



РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.О.04.04 - Функциональный анализ

Направление подготовки: 01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль): Прикладное программирование и информационные системы

Квалификация (степень): *бакалавр*

Форма обучения: *очная*

Институт: Математики, естествознания и техники

Кафедра: Математики и методики её преподавания

| | очная форма | очно-заочная форма | заочная форма |
|------------------|-------------|--------------------|---------------|
| Курс | 2,3 | | |
| Семестр/триместр | 4,5 | | |

| | | | |
|------------------------------------|--|--|--|
| Лекции | 36 | | |
| Лабораторные занятия | | | |
| Практические (семинарские) занятия | 54 | | |
| в т. ч. практическая подготовка | - | | |
| Форма(ы) промежуточной аттестации | <i>Зачет 4 сем. Экзамен 5 сем. - 0,3</i> | | |
| Контроль | 9 | | |
| Иные формы работы | - | | |
| Самостоятельная работа | 80,7 | | |

Всего часов: 216

Трудоемкость: 6 зачетных единиц.

Разработчик(и) рабочей программы: *канд. ф.-м. наук, доцент Елецких И.А.*

I. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

Цель изучения дисциплины: Целью преподавания дисциплины является создание целостного представления о предмете и методах общей теории дифференциального и интегрального исчисления в линейных нормированных пространствах, получение спектральных разложений самосопряженных операторов, изучение методами анализа дифференциально-операторных уравнений, а также изучение дифференциальных уравнений первого порядка в банаховом пространстве.

Задачи изучения дисциплины:

- раскрыть студентам значение курса для современных методов исследования в математике;
- ознакомить студентов с технологией построения теории абстрактной функции;
- изучить вопросы дифференцирования и интегрирования абстрактных функций;
- научить формулировать задачи в операторном виде и делать выводы о разрешимости операторных уравнений, используя свойства входящих в них операторов;
- изучить методы решения задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка в банаховом пространстве;
- рассмотрение свойств неотрицательных операторов в линейных нормированных пространствах;
- изучение спектрального разложения самосопряженного оператора;
- изучение методами анализа дифференциально-операторных уравнений в банаховом пространстве;
- развивать умения самостоятельной работы с научной и математической литературой.

Место дисциплины в структуре ОПОП: реализуется в рамках базовой (обязательной) части блока Б1. Дисциплины (модули).

Планируемые результаты обучения по дисциплине:

| Код компетенции | Индикаторы достижения компетенции | Планируемые результаты обучения по дисциплине |
|-----------------|---|---|
| ОПК-1 | Знать: - факты, концепции, принципы теорий, связанные с прикладной математикой и информатикой; | Знает: -основы функционального анализа; -возможности применения его методов свойств линейных операторов и прикладных исследований; |
| | Уметь: - разрабатывать алгоритмы, вычислительные модели и модели данных для решения научно-исследовательских задач; | Умеет: -применять основные утверждения и формулы при решении простейших задач функционального анализа |
| | Владеть: - навыками применения математического аппарата для решения научно-исследовательских задач. | Владеет: -способностью творчески применять современный аппарат функционального анализа для решения научных и прикладных задач. |
| ОПК-3 | Знать: - основы дискретной математики, численных методов, теории вероятностей и математической статистики, методы оптимизации и опти- | Знает: - методы решения задачи Коши для уравнения первого порядка в банаховом пространстве. |

| | | |
|--|--|---|
| | мального управления; | |
| | Уметь: - адаптировать стандартные математические модели к решению конкретных научно-исследовательских задач; | Умеет: - адаптировать стандартные математические модели к решению конкретных научно-исследовательских задач; - уметь применять свойства операторов для определения разрешимости уравнений, записанных в операторной форме. |
| | Владеть: - методами математического, информационного и имитационного моделирования по тематике | Владеет: - методами математического, информационного и имитационного моделирования |

II. СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу

Очная форма обучения

| № п/п | Наименование разделов и тем | Всего | Аудиторные занятия | | | Сам. раб. |
|-------|---|-----------|--------------------|-----------|----|-----------|
| | | | ЛК | ПЗ | ЛБ | |
| 1. | Тема 1. Метрические, линейные, нормированные пространства | 17 | 4 | 4 | | 9 |
| 2. | Тема 2. Линейные операторы | 17 | 4 | 4 | | 9 |
| 3. | Тема 3. Дифференциальное исчисление в линейных нормированных пространствах | 19 | 5 | 5 | | 9 |
| 4. | Тема 4. Абстрактные функции числовой переменной | 19 | 5 | 5 | | 9 |
| | <i>Контроль</i> | | | | | |
| | <i>Форма отчетности Зачет</i> | | | | | |
| | Итого за 4-5 семестр | 72 | 18 | 18 | | 36 |
| 5. | Тема 5. Сопряженные операторы и пространства | 22 | 2 | 4 | | 16 |
| 6. | Тема 6. Теория линейных уравнений в банаховых пространствах | 28 | 4 | 8 | | 16 |
| 7. | Тема 7. Элементы спектральной теории линейных операторов | 28 | 4 | 8 | | 16 |
| 8. | Тема 8. Абстрактные функции ограниченной вариации. Спектральные разложения самосопряженных операторов | 28 | 4 | 8 | | 16 |

| | | | | | | |
|----|---|------------|-----------|-----------|--|--------------|
| 9. | Тема 9. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и методы их решения | 28,7 | 4 | 8 | | 16,7 |
| | Контроль | 9 | | | | |
| | Форма отчетности Экзамен | 0,3 | | | | |
| | Итого за 5-й семестр | 144 | 18 | 36 | | 80,7 |
| | ИТОГО: | 216 | 36 | 54 | | 116,7 |

Очно-заочная форма обучения (не реализуется)

Заочная форма обучения (не реализуется)

III. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Текущая аттестация проводится в форме контрольной работы, теста, реферата, творческого задания, кейса и др.

Типовой вариант контрольной работы (4 семестр)

1. Пространство R последовательностей (действительных или комплексных) чисел f_n будет метрическим, если расстояние между двумя последовательностями $f=\{f_n\}$ и $g=\{g_n\}$ определить как $\rho(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f_n - g_n|}{1 + |f_n - g_n|}$. Проверить выполнимость аксиом метрического пространства.
2. Пусть E – линейное пространство и в E двумя способами введены нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$. Нормы $\|x\|_1$ и $\|x\|_2$ называются эквивалентными, если существуют числа $\alpha > 0$, $\beta > 0$ такие, что $(\forall x \in E) \quad \alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$. Докажите, что отношение эквивалентности обладает свойством симметричности: если $\|x\|_1 \sim \|x\|_2$, то $\|x\|_2 \sim \|x\|_1$.
3. В пространстве R_M квадратных матриц $A=(a_{ij})$ ($i, j=1, \dots, n$) порядка n матрицы будем рассматривать как операторы, действующие на векторы. Найти A^{-1} , если
 А). $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; Б). $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.
4. Найти различные нормы матрицы $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 \\ 0,5 & 0,2 \end{pmatrix}$. Провести улучшение $\|A\|$ и указать преобразующую матрицу.

Типовой вариант контрольной работы (5 семестр)

1. Доказать, что следующие функционалы являются линейными непрерывными и найти их нормы:
 А). $f[x(t)] = \int_{-1}^1 x(t) \cos t dt, \quad x \in L^2(-1,1)$; Б). $f[x(t)] = \int_0^1 x(\sqrt{t}) dt, \quad x \in L^2(0,1)$.

2. Найдите оператор, сопряженный к оператору $A: L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1]$, если
 - А). $Ax(t) = x(t^2)$;
 - Б). $Ax(t) = \int_0^1 t^2 x(t^3) dt$.
3. Доказать, что если P_1 и P_2 ($P_1, P_2 \in L(E)$) – проекторы, то $P = P_1 + P_2$ – проектор, если $P_1 P_2 = 0$. В этом случае $F = F_1 \oplus F_2$, где $F_i = P_i(E)$ ($i = 1, 2$).
4. Доказать, что компактное метрическое пространство полно.

Примерная тематика рефератов

1. Линейное дифференциальное уравнение с постоянным оператором в банаховом пространстве.
2. Эволюционный оператор и решение линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.
3. Дифференциальное уравнение с периодической оператор-функцией в банаховом пространстве.
4. Линейные дифференциальные уравнения в комплексной плоскости.
5. Компактность в метрических пространствах.
6. Евклидовы пространства.
7. Интеграл Стильтьеса в линейных нормированных пространствах.
8. Тригонометрические ряды в линейных нормированных пространствах.
9. Элементы дифференциального исчисления для нелинейных операторов в банаховом пространстве.
10. Элементы дифференциального исчисления для нелинейных операторов в банаховом пространстве.

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме зачета в 4 семестре и экзамена в 5 семестре с использованием следующих оценочных материалов

Вопросы к зачету (4 семестр, очная форма обучения)

1. Метрические пространства. Свойства метрических пространств.
2. Теорема о категориях. Принцип сжимающих отображений и его приложение для решения задачи Коши.
3. Линейные нормированные пространства. Конечномерные пространства.
4. Пространства со скалярным произведением. Гильбертовы пространства.
5. Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывные линейные операторы. Ограниченные линейные операторы. Нормы линейного оператора.
6. Ряды в пространстве линейных ограниченных операторов. Сильная сходимость. Принцип равномерной ограниченности.
7. Обратные операторы в линейных нормированных пространствах. Множество нулей. Теорема Банаха. Примеры обратных операторов.
8. Левый и правый обратные операторы. Существование обратных операторов.
9. Понятие дифференцируемости. Сильная и слабая дифференцируемость в линейных нормированных пространствах.
10. Формула Лагранжа конечных приращений.

Вопросы к экзамену (5 семестр, очная форма обучения)

1. Метрические пространства. Примеры метрических пространств.
2. Свойства метрических пространств (принцип вложенных шаров).
3. Свойства метрических пространств (теорема о категориях).
4. Свойства метрических пространств (принцип сжимающих отображений и его обобщение).
5. Линейные нормированные пространства.
6. Пространства со скалярным произведением.
7. Линейные операторы в нормированных пространствах. Непрерывные линейные операторы.
8. Ограниченные линейные операторы.
9. Нормированное пространство $L(X, Y)$. Норма линейного оператора.
10. Равномерная сходимости линейных операторов.
11. Ряды в $L(X, Y)$. Пространство $L(X)$.
12. Принцип равномерной ограниченности.
13. Обратные операторы в линейных нормированных пространствах Множество нулей. Теорема Банаха.
14. Левый и правый обратные операторы.
15. Существование обратных операторов.
16. Понятие дифференцируемости. Сильная и слабая дифференцируемость в линейных нормированных пространствах.
17. Производная сложной функции.
18. Формула Логранжа конечных приращений.
19. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью.
20. Производные второго порядка.
21. Отображение m -мерного евклидова пространства в n -мерное.
22. Понятие абстрактной функции. Предел и непрерывность.
23. Дифференцирование абстрактной функции.
24. Степенные ряды в нормированном пространстве.
25. Аналитические абстрактные функции и ряды Тейлора.
26. Метод малого параметра в простейшем случае.

IV. ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1. Основная литература

1. Треногин, В. А. Функциональный анализ : учебник / В. А. Треногин. – 3-е изд., испр. – Москва : Физматлит, 2002. – 488 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82613> (дата обращения: 24.08.2022). – ISBN 5-9221-0272-9. – Текст : электронный.
2. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа : учебник : [16+] / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. – 7-е изд. – Москва : Физматлит, 2012. – 573 с. – (Классический университетский учебник). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82563> (дата обращения: 24.08.2022). – ISBN 978-5-9221-0266-7. – Текст: электронный.

4.2. Дополнительная литература

1. Кунакова, Е. Ю. Лекции по функциональному анализу: учебное пособие / Е. Ю. Кунакова, И. Л. Томашевский ; Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова. – Архангельск : Северный (Арктический) федеральный университет (САФУ), 2013. – 119 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=436315> (дата обращения: 24.08.2022). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-261-00759-3. – Текст : электронный.
2. Кутузов, А. С. Введение в функциональный анализ : учебное пособие : [16+] / А. С. Кутузов. – Москва ; Берлин : Директ-Медиа, 2020. – 482 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=571413> (дата обращения: 24.08.2022). – ISBN 978-5-4499-0433-1. – DOI 10.23681/571413. – Текст : электронный.

V. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

| № пп | Ссылка на информационный ресурс | Наименование разработки в электронной форме | Доступность |
|---------|---|---|---|
| 1. | http://www.biblioclub.ru | Электронно-библиотечная система (ЭБС) Университетская библиотека онлайн | Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем индивидуальный неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет |
| 2. | http://www.exponenta.ru | Образовательный математический сайт, содержащий математические пакеты для поддержки проводимых занятий, а также методические разработки | Неограниченный доступ |
| 3. | https://www.matburo.ru/ | Справочная информация по математическим дисциплинам | Неограниченный доступ |
| 4. | http://allmath.ru | Математический портал, содержащий разделы: высшая математика, прикладная математика, школьная математика, олимпиадная математика. | Неограниченный доступ |
| 5. | http://www.e.lanbook.com | Издательство «Лань» | Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем индивидуальный неограниченный доступ/ |

| | | | |
|----|--------------------|--|--|
| 6. | <u>ЭБС «Юрайт»</u> | Виртуальный читальный зал учебников и учебных пособий от авторов из ведущих вузов России по экономическим, юридическим, гуманитарным, инженерно-техническим и естественно-научным направлениям и специальностям. | biblio-online.ru Доступ после регистрации |
|----|--------------------|--|--|

VI. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

| | | | |
|----|--|---|--|
| 1. | <u>zbMATH</u> | Математическая база данных, охватывающая около 4 000 000 документов, из более 3 000 журналов и 170 000 книг по математике, статистике, информатике, физике, естественным наукам | Доступ свободный zbmath.org Доступ свободный |
| 2. | www.garant.ru | Информационно-правовой портал | Свободный доступ |
| 3. | www.elibrary.ru | Российский информационный портал в области науки, технологии, медицины и образования | Свободный доступ |
| 4. | www.consultant.ru | Российская компьютерная справочно-правовая система | Свободный доступ |

VII. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

При реализации учебной дисциплины применяется следующее лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Windows;
- Microsoft Office;
- LibreOffice и др.

VIII. ОБОРУДОВАНИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Учебные занятия проводятся в аудиториях, укомплектованных специализированной мебелью, в том числе стационарными или переносными техническими средствами обучения (проектор, экран, компьютер/ноутбук).

Самостоятельная работа проводится в кабинетах, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.