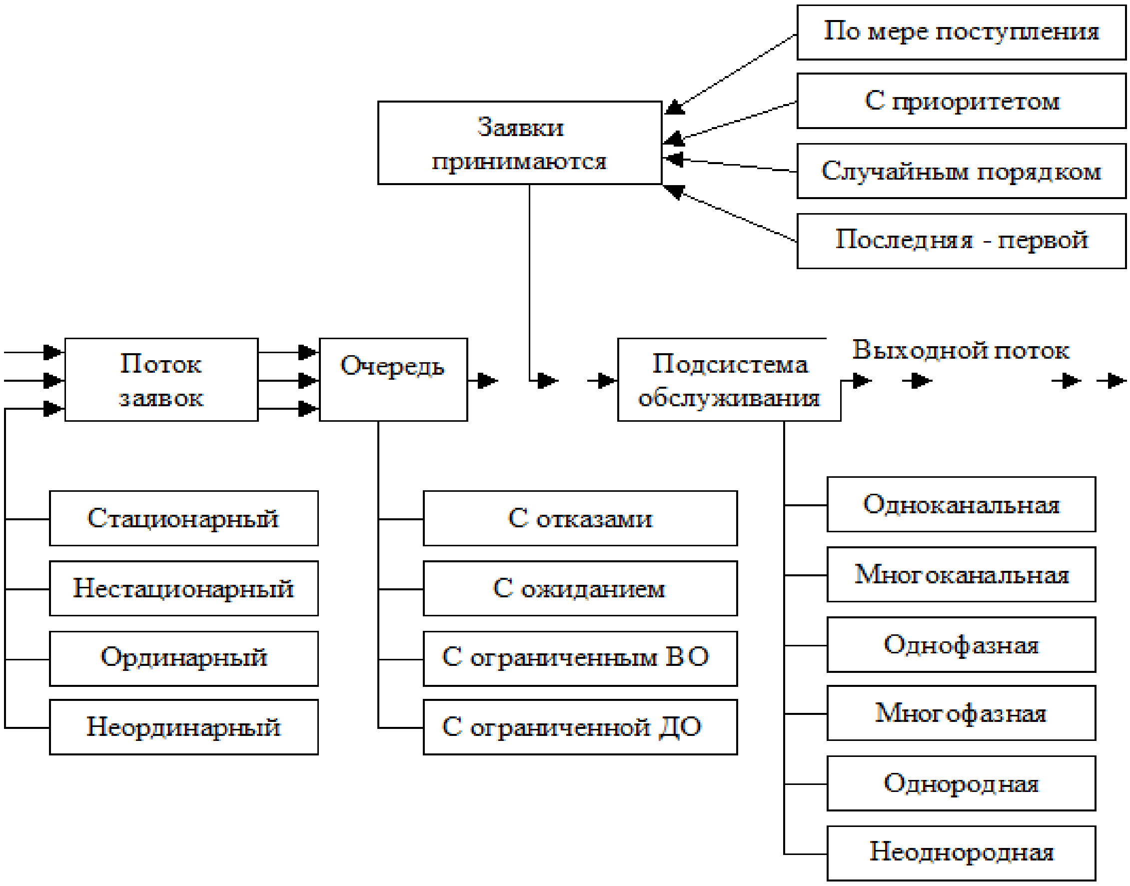


Рис. 14. **Структура и характеристика элементов СМО**

Зная основы теории случайных процессов, принципы моделирования процессов чистого рождения, рождения и гибели, можно вывести множество различных моделей очередей. Самой простой моделью является одноканальная система с отказами. Имеется один канал, на который поступает поток заявок с интенсивностью λ. Поток обслуживаний имеет интесивность μ (рис. 15). Состояния рассматриваемой СМО пронумерованы следующим образом: S_0 – канал обслуживания свободен; S_1– канал занят.

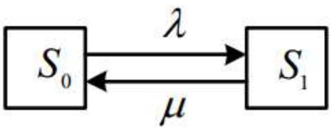


Рис. 15. **Граф одноканальной системы с отказами**

Определим предельные вероятности системы и показатели ее эффективности, используя уравнения Колмогорова. Составим систему уравнений для стационарного режима работы

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ -\mu p_1 + \lambda p_0 = 0 \\ p_0 + p_1 = 1. \end{cases}$$

Решив систему, получим значения для предельных вероятностей:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}; \; p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

Предельные вероятности p_0 и p_1 можно выразить через средние времена ожидания канала (T_q) и обслуживания одной заявки (T_s). С этой целью в формулы для предельных вероятностей подставляем значения

$\mu = \frac{1}{T_s}$, $\lambda = \frac{1}{T_q}$. В результате имеем:

$$p_0 = \frac{T_q}{T_s + T_q}; \; p_1 = \frac{T_s}{T_s + T_q}$$

Предельные вероятности выражают среднее время пребывания системы в состояниях S_0 и S_1, т.е. определяют относительную пропускную способность Q и вероятность отказа:

$$Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \; P_{отк} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Абсолютную пропускную способность можно найти, умножив относительную пропускную способность на интенсивность обслуживания, т.е.

$$A = \lambda Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Аппарат теории массового обслуживания может быть применим ко многих реальным ситуациям. С целью максимизации финансовой эффективности системы и минимизации количества обслуживающих серверов необходимо моделировать не только одноканальные системы обслуживания, но и многоканальные. Рассмотрим некоторые основные модели СМО.

4.4. Одноканальные системы обслуживания с ожиданием (с ограниченной очередью)

Пусть СМО имеет один канал обслуживания. Если заявка поступила в систему в момент занятости канала, она становится в очередь. Если поступившая заявка застала занятым канал и все m мест в очереди тоже заняты, то заявка покидает систему необслуженной. Если поток заявок в СМО простейший с интенсивностью λ и время обслуживания одной заявки распределено по показательному закону с параметром μ, то граф состояний системы является графом процесса гибели и размножения. Граф состояний такой системы изображен на рисунке 16.

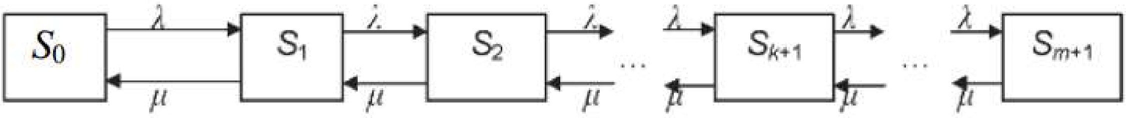


Рис. 16. **Граф состояний одноканальной СМО с ограниченной очередью**

Состояния СМО пронумерованы следующим образом: S_0 – канал обслуживания свободен; S_1– канал занят, но очереди нет; S_2 – канал занят, одна заявка стоит в очереди; …; S_{m+1} – канал занят, m заявок в очереди.

Обозначая показатель нагрузки системы через $\rho=\lambda/\mu$, получим, что в этой системе вероятности состояний выражаются через вероятность простоя p_0 по формулам $p_1 = p_0\, \rho$, $p_2 = p_0\, \rho^2$, …, $p_{m+1} = p_0\, \rho^{m+1}$. Поэтому из равенства $p_0 + p_1 + \ldots + p_{m+1} = 1$, находим

$$p_0 = (1+\rho+\rho^2+\ldots+\rho^{m+1})^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}}$$

В этой системе вероятность отказа совпадает с числом

$$P_{отк} = p_{m+1} = \rho^{m+1} p_0,$$

т. е., когда очередь заполнена, дополнительная заявка отбрасывается.

Относительная и абсолютная пропускные способности рассчитываются по тем же формулам, что и в системе без очереди:

$$Q=1- P_{отк};\ A=\lambda\, Q =\lambda\, (1- P_{отк}).$$

Среднее число занятых каналов вычисляется по формуле $\bar{k} = 1 - p_0$.

Среди других характеристик применяют следующие:

– среднее число заявок в очереди (L_q)

$$L_q = 0 \cdot p_0 + 1p_1 + \ldots + (m+1)\cdot p_{m+1} = \frac{\left[1-\rho^m(m+1-m\rho)\right]\rho^2}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)}$$

– среднее число заявок в системе обслуживания $L_s = L_q + \bar{k}$;

– среднее количество заявок, находящихся в системе $L = L_q + L_s$;

– среднее время ожидания обслуживания $T_s = \dfrac{L_s}{\lambda}$;

– среднее время нахождения заявки в очереди $T_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$;

– среднее время пребывания заявки в системе обслуживания

$$T = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{L_s}{\lambda} = \frac{L}{\lambda}.$$

Замечание 4.4.1. Формулы для стационарного режима работы системы $L = \lambda T$, $L_q = \lambda T_q$, $L_s = \lambda T_s$ известны как формулы очереди Литтла[13].

Замечание 4.4.2. Если число m $\to\infty$, то в пределе получим одноканальную систему с неограниченной очередью. Такая система будет иметь стационарный режим только в том случае, когда $\rho<1$, т.к. иначе в выражении для p_0 будет выходить сумма неограниченного сверху ряда. Если $\rho<1$, то стационарный режим для системы с неограниченной очередью существует, причем $\rho^m \to 0$ и $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+1}} \to 1-\rho$, а $L_q \to \frac{\rho^2}{1-\rho}$.

Поэтому основные показатели одноканальной системы с неограниченной очередью сводятся к числам:

$p_0 = 1-\rho$,

среднее число заявок в очереди $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$,

среднее число занятых каналов $\bar{k} = \rho$,

среднее число заявок в системе $L_s = \frac{\rho}{1-\rho}$,

среднее время пребывания в системе $T = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$,

среднее число заявок в очереди $L_q = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$.

Пример 4.4.1. В приемно-отправочный парк железнодорожной станции поступает простейший поток поездов со средней интенсивностью 3 состава в час. Бригада осмотрщиков обрабатывает состав со средней продолжительностью 15 минут. Определить среднее число составов в парке, ожидающих обслуживания; среднее время пребывания состава в парке; среднее время простоя в ожидании обработки.

Решение.

Рассмотрим парк как СМО с одним каналом обслуживания, с интенсивностью заявок $\lambda = 3$(ч$^{-1}$) и с интенсивностью обслуживания

[13] Впервые формула $L = \lambda T$ для всей системы была опубликована в 1954 году Филипом М. Морсом. Позднее в 1961 году Джон Литтл предложил доказательство данного закона для всейсистемы и для ее подсистем.

$\mu = \frac{1}{15} = \frac{1}{1/4} = 4ч^{-1}$ Коэффициент загрузки $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} < 1$, поэтому стационарный режим существует.

Среднее число составов, ожидающих обслуживания $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{9/16}{1-3/4} = 2{,}25$.

Среднее время пребывания состава $T = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{3/4}{3(1-3/4)} = 1$ (час). Среднее число составов в парке $L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{3/4}{1-3/4} = 3$ (состава).

4.5. Многоканальная система массового обслуживания без очереди

Всякая СМО предназначена для обслуживания какого-то потока заявок, поступающих в какие-то случайные моменты времени. Обслуживание заявок продолжается какое-то случайное время, после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что в какие-то периоды времени на входе СМО скапливается излишне большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО не обслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать. Рассмотрим многоканальную СМО без очереди.

Пусть СМО имеет *к* каналов, интенсивность обслуживания которых равна μ, и пусть интенсивность заявок поступающих в систему, равна λ.

Если очередей нет, то такую систему можно рассматривать как процесс гибели и размножения. Система S имеет следующие состояния (нумеруем их по числу заявок, находящихся в системе): S_0, S_1, S_2, …, S_k, …, S_n, где S_k — состояние системы, когда в ней находится k заявок, т.е. занято k каналов. Состояние такой системы можно представить графом на рисунке 17.

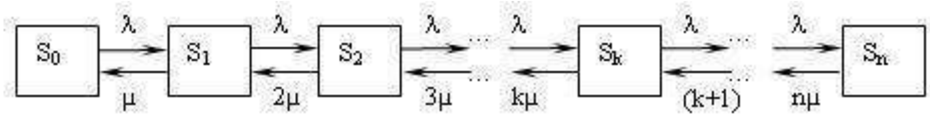


Рис.17. **Граф состояний многоканальной СМО без очереди**

Система уравнений для вероятности стационарного режима имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0 \\ -\mu p_1 + \lambda p_0 + 2\mu p_2 - \lambda p_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda p_{k-1} - k\mu p_k = 0 \\ p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1. \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0.$$

$$p_2 = -\frac{\lambda}{2\mu} p_0 + \frac{\lambda+\mu}{2\mu} \cdot p_1 = \left(\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{2\mu^2} - \frac{\lambda}{2\mu}\right) p_0 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \cdot p_0 \cdot$$

$$p_k = \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)\mu^{n-1}} p_0, \quad p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0.$$

Из этого, с помощью равенства $p_0+\dots+p_к=1$, найдем вероятность

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\dots+\frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1}$$

Где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Вычислим p_0 и найдем все остальные вероятности.

Для данного типа системы обслуживания наиболее важными показателями являются:

вероятность отказа $P_{отк}=p_к$;

относительная пропускная способность $Q=1-p_k$;

абсолютная пропускная способность $A=\lambda(1-p_k)$;

среднее число занятых каналов $\bar{k} = \rho(1-p_k)$.

Пример 4.5.1. Диспетчерская служба имеет 5 линий связи. Поток вызовов простейший с интенсивностью λ=0,8 вызовов в минуту. Среднее время переговоров с диспетчером составляет 3 минуты. Найти абсолютную и относительную пропускную способность диспетчерской службы; вероятность отказа и среднее число занятых каналов. Определить, сколько каналов должна иметь служба, чтобы вероятность отказа не превышала 0,01.

Решение.

Интенсивность обслуживания μ=1/3 (мин)$^{-1}$, поэтому коэффициент загрузки системы $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{0{,}8}{1/3} = 2{,}4$.

При $к$=5 вычисления дают

$$p_0 = \left(1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\dots+\frac{\rho^5}{5!}\right)^{-1} = \left(1+2{,}4+\frac{2{,}4}{2!}+\dots+\frac{2{,}4^5}{5!}\right)^{-1} \approx 0{,}094.$$

Отсюда вероятность отказа $p_5 = \frac{\rho^5}{5!} p_0 = \frac{79{,}626}{120} \cdot 0{,}094 \approx 0{,}062$.

Т.е. каждый двадцатый вызов придется отклонить.

Абсолютная пропускная способность $A=\lambda(1\text{-}\ P_5) \approx 0{,}750$, т.е. в среднем за минуту обслуживается 0,75 заявок.

Относительная пропускная способность Q=1-P_5 $\approx$0,938.

Среднее число занятых каналов $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \rho(1 - p_5) \approx 2{,}251$. Так как $P_{отк}$>0,01, то число каналов надо увеличить.

Вывод: Расчеты показывают, что при $к$=6 $P_{отк}$=0,024 и при $к$=7 $P_{отк}$=0,008. поэтому, чтобы достигнуть нужного уровня, надо иметь не менее 7 каналов.

Пример 4.5.2. Дисплейный зал имеет 5 дисплеев. Поток пользователей простейший. Среднее число пользователей, посещающих дисплейный зал за сутки, равно 140. Время обработки информации одним пользователем на одном дисплее распределено по показательному закону и составляет в среднем 40 минут. Определить, существует ли стационарный режим работы зала; вероятность того, что пользователь застанет все дисплеи занятыми; среднее число пользователей в дисплейном зале; среднее число пользователей в очереди; среднее время ожидания свободного дисплея; среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале.

Решение.

Рассматриваемая в задаче СМО относится к классу многоканальных систем с ограниченной очередью. Число каналов k=5. Найдем λ — интенсивность потока заявок: $\lambda = \frac{1}{\mu}$ где $\mu = \frac{24}{140} \approx 0{,}17$ (час.) —среднее время между двумя последовательными заявками входящего потока пользователей. Тогда $\lambda = \frac{1}{0{,}17} \approx 5{,}85$ польз. /час.

Найдем μ интенсивность потока обслуживания: $\mu = \frac{1}{T_s} \approx 5{,}85$, где

T_s=40 мин=0,67 часа — среднее время обслуживания одного пользователя одним дисплеем,

Тогда $\mu = \frac{1}{0{,}67} \approx 1{,}49$ (польз. /час).

Вычислим коэффициент загрузки СМО $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5,85}{1,49} \approx 3,93$. . Известно, что для СМО такого класса стационарный режим существует, если отношение коэффициента загрузки системы к числу каналов меньше единицы. Находим это отношение $x = \frac{\rho}{k} = \frac{3,93}{5} \approx 0,79 < 1$.

Следовательно, стационарный режим существует. Предельное распределение вероятностей состояний вычисляется по формулам

$$p_o = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{k+1}}{k \cdot k!} \cdot \frac{1}{1-x}\right]^{-1};$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} \cdot p_o,\ i \in \{1, \ldots, k\},\quad p_{k+r} = \frac{\rho^{k+r}}{k^r \cdot k!} \cdot p_0,\quad r \geq 1.$$

Поскольку k=5, имеем

$$p_o = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!} + \frac{\rho^4}{4!} + \frac{\rho^5}{5!} + \frac{\rho^6}{5 \cdot 5!} \cdot \frac{1}{1-x}\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + \frac{3,93}{1} + \frac{15,44}{2} + \frac{60,70}{6} + \frac{238,55}{24} + \frac{937,48}{120} + \frac{3684,30}{5 \cdot 120} \cdot \frac{1}{1-0,79}\right]^{-1} =$$

$$= [1 + 3,93 + 7,72 + 10,12 + 9,94 + 7,81 + 29,24]^{-1} = [69,76]^{-1} = 0,014.$$

Вычислим $P_{отк}$— вероятность того, что пользователь застанет все дисплеи занятыми. Очевидно, она равна сумме вероятностей таких событий: все дисплеи заняты, очереди нет (p_5); все дисплеи заняты, один пользователь в очереди (p_6); все дисплеи заняты, два пользователя в очереди (p_7) и так далее. Поскольку для полной группы событий сумма вероятностей этих событий равна единице, то справедливо равенство

$P_{отк}=p_5+p_6+p_7+\ldots=1-p_0-p_1-p_2-p_3-p_4$.

Найдем эти вероятности: p_0=0,014; p_1=3,93*0,014; p_2=7,72*0,014; p_3=10,12*0,014; p_4=9,94*0,014. Вынося за скобки общий множитель, получим

$P_{отк}$=1-0,0148*(1+3,93+7,72+10,12+9,94)=1-0,014*32,71=1-0,46=0,54.

Используя формулы для вычисления показателей эффективности, найдем:

среднее число пользователей в очереди

$$L_q = \frac{p^{k+1} p_0}{k \cdot k!(1-x)^2} = \frac{(3,93)^6 0,914}{5 \cdot 5!(1-0,79)^2} \approx 1,95 \text{ (польз.)};$$

среднее число пользователей в дисплейном зале

$$L_s = L_q + \rho = 1,95 + 3,93 \approx 5,88 \text{ (польз.)};$$

среднее время ожидания свободного дисплея

$$T_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1{,}95}{5{,}85} \approx 0{,}33 \text{ (час);}$$

среднее время пребывания пользователя в дисплейном зале

$$T_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{5{,}88}{5{,}85} \approx 1{,}01 \text{ (час).}$$

Ответ: стационарный режим работы дисплейного зала существует и характеризуется следующими показателями $P_{отк}$=0,54; L_q=1,95 пользователя; L_s=5,88 пользователя; T_q=20 мин., T_s=1 час.

Контрольные вопросы и задачи по теме 4

1. Какие процессы относятся к процессам массового обслуживания?
2. Укажите предмет и задачи теории массового обслуживания.
3. Дайте определение системы массового обслуживания (СМО):
а) с ограниченной очередью, б) с неограниченной очередью.
4. Перечислите составные части системы массового обслуживания.
5. В чём заключается моделирование СМО?
6. Перечислите критерии оптимизации СМО.
7. Дайте определение системы массового обслуживания:
а) с отказами, б) с очередью. Перечислите разновидности очередей в системах массового обслуживания.
8. Опишите одноканальные системы массового обслуживания.
9. Опишите многоканальные системы массового обслуживания.
10. Перечислите наиболее важные показатели многоканальной системы массового обслуживания без очереди.
11. Перечислите наиболее важные показатели многоканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью.
12. Запишите формулы для вычисления основных характеристик одноканальной системы массового обслуживания с ограниченной очередью.
13. В клининговую компанию в среднем поступает 12 заказов в час. Считая поток заказов простейшим, определить: вероятность того, что за 1 минуту не поступит ни одного заказа; за 10 минут поступит не более трех заказов.
14. На прием в кабинет врача приходит в среднем два больных в час. Считая поток больных простейшим, определить: среднее число больных, приходящих к врачу за один рабочий день (8 часов); вероятность того, в течение одного часа зайдет, по крайней мере, один больной.

15. Поток машин, следующих по трассе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью λ. Путешественник выходит на дорогу, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Найти закон распределения времени ожидания T, математическое ожидание E(T) и среднеквадратическое отклонение б(T). Найти эти же характеристики в случае регулярного потока событий.

16. Поток машин, следующих по трассе в одном направлении, представляет собой простейший поток с интенсивностью $\lambda=10$ (машин/час). Путешественник выходит на дорогу, чтобы остановить первую попавшуюся машину, идущую в данном направлении. Какова вероятность того, что ему придется ждать больше 15 минут?

17. Система массового обслуживания – АТС, которая может обеспечить не более трех переговоров одновременно. Заявка-вызов, поступившая в момент времени, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему. В среднем на станцию поступает 0,8 вызовов в минуту, среняя продолжительность разговоров 1,5 мин. Для стационарного режима функционирования СМО необходимо определить: вероятности состояний системы; абсолютную и относительную пропускную способности; вероятность отказа; среднее число занятых каналов.

18. Интенсивность потока телефонных звонков в агентство по заказу авиационных билетов, имеющее один телефон, составляет 12 вызовов в час. Продолжительность оформления заказа на билет равна 5,5 минуты. Определить относительную и абсолютную пропускную способность этой СМО и вероятность отказа (занятости телефона). Сколько телефонов должно быть в агентстве, чтобы относительная пропускная способность была не менее 0,85?

19. Система массового обслуживания – билетная касса в кинотеатре с одним окошком и неограниченной очередью. Касса продает билеты на два фильма – для взрослых и для детей. Желающих купить билет на фильм для взрослых, приходит в среднем трое за 40 минут, на фильм для детей – двое за 40 минут. Поток зрителей простейший. Кассир в среднем обслуживает трех зрителей за 15 минут. Время обслуживания – показательное. Вычислить среднее число заявок в системе и в очереди, среднее время пребывания заявки в системе, среднее время пребывания заявки в очереди.

20. Пункт заказов Ростелеком имеет четыре телефонных аппарата. В среднем за сутки поступает 120 заявок на установку точки интернета. Средняя длительность переговоров обсуждения требуемых работ 15 ми-

нут. Длина очереди не должна превышать 3 абонентов. Потоки заявок и обслуживаний – простейшие. Определить характеристики обслуживания пункта заявок в стационарном режиме (вероятность простоя каналов, вероятность отказа, вероятность обслуживания, среднее число занятых каналов, среднее число заявок в очереди, среднее число заявок в системе, абсолютную пропускную способность, относительную пропускную способность, среднее время заявки в очереди, среднее время заявки в системе, среднее время заявки под обслуживанием).

Список литературы

1. Бородин А. Н. Случайные процессы: учебник. СПб.: Лань, 2013. 639 с.

2. Булинский А. В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов: монография. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 400 с.

3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М.: Высшая школа, 2003.

4. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. М.: Наука-Физматлит,1996.

5. Волков И.К. Случайные процессы. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003.

6. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей: учебник. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 320 с.

7. Гумляева С.Д. Случайные процессы: курс лекций. М., 1998.

8. Жакод Ж., Ширяев А. Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1, 2. М.: Физматлит, 1994.

9. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания: учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1982.

10. Иголинский В.Г. Случайные процессы и математическая статистика. СПб., 1999.

11. Карлин С. Основы теории случайных процессов / Пер. с англ. Под. Ред. И.Н. Коваленко. М.: Мир, 1971.

12. Каштанов В.А., Энатская Н.Ю. Случайны процессы: учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М.: Юрайт, 2017.

13. Кениг Д. Теория случайных процессов. Ч.1. М., 1988

14. Кениг Д. Теория случайных процессов. Ч.2. М., 1989.

15. Маталыцкий М. А.; Хацкевич Г. А. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы. Минск: Вышэйшая школа, 2012.

16. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2002.

17. Питербах В.И. Лекции по теории гауссовских процессов. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1986.

18. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. М.: Наука, 1989.

19. Случайные функции: учебное пособие / Тескин О.И., Цветкова Г.М., Козлов Н.Е., Пашовкин Е.М. М.: Изд-во МГУ, 1994.

20. Соколов Г. А. Теория случайных процессов для экономистов : учеб. пособие для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 207 с.

21. Таранцев А. А. Инженерные методы теории массового обслуживания. – Изд. 2-е, перераб. и доп. СПб: Наука, 2007. 175 с.

22. Тутубалин В.Н. Теория вероятностей и случайные процессы. М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1992.

23. Фелллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.1. М: Мир, 1984. 493 с.

24. Ширяев А. Н. Вероятность: В 2-х т. М.: МЦНМО, 2004.

Оглавление

Учебное издание

Светлана Николаевна Дворяткина,
Оксана Николаевна Прокуратова

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И ПРОСТЕЙШИЕ МОДЕЛИ ТЕОРИИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Учебное пособие

Книга печатается в авторской редакции
Техническое исполнение - В. М. Гришин
Технический редактор – О.А. Ядыкина

Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 5,0 Уч.-изд.л. 4,9
Тираж 300 экз. Заказ 116

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28