

ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.А. БУНИНА



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.01.02 Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление**

*(Шифр и полное название дисциплины в соответствии с учебным планом)*

**Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика**

**Направленность (профиль): Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление**

**Квалификация (степень): Исследователь. Преподаватель-исследователь.**

**Форма обучения: очная**

**Институт: математики, естествознания и техники**

**Кафедра: математики и методики ее преподавания**

	очная форма	очно-заочная форма	заочная форма
Курс	2		
Семестр/триместр	3,4		

Лекции	36		
Лабораторные занятия			
Практические (семинарские) занятия	54		
Консультации			
Контроль	36		
Самостоятельная работа	54		

**Всего часов: 180**

**Трудоемкость: 5 зачетных единиц.**

Разработчик(и) рабочей программы:

к.ф.-м.наук, доцент В.Е Щербатых

## **I. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ**

### **Цель изучения дисциплины:**

Целями освоения дисциплины "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" являются:

- завершение формирования у аспирантов современных теоретических знаний в области методов решения задач математической физики, описывающих некоторые физические процессы, а также практических навыков в их использовании;
- знакомство аспирантов с типичными постановками задач управления, а также с доказательствами утверждений, характеризующих оптимальные решения в классе программных управлений и управлений по принципу обратной связи;
- ввести аспирантов в проблематику очень важного раздела современной математики;
- изучить базовые задачи теории, чтобы уметь работать с задачами приложений;
- используя весь комплекс фундаментальных знаний, имеющихся у аспирантов, дать на современном уровне обзор достижений в области оптимального управления.

### **Задачи изучения дисциплины:**

Задачами изучения дисциплины "Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление" являются:

- добиться четкого, ясного понимания основных понятий и объектов дисциплины;
- сформировать способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских задач;
- уметь проводить самостоятельный анализ физических аспектов в классических постановках математических задач;
- способствовать осуществлению научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий;
- способствовать интенсивной научно-исследовательской и научно-изыскательской деятельности;
- способствовать выработке навыков планирования и решения задач профессионального и личностного развития;
- выработка активной позиции для участия в работе российских и международных конференциях;
- способствовать творческому применению, развитию и реализации сложных математических алгоритмов в современных программных комплексах.

**Место дисциплины в структуре ОПОП:** реализуется в рамках вариативной части (части, формируемой участниками образовательных отношений) блока Б1. Дисциплины (модули).

### **Планируемые результаты обучения по дисциплине:**

Код	Индикаторы компетенции	Планируемые результаты обучения
-----	------------------------	---------------------------------

компетенции		по дисциплине
ПК-2. способность к проектированию и реализации преподавательской деятельности по образовательным программам в рамках направленности (профиля) программы аспирантуры	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- современные тенденции развития научного знания в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления;</li> <li>- основы методики преподавания учебных дисциплин (модулей) в высшей школе в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления;</li> <li>- содержание, принципы и методы отбора содержания, методов, средств профессионального образования по дисциплинам (модулям) в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.</li> </ul>	<p>Знает:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>–наиболее важные научные результаты и проблемы современной математики и смежных областей;</li> <li>–Современные методы исследования решений математических задач;</li> </ul>
	<p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>-проектировать и осуществлять отбор содержания, методов, средств профессионального образования по дисциплинам (модулям) в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления;</li> <li>-разрабатывать и обновлять рабочие программы, учебно-методические комплексы, контрольно-оценочные средства и другие методические материалы по образовательным программам, дисциплинам (модулям) в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления; использовать современные образовательные технологии в преподавании дисциплин (модулей) в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.</li> </ul>	<p>Умеет:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>–применять основные математические методы и алгоритмы для решения стандартных задач математики</li> <li>– разрабатывать новые методы и алгоритмы исследования и применять их в самостоятельной научно-исследовательской деятельности в области математики, механики, естественных наук ;</li> <li>–находить, выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах;</li> <li>–критически оценивать любую поступающую информацию, вне зависимости от источника;</li> <li>–находить альтернативные варианты решения исследовательских и практических задач и оценивать их потенциал.</li> </ul>

	<p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>методами проектирования содержания образования, отбора методов, средств профессионального образования в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления;</li> <li>методикой преподавания дисциплин (модулей) в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления;</li> <li>современными образовательными технологиями в преподавании по дисциплинам (модулям) в области дифференциальных уравнений, динамических систем и оптимального управления.</li> </ul>	<p><b>Владеет:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>навыками планирования, анализа, учебно-познавательной деятельности;</li> <li>навыками анализа методологических проблем, возникающих при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях;</li> <li>навыками генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач.</li> </ul>
--	---	---

## II. СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего	Аудиторные занятия			Сам. раб.
			ЛК	ПЗ	ЛБ	
	<b>Раздел 1.</b> <b>Обыкновенные дифференциальные уравнения</b>	<b>30</b>	<b>6</b>	<b>12</b>		<b>12</b>
1.	Тема 1. Теоремы существования Арцела, Пикара-Линделефа, Пеано. Продолжение решений. Непрерывная зависимость и дифференцируемость по начальным данным. Непрерывная зависимость решений от параметров. Первые интегралы.	16	4	6		6
2.	Тема 2. Дифференциальные неравенства. Неравенство Гронуолла. Верхнее и нижнее решение. Теорема Уитнера. Оценка разности двух решений. Теорема единственности.	14	2	6		6
	<b>Раздел 2.</b>	<b>60</b>	<b>12</b>	<b>24</b>		<b>24</b>

	<b>Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений</b>					
3.	Тема 3. Теория устойчивости. Второй метод Ляпунова. Теоремы об устойчивости и неустойчивости. Устойчивость линейных систем. Устойчивость периодических движений.	14	2	6		6
4.	Тема 4. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Характеристическое уравнение. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами. Критерии устойчивости по первому приближению.	14	2	6		6
5.	Тема 5. Периодические решения уравнений первого порядка. Предельные циклы и теории контактов. Автоколебания. Точечные преобразования и предельные циклы. Устойчивость неподвижной точки. Теорема Кенигса. Условия устойчивости предельного цикла. Критерии существования периодических решений. Виды и свойства предельных циклов.	16	4	6		6
6.	Тема 6. Грубые системы. Грубые состояния равновесия. Простые, сложные, грубые предельные циклы. Необходимые и достаточные условия грубости. Предельные циклы, зависящие от параметра. Кратные предельные циклы. Поведение предельных циклов при малых изменениях параметра.	16	4	6		6
	<i>Форма отчетности</i>	<i>Зачет с оценкой</i>				
	<b>Итого за 3 семестр</b>	<b>90</b>	<b>18</b>	<b>36</b>		<b>36</b>
	<b>Раздел 3. Дифференциальные уравнения в частных производных</b>	<b>30</b>	<b>10</b>	<b>10</b>		<b>10</b>
7.	Тема 7. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных		2	2		2
8.	Тема 8. Вариационные принципы. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных.		2			2

	Теорема Ковалевской.					
9.	Тема 9.Обобщенные решения основных краевых задач для уравнений эллиптического типа. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений.		4	4		4
10.	Тема 10.Некоторые теоремы вложения функциональных пространств (неравенства Пуанкаре и Стеклова). Задача на собственные значения для эллиптического уравнения (в частности, задача Штурма-Лиувилля). Свойства собственных значений и собственных функций.		2	2		2
	<b>Раздел 4. Оптимальное управление</b>	<b>24</b>	<b>8</b>	<b>8</b>		<b>8</b>
11.	Тема 11. Классические задачи оптимального управления. Понятие оптимальности. Постановка общей задачи оптимального управления. Экстремальные свойства оптимальных управлений и их синтез. Существование решений экстремальных задач и алгоритмы их поиска.		2	2		2
12.	Тема 12. Принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума. Принцип максимума Понтрягина. Задача с подвижными концами и условия трансверсальности. Принцип максимума для неавтономных систем. Вариация управлений и траекторий. Вывод условий трансверсальности. Принцип максимума и условие трансверсальности как необходимые условия. Достаточные условия оптимальности управления.		4	4		4
13.	Тема 13. Общий принцип максимума. Уравнение Беллмана и достаточные условия оптимальности. Принцип максимума для неавтономных систем. Оптимальные процессы с параметрами.		2	2		2
	<b>Форма отчетности</b>	<b>Экзамен</b>				
	<b>Контроль</b>	<b>36</b>				
	<b>Итого за 4 семестр</b>	<b>54</b>	<b>18</b>	<b>18</b>		<b>18</b>
	<b>ИТОГО:</b>	<b>180</b>	<b>36</b>	<b>54</b>		<b>54</b>

**Очно-заочная форма обучения (не реализуется)**

## Заочная форма обучения (не реализуется)

### III. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Текущая аттестация проводится в форме контрольной работы.

#### Типовой вариант контрольной работы

##### Контрольная работа №1

1. Каково фазовое пространство системы  $\dot{x} = f(\sin x, \cos y)$ ,  $\dot{y} = g(\sin x, \cos y)$ , у которой правые части  $f$  и  $g$  периодические функции по обоим переменным
2. Докажите, что нулевое решение системы  $\dot{x} = -axy^4$ ,  $\dot{y} = byx^4$ ,  $a > 0, b > 0$  устойчиво. Объясните, почему оно не является асимптотически устойчивым.
3. Для системы
$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - 2y - a^2 x(x^2 + y^2)^2, \\ \dot{y} &= 2x + \mu y - b^2 y(x^2 + y^2)^2\end{aligned}$$
определите тип и устойчивость положения равновесия  $x = y = 0$  в зависимости от значений  $\mu$ . Докажите, что при  $\mu > 0$  существует устойчивый предельный цикл.
4. Являются ли взаимосвязанными частота собственных колебаний нелинейной консервативной системы и амплитуда колебаний?
5. Сколько имеется областей параметрического резонанса уравнение Матрё?

##### Контрольная работа №2

1. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения
$$(y + z) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y + x) \frac{\partial u}{\partial z} = u.$$
2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$  и проходящую через линию  $y = x, z = x^2$ .
3. Определить тип уравнения, привести его к каноническому виду и найти общее решение этого уравнения:
$$u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0.$$
4. Для объекта первого порядка  $\dot{x} = ax + u, a < 0$  найти ограниченное  $|u(t)| \leq 1$  уравнение, при котором:
  - а) состояние объекта достигает из  $x(0) = 0$  в момент  $T=1$  максимального значения;
  - б) объект с параметром  $a = 1$ , двигаясь из состояния  $x(0) = 1$  в момент  $T=1$ , доставляет максимальное значение функционалу

$$J = \int_0^T (x(t) - 0,5t) dt.$$

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме зачета с оценкой, экзамена с использованием следующих оценочных материалов:

### **Вопросы к зачету с оценкой ( 3 семестр, очная форма обучения)**

1. Теоремы существования Арцела, Пикара-Линделефа, Пеано. Продолжение решений.
2. Непрерывная зависимость и дифференцируемость по начальным данным. Непрерывная зависимость решений от параметров.
3. Первые интегралы. Дифференциальные неравенства.
4. Неравенство Гронуола. Верхнее и нижнее решение.
5. Теорема Уитнера. Оценка разности двух решений.
6. Теорема единственности.
7. Теоремы об устойчивости и неустойчивости. Устойчивость линейных систем.
8. Устойчивость периодических движений.
9. Второй метод Ляпунова для неустановившихся движений. Теорема Четаева.
10. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Характеристическое уравнение.
11. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами. Критерии устойчивости по первому приближению.
12. Динамические системы на плоскости. Предельные точки и множества. Их структура.
13. Свойства предельных траекторий. Теорема о наличии состояния равновесия внутри замкнутой траектории.
14. Основная теорема о состояниях равновесия. Особые точки. Классификация.
15. Исключительные направления. Нормальные области. Поведение интегральных кривых в нормальной области.
16. Характеристическое уравнение алгебраической системы. Расположение интегральных кривых в нормальной области в зависимости от корней характеристического уравнения.
17. Первая проблема различения. Лемма Лона.
18. Вторая проблема различения. Теорема Лона.
19. Аналитические критерии для различных типов особых точек второй группы.
20. Проблема различения центра и фокуса. Необходимые и достаточные условия существования центра.



21. Периодические решения уравнений первого порядка.
22. Предельные циклы и теории контактов.
23. Автоколебания.
24. Точечные преобразования и предельные циклы.
25. Устойчивость неподвижной точки.
26. Теорема Кенигса.
27. Условия устойчивости предельного цикла.
28. Критерии существования периодических решений (Бендиксона, Дюлака, Драгилева, принцип симметрии).
29. Виды и свойства предельных циклов.
30. Грубые системы. Грубые состояния равновесия.
31. Простые, сложные, грубые предельные циклы.
33. Необходимые и достаточные условия грубости.
34. Предельные циклы, зависящие от параметра. Кратные предельные циклы. Поведение предельных циклов при малых изменениях параметра.

**Вопросы к экзамену  
( 4 семестр, очная форма обучения)**

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных (колебательные процессы, теплопроводность и диффузия, электромагнитное поле, уравнения гидро- и газодинамики, уравнение Шредингера).
2. Классификация и канонические формы уравнений в частных производных второго порядка.
3. Постановка основных краевых задач: задача Коши, первая, вторая и третья краевые задачи.
4. Корректность постановки краевых задач. Классические решения основных краевых задач для эллиптических уравнений.
5. Уравнение Лапласа. Основные свойства гармонических функций (формула Грина, теорема о среднем, принцип максимума, теорема об устранимой особенности).
6. Решение задач Дирихле и Неймана (внутренней и внешней) методом потенциалов.
7. Функция Грина и ее применение к решению краевых задач.
8. Формула Пуассона для шара и круга.
9. Уравнения параболического типа. Постановка основных краевых задач. Принцип максимума и единственность. Тепловые потенциалы. Решение смешанной задачи методом разделения переменных (метод Фурье). Обобщение решения. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (формула Пуассона).
10. Уравнения гиперболического типа. Постановка основных краевых задач.
11. Решение смешанной задачи методом Фурье.

12. Обобщенные решения. Решение задачи Коши для волнового уравнения (формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа).
13. Обобщенные решения основных краевых задач для уравнений эллиптического типа.
14. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений.
15. Свойства собственных значений и собственных функций. Вариационный метод решения краевых задач.
16. Линейные управляемые процессы.
17. Управляемость: множество достижимости.
18. Управляемость и устойчивость автономных систем.
19. Оптимальное по быстродействию управление для линейных систем.
20. Синтез оптимальных управлений для некоторых основных нелинейных управляемых систем.
21. Синтез оптимальных по быстродействию управлений с обратной связью для нелинейных систем второго порядка с одной степенью свободы
22. Метод динамического программирования
23. Метод последовательных приближений для отыскания оптимальных программных движений.
24. Метод последовательных приближений для решения задачи синтеза оптимальных управлений.
25. Метод направленного поиска коэффициентов усиления в системах управления.
26. Движения нелинейных систем, определяемые краевыми условиями.
27. Метод наискорейшего спуска.

## **IV. ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **4.1. Основная литература**

1. Андронов А.А. , Леонтович Е.А. , Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка / – Москва : Наука, 2003. – 565 с. – Режим URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222208> (дата обращения: 22.11.2020)
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.– Москва: Наука, 1976.–391 стр.– URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468230> (дата обращения: 22.11.2020).

### **4.2. Дополнительная литература**

1. В Александров.В. , Болтянский В.Г. , Лемак С.С. и др Оптимальное управление движением : учебное пособие.– Москва : Физматлит, 2005. – 375 с. –

URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82277> (дата обращения: 22.11.2020).

2. Громов Ю.Ю. , Иванова О.Г. , Алексеев В.В. и др. Специальные разделы теории управления : оптимальное управление динамическими системами: учебное пособие. – Тамбов : Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2012. – 108 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277799> (дата обращения: 22.11.2020).

3. Крутиков, В.Н. Методы оптимизации : учебное пособие / В.Н. Крутиков. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2011. – 92 с.– URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232682> (дата обращения: 22.11.2020).

4. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации : учебное пособие / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – 2-е изд. – Москва : Физматлит, 2011. – 368 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76629> (дата обращения: 22.11.2020).

## V. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№ пп	Ссылка на информационный ресурс	Наименование разработки в электронной форме	Доступность
1.	<a href="https://infourok.ru/">https://infourok.ru/</a>	Инфоурок: образовательный интернет-проект России. Включает: конспекты уроков, презентации, тесты, видеоуроки и другие материалы по предметам школьной программы.	Свободный доступ
2.	<a href="http://edu.ru/">http://edu.ru/</a>	Российское образование: Федеральный портал. Включает ссылки на порталы и сайты образовательных учреждений; государственные образовательные стандарты; нормативные документы; каталог экскурсий и обучающих программ.	Свободный доступ
3.	<a href="http://www.rsl.ru">http://www.rsl.ru</a>	Российская государственная библиотека	Доступ из любого университетского компьютера (необходима регистрация)
4.	<a href="http://www.gnpbu.ru">http://www.gnpbu.ru</a>	Государственная педагогическая библиотека им. К.Д. Ушинского	Свободный доступ

## VI. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1.	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>	Электронно-библиотечная система (ЭБС) Университетская библиотека онлайн	Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем предоставляется неограниченный индивидуальный доступ из любой
----	---	--	---

			точки, в которой имеется доступ к сети Интернет
2.	<a href="http://www.garant.ru">www.garant.ru</a>	Информационно-правовой портал	Свободный доступ
3.	<a href="http://www.elibrary.ru">www.elibrary.ru</a>	Российский информационный портал в области науки, технологии, медицины и образования	Свободный доступ
4.	<a href="http://www.consultant.ru">www.consultant.ru</a>	Российская компьютерная справочно-правовая система	Свободный доступ
5.	<a href="https://uisrussia.msu.ru">https://uisrussia.msu.ru</a>	Университетская информационная система «РОССИЯ»	После регистрации
6.	<a href="http://www.iprbookshop.ru">www.iprbookshop.ru</a>	Читальный зал	Свободный доступ
7.	<a href="https://openedu.ru">https://openedu.ru</a>	Национальный портал онлайн обучения «Открытое образование»	Свободный доступ

## **VII. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

При реализации учебной дисциплины применяется следующее лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Windows;
- Microsoft Office;
- LibreOffice и др.

## **VIII. ОБОРУДОВАНИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Учебные занятия проводятся в аудиториях, укомплектованных специализированной мебелью, в том числе стационарными или переносными техническими средствами обучения (проектор, экран, компьютер/ноутбук).

Самостоятельная работа проводится в кабинетах, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.