МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.А. БУНИНА»

О.Н. Масина, О.В. Дружинина, Л.Б. Рапопорт

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Елец – 2019

УДК 51
ББК 32.97
С 34

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина

Рецензенты:
З.Л. Шулиманова, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры «Высшая математика и естественные науки»
(Российский университет транспорта (МИИТ));
В.Е. Щербатых, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики и методики ее преподавания
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

С 34 **Масина О.Н., Дружинина О.В., Рапопорт Л.Б.** Элементы теории устойчивости математических моделей управляемых систем. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2019. – 143 с.

ISBN 978-5-00151-020-8

Пособие посвящено вопросам теории устойчивости математических моделей управляемых систем. Приведен обзор понятий устойчивости с учетом их взаимосвязи. Представлены методы исследования устойчивости в смысле А.М. Ляпунова, а также описан современый подход к изучению устойчивости в смысле Н.Е. Жуковского. Проведен анализ абсолютной устойчивости управляемых систем с одним и с несколькими нелинейными элементами в обратной связи. Рассмотрены примеры исследования устойчивости математических моделей. Охарактеризованы приложения в областях системного анализа, управления и стабилизации динамических систем. Содержатся задачи и упражнения, связанные с темами параграфов.

Пособие предназначено для обучающихся в высших учебных заведениях студентов физико-математических и технических направлений подготовки, а также для самостоятельной работы студентов-заочников различных специальностей. Пособие может быть использовано аспирантами соответствующих направлений обучения.

УДК 51
ББК 32.97

ISBN 978-5-00151-020-8

Содержание

Введение 5
§ 1. Обзор понятий устойчивости 7
1.1. Краткий исторический экскурс 7
1.2. Устойчивость по Ляпунову 10
1.3. Устойчивость по Жуковскому 17
1.4. Орбитальная устойчивость 20
1.5. Современный подход к изучению устойчивости по Жуковскому 24
1.6. Управляемые системы 26
1.7. Практическая значимость исследований устойчивости и некоторые направления анализа устойчивости систем управления 36
§ 2. Метод функций Ляпунова 40
2.1. Теоремы об устойчивости и об асимптотической устойчивости 40
2.2. Теоремы о неустойчивости 46
§ 3. Устойчивость по первому приближению 49
3.1. Уравнения первого приближения 49
3.2. Теорема об устойчивости по первому приближению 51
§ 4. Методы исследования устойчивости по Жуковскому 57
4.1. Необходимые и достаточные условия устойчивости по Жуковскому 57
4.2. Уравнение в вариациях 61
4.3. Принцип сведения 62
4.4. Условия устойчивости по первому приближению 65
4.5. Конкретизация условий устойчивости 68
4.6. Стабилизация по Жуковскому 72
§ 5. Критерии устойчивости управляемых систем 74
5.1. Некоторые общие понятия 74
5.2. Передаточные функции 75
5.3. Алгебраические критерии устойчивости 78
5.4. Частотные критерии устойчивости 82
5.5. Определение области устойчивости 85
§ 6. Линейные нестационарные системы 87
6.1. Устойчивость по Ляпунову линейных нестационарных систем 87
6.2. Параметрический резонанс в линейных нестационарных системах 88
6.3. Алгебры Ли и группы Ли 93
6.4. Квадратичная устойчивость и квадратичная стабилизация 95
§ 7. Абсолютная устойчивость систем управления 98
7.1. Абсолютная устойчивость управляемых систем с одним нелинейным элементом в обратной связи 98

7.2. Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями. Достаточные условия существования функций Лурье–Постникова 105
7.3. Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями. Необходимые и достаточные условия существования функций Лурье–Постникова 107
§ 8. Примеры исследования устойчивости 115
§ 9. Задачи и упражнения 128
Список литературы 136

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее пособие посвящено вопросам теории устойчивости математических моделей управляемых систем. Пособие состоит из 9 параграфов.

Параграф 1 «Обзор понятий устойчивости» посвящен анализу и взаимосвязи базовых свойств устойчивости траекторий динамических систем. Здесь рассмотрены свойства устойчивости следующих типов: устойчивость в смысле А.М. Ляпунова, орбитальная устойчивость и устойчивость в смысле Н.Е. Жуковского, а также приведен краткий исторический экскурс. Рассмотрены некоторые понятия математической теории управления. Представлены некоторые направления исследований, связанные с устойчивостью систем управления.

В § 2 «Метод функций Ляпунова» представлен метод исследования устойчивости на основе вспомогательных функций. Рассмотрены теоремы об устойчивости и об асимптотической устойчивости, а также теоремы о неустойчивости. Приведены краткие доказательства теорем и рассмотрены примеры.

В § 3 «Устойчивость в смысле Ляпунова по первому приближению» рассмотрено понятие линеаризованных уравнений или уравнений первого приближения. Сформулированы условия устойчивости по первому приближению, приведены краткие доказательства и рассмотрены ряд примеров.

В § 4 «Методы исследования устойчивости в смысле Жуковского» даны необходимые и достаточные условия устойчивости по Жуковскому. Приведено обобщение понятия уравнения в вариациях относительно невозмущенной траектории. Кроме того, рассмотрен принцип сведения задачи об устойчивости по Жуковскому к задаче об устойчивости по Ляпунову. Изучены условия устойчивости траекторий нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка.

В § 5 «Критерии устойчивости управляемых систем» рассмотрены вопросы устойчивости по Ляпунову непрерывных систем управления. Дано понятие передаточной функции. Сформулированы алгебраические и частотные критерии устойчивости. Приведено определение области устойчивости в пространстве параметров. Рассмотрен ряд примеров.

В § 6 «Линейные нестационарные системы» сформулированы условия устойчивости по Ляпунову линейных нестационарных систем. Приведены доказательства и рассмотрены ряд примеров. Приведен пример параметрического резонанса в линейных нестационарных системах. Рассмотрены алгебры Ли и группы Ли. Предложены достаточные условия асимптотической устойчивости с применением квадратичной функции Ляпунова.

В § 7 «Абсолютная устойчивость систем управления» проведен анализ абсолютной устойчивости управляемых систем с одним и с несколькими нелинейными элементами в обратной связи. Предложены необходимые и достаточные условия существования функций Лурье–Постникова.

В § 8 «Примеры исследования устойчивости» рассмотрены примеры исследования устойчивости математических моделей динамических систем. Охарактеризованы некоторые приложения в областях системного анализа, управления и стабилизации динамических систем.

В § 9 «Задачи и упражнения» содержатся задачи и упражнения, связанные с темами параграфов.

После текста параграфов в пособии приведен список литературы. В тексте пособия содержатся ссылки на использованные источники.

Параграфы 1–3 подготовлены О.Н. Масиной и О.В. Дружининой совместно, § 4 – О.В. Дружининой, § 5 – О.Н. Масиной, § 6 и § 7 – Л.Б. Рапопортом, § 8 и § 9 – авторами совместно.

Пособие предназначено для обучающихся в высших учебных заведениях студентов физико-математических и технических направлений подготовки, а также для самостоятельной работы студентов-заочников различных специальностей. Пособие может быть использовано аспирантами соответствующих направлений обучения.

§ 1. Обзор понятий устойчивости

1.1. Краткий исторический экскурс. Начиная с фундаментальных трудов А. Пуанкаре [75], А.М. Ляпунова [54] и Н.Е. Жуковского [36], качественное изучение решений дифференциальных систем вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \;\; f: D \to R^n, \;\; D \subset R^n, \tag{1.1}$$

либо систем, сводящихся к системам вида (1), проводились многими исследователями в [9, 15, 17, 18, 33, 34, 39. 47, 55, 56, 59, 86, 97] и в других работах. Независимую переменную t в (1) можно интерпретировать как время, а переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ – как координаты движущейся точки в n-мерном пространстве R^n. Предположим, что правая часть уравнения (1) непрерывна в рассматриваемой области $D \subset R^n$ и удовлетворяет в ней некоторым условиям, обеспечивающим единственность решения.

Известно, что дифференциальная система (1) при дополнительных условиях порождает динамическую систему в смысле Биркгофа [9]. *Динамической системой* в смысле Биркгофа называется однопараметрическая группа $\varphi(t, p)$, где $t \in R = (-\infty, +\infty)$, преобразований пространства R^n на себя, удовлетворяющая условиям: 1) $\varphi(t, p) = p$ (начальное условие); 2) $\varphi(t, p)$ непрерывна по совокупности переменных (t, p); 3) $\varphi(t_1, \varphi(t_2, p)) = \varphi(t_1 + t_2, p)$ (свойство группы). Если $\varphi \in C^r$, $r \geq 1$, то динамическая система называется *гладкой*. Отображение $\varphi(t, p)$ при фиксированном p называется *движением*, а при фиксированном t – *переносом* вдоль траектории; при фиксированном p множество точек $\{\varphi(t, p) : t \in R\}$ будем называть *траекторией* этого движения и обозначать через $C(p)$. Аналогично множества $\{\varphi(t, p) : t \in R^+\}$ и $\{\varphi(t, p) : t \in R^-\}$ называются положительной и отрицательной полутраекториями и обозначаются через $C^+(p)$ и $C^-(p)$. Множества $H(p) = \overline{C(p)}$, $H^+(p) = \overline{C^+(p)}$ и $H^-(p) = \overline{C^-(p)}$ называются соответственно оболочкой, положительной полуоболочкой, отрицательной полуоболочкой движения дифференциальной системы.

Основоположникам геометрической (качественной) теории дифференциальных систем и теории устойчивости движения А. Пуанкаре [66], Н.Е. Жуковскому [32], А.М. Ляпунову [49], И. Бендиксону [94], Дж. Биркгофу [9] принадлежат фундаментальные результаты и методы исследования, положившие начало дальнейшим исследованиям как в России, так и за рубежом.

Современные методы качественной теории дифференциальных систем базируются на достижениях теории устойчивости движения, теории нелинейной динамики, КАМ-теории. Фундаментальный вклад в развитие названных теорий внесли А.Н. Колмогоров, Н.Н. Боголюбов, Н.Г. Четаев, В.В. Румянцев, Н.Н. Красовский, Е.А. Барбашин, Н.Д. Моисеев, Н.П. Еругин, В.В. Степанов, В.В. Немыцкий, И.Г. Петровский, А.А. Андронов, Ю.А. Митропольский, В.И. Зубов, А.А. Шестаков, Г.А. Леонов, Е.А. Гребеников, Ю.А. Рябов, В.В. Козлов, В.М. Матросов, В.И. Арнольд, М.Г. Крейн, И. Бендиксон, Дж. Биркгоф, П. Пенлеве, О. Перрон, Т. Леви-Чивита, Ф. Хартман, Т. Иосидзава и другие ученые. Существенное развитие качественные методы Ляпунова, Пуанкаре и Жуковского получили в работах названных ученых, а также в работах Г.Н. Дубошина, М.Ш. Аминова, Ю.Д. Соколова, Г.Ф. Хильми, В.Г. Демина, А.С. Галиуллина, В.М. Алексеева, А.П. Маркеева, Ю.С. Богданова, Б.П. Демидовича, Ю.В. Малышева, Т. Ура, Н. Бхатиа, К. Зундмана, Ж. Шази, Д. Саари, К. Маршала, Дж. Баумгарте, В. Себехея и других ученых.

Тридцатые и сороковые годы двадцатого столетия были ознаменованы плодотворной деятельностью двух крупных научных школ: Московской научной школы ГАИШ (В.В. Степанов, Н.Д. Моисеев, Г.Н. Дубошин, Н.Ф. Рейн и другие) и Казанской научной школы (Н.Г. Четаев, К.П. Персидский, И.Г. Малкин, Г.В. Каменков, М.Ш. Аминов и другие). Ученые этих научных школ внесли существенный вклад в развитие теории устойчивости Ляпунова и теории устойчивости Жуковского. В частности, М.Ш. Аминов продолжил исследование Н.Е. Жуковского о прочности траекторий движения механических систем с конечным числом степеней свободы, а В.В. Степанов, Н.Д. Моисеев и Г.Н. Дубошин и другие получили важные результаты по теории устойчивости в целом, поперечной и продольной устойчивости, орбитальной устойчивости, по методу контактных характеристик, по ограниченным проблемам двух и трех тел. Возникшие в более поздний период научные школы по качественной теории, теории устойчивости и теории нелинейных колебаний в Москве (школа В.В. Степанова-В.В. Немыцкого в МГУ), Киеве, Екатеринбурге, Минске, Санкт-Петербурге, Самарканде, Нижнем Новгороде внесли дальнейший крупный вклад в развитие названных теорий.

Изучение фазового портрета траекторий в окрестности особой точки на плоскости впервые проведено Н.Е. Жуковским и А. Пуанкаре, а затем их исследования продолжили И. Бендиксон и другие ученые. Исследование фазового портрета траекторий в окрестности особой точки многомерных систем дифференциальных уравнений, начиная с работ А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова, Ж. Адамара, в работах И.Г. Петровского[62], В.В. Немыцкого и В.В. Степанова[59], А.А. Шестакова[85, 86] и других исследователей.

Изучение окрестности особой точки при многомерных систем с точки зрения устойчивости в смысле Ляпунова существенно продвинуто учеными Казанской научной школы (Н.Г. Четаев, К.П. Персидский, И.Г. Малкин, Г.В. Каменков), Нижегородской научной школы (А.А. Андронов и А.А. Витт), Московской научной школы ГАИШ (В.В. Степанов, Н.Д. Моисеев, Г.Н. Дубошин, Н.Ф. Рейн), научной школы В.В. Степанова и В.В. Немыцкого (Б.П. Демидович, А.Ф. Филиппов, Ю.В. Малышев, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман, А.А. Шестаков), Санкт-Петербургских научных школ (А.А. Марков, В.И. Зубов, В.А. Плисс, А.Ф. Андреев, Ю.Н. Бабичков).

Дж. Биркгоф [9] положил основание общей теории динамических систем, выделив в них центральные и рекуррентные движения. Он продолжил качественные исследования А. Пуанкаре и наряду с Н.Е. Жуковским, А.М. Ляпуновым явился основоположником качественной теории динамических систем.

Приведем определение устойчивости движения в смысле Лагранжа. Движение $\varphi(t, p)$ называется *положительно* (*отрицательно*) *устойчивым в смысле Лагранжа*, если полуоболочка $H^{+}(p)$ (полуоболочка $H^{-}(p)$) является компактным множеством. Движение, одновременно положительно и отрицательно устойчивое по Лагранжу, называется *устойчивым в смысле Лагранжа*. В работах Дж. Биркгофа и его последователей рассмотрены односторонне и двусторонне устойчивые в смысле Лагранжа движения.

Важные результаты в области качественной теории дифференциальных систем получены В.В. Немыцким . Он ввел понятие *седла в бесконечности* уравнения (1) и установил, что для того чтобы динамическая система в смысле Биркгофа могла быть топологически отображена на семейство параллельных прямых, необходимо и достаточно, чтобы она была неустойчивой в том смысле, что ни одна положительная и ни одна отрицательная полуоболочка движения не содержится в некотором компактном множестве, и чтобы дифференциальная система не имела седла в бесконечности.

Для изучения почти периодичности устойчивого в смысле Лагранжа движения $\varphi(t, p)$ А.А. Марковым предложено S-*свойство*: для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что из неравенства $\rho[\varphi(p, t_1), \varphi(p, t_1)] < \delta$ следует неравенство $\rho[\varphi(t_1 + t, p), \varphi(p, t_2 + t)] < \varepsilon \quad \forall t \in R$, и S^+-*свойство*: последнее неравенство выполняется для всех $t \geq 0$, и движение отрицательно устойчиво в смысле Лагранжа. Для почти периодичности необходимо и достаточно выполнения S^+-свойства (или аналогичного S^--свойства) [59]. Связь между почти периодичностью и L_B^+-устойчивостью относительно множества B состоит в следующем: точка p называется положительно L_B^+-устойчивой относительно множества B (символ L_B^+), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что для каждой точки $q \subset B$ такой, что $\rho(p, q) < \delta$, выполняется неравенство $\rho[\varphi(t, p), \varphi(t, q)] < \varepsilon \quad \forall t \in R^+$. Если B инвариантно, то множество точек, устойчивых L_B^+, также инвариантно; в этом случае, если точка p является L_B^+-устойчивой, то движение $\varphi(t, p)$ называется L_B^+-устойчивым. Если в компактном инвариантном множестве B все движения L_B^+-устойчивы, то множество B устойчиво в смысле Ляпунова. В [59] установлено, что если все траектории дифференциальной системы в R^n устойчивы в смысле Ляпунова, то возможно одно из двух: либо система гомеоморфна семейству параллельных прямых, либо все ее движения являются почти периодическими. Кроме того, в [59] представлена топологическая характеристика оболочки почти периодического движения.

1.2. Устойчивость по Ляпунову. А.М. Ляпунов [49] поставил и разрешил *общую задачу об устойчивости движения*. Как известно, А.М. Ляпунов предложил два метода решения задач об устойчивости. К первому методу относятся все те способы решения, которые приводят к непосредственному исследованию возмущенного движения и в основании которых лежит разыскание общих или частных решений дифференциального уравнения возмущенного движения $dx/dt = f(t,x),\ x \in R^n$. Эти решения приходится, вообще говоря, искать в виде бесконечных рядов по целым положительным степеням произвольных постоянных или же рядов другого типа. Здесь основным методом, восходящим к

А.М. Ляпунову и А. Пуанкаре, является следующий метод сравнения. Рост нормы $|x(t)|$ решения $x(t)$ при $t \to +\infty$ определяется по шкале ростов, заданной семейством функций $e^{\lambda t}$, и за индекс принимается число λ, называемое характеристическим показателем решения. Вместо исследуемой системы $dx/dt = ft, x)$ рассматривается система $dy/dt = F(t, y)$ (называемая системой первого приближения), для которой известно асимптотическое при $t \to \infty$ поведение решения и исследуемая система рассматривается как возмущенная добавлением к $F(t, y)$ вектор-функции $ht, x) ::= g(t, x) - F(t, x)$. При некоторых свойствах системы первого приближения и достаточной малости $h(t, x)$ часто удается получить информацию о поведении решений возмущенной системы и о соотношениях между показателями решений обеих систем.

Второй (прямой) метод – метод вспомогательных функций – основывается на рассмотрении некоторых непрерывных функций $V(t, x)$ переменных $x = (x_1, ..., x_n)$ и времени t, обращающихся в нуль при $x = 0$ и удовлетворяющих определенным условиям. Второй метод оказался эффективным методом исследования не только устойчивости, но и методом исследования геометрической картины и асимптотических свойств траекторий, если использовать так называемые обобщенные функции Ляпунова. Основы второго метода заложены в полученных А.М. Ляпуновым четырех теоремах: теоремы об устойчивости, теоремы об асимптотической устойчивости, первой теоремы о неустойчивости, второй теоремы о неустойчивости.

С помощью второго метода А.М. Ляпунов решил задачу об устойчивости по первому приближению, независимо от членов высшего порядка в функциях $g_s(t, x_1, ..., x_n)$; сам А.М. Ляпунов в решении этой задачи видел свое главное достижение. В ряде критических случаев, когда первое приближение не решает вопроса об устойчивости, А.М. Ляпунов исследовал задачу об устойчивости движения.

Рассмотрим неавтономное векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.2}$$

и его частное решение $x = \varphi(t)$, $(t_0 \le t < \infty)$, $x \in R^n$. Предполагается, что вектор-функция $f(t, x)$ и все $\partial f_i / \partial x_j$ определены и непрерывны $|x - \varphi(t)| < \rho$, $t_0 \le t < \infty$.

Определение 1.1. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (2) с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется *устойчивым* (или *устойчивым по Ляпунову*), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого такого $\tilde{x}_0$, что $|\tilde{x}_0 - x_0| < \delta$, решение $\tilde{x}(t)$ с начальным условием $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ при $t_0 \le t < \infty$ существует и

$$|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \quad (t_0 \le t < \infty).$$

Это означает, что каждое решение с начальным условием из δ-окрестности точки x_0 при $t_0 \le t < \infty$ существует и не выходит из ε-трубки, ось которой – решение $x = \varphi(t)$ (рис. 1.1).

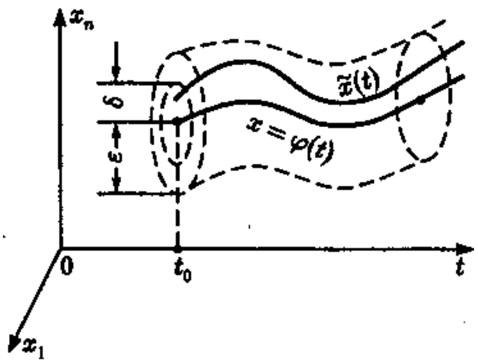

Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация понятия устойчивости в смысле А.М. Ляпунова

Определение 1.2. Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (2) называется *асимптотически устойчивы* (или *асимптотически устойчивым по Ляпунову*), если 1) оно устойчиво по Ляпунову, 2) все решения $\tilde{x}(t)$ с начальными условиями $\tilde{x}(t_0)$ из некоторой δ_0-окрестности точки x_0 неограничено сближаются с решением $x = \varphi(t)$ при $t \to \infty$, то есть $\tilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$ ($t \to +\infty$).

Требования 1) и 2) независимы. Из 1) не следует 2), так как из неравенства $|\tilde{x}(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ не следует, что $\tilde{x}(t) - \varphi(t) \to 0$, а из 2) не следует 1).

Исследование устойчивости любого решения $x = \varphi(t)$ векторного уравнения (2) можно привести к исследованию устойчивости нулевого решения другого векторного уравнения. Для этого в (2) используется замена $x = \varphi(t) + y$ и далее осуществляется переход к уравнению $\varphi'(t) + y'(t) = f(t, \varphi(t) + y)$. Так как $x = \varphi(t)$ – решение системы (2), то $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, и имеем

$$y' = f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t)). \tag{1.3}$$

Решение $x = \varphi(t)$ уравнения (2) при такой замене переходит в решение $y \equiv 0$

уравнения (3). Устойчивость (или неустойчивость) решения при этом сохраняется, так как разность $\tilde{x}(t)-\varphi(t)$ переходит в равную ей разность $\tilde{y}(t)-0$.

Устойчивость нулевого решения уравнения (3) означает, что из $|\tilde{y}(t_0)|<\delta$ следует $|\tilde{y}(t_0)|<\varepsilon$ при $t_0 \le t < \infty$.

Исследовать устойчивость, пользуясь лишь определениями, можно только тогда, когда удается найти в том или ином виде общее решение данной системы или когда удается выяснить такие свойства решений, как ограниченность, возрастание и убывание.

А.М. Ляпуновым рассмотрены следующие пять основных понятий устойчивости движения: 1) понятие устойчивости, 2) понятие асимптотической устойчивости, 3) понятие условной устойчивости, 4) понятие неустойчивости, 5) понятие абсолютной неустойчивости. Приведем определение понятия устойчивости в смысле Ляпунова в формулировке Н.Г. Четаева.

Определение 1.3. Если при всяком заданном числе A, как бы оно мало ни было, может быть выбрано число $\lambda > 0$ так, чтобы при всяких возмущениях $x_{10}, ..., x_{n0}$, удовлетворяющих неравенству $x_{10}^2+\cdots+x_{n0}^2 \le \lambda$, и при всяком t, превосходящем t_0, выполняется неравенство $x_1^2+\cdots+x_n^2 < A$, то *невозмущенное движение устойчиво в смысле Ляпунова*, в противном случае – *неустойчиво в смысле Ляпунова*.

Перейдем теперь к модификациям понятия устойчивости в смысле Ляпунова, используемых в различных областях естествознания и техники.

Определение 1.4. Пусть $t_0 \in R^1$ – произвольно, но фиксировано. Решение $x = x(t)$, $x(0) = x_0$ уравнения (1) называется *двусторонне устойчивым в смысле Ляпунова относительно множества B*, если $C(x_0) \subset B$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x(t)-y(t)|<\varepsilon$, $t \in R$, если $y(t) \in B$ $\forall t \in R$ и $|x(t_0)-y(t_0)|<\delta$.

Определение 1.5. Решение $x = x(t)$, $x(0) = x_0$ уравнения (1) называется *строго двусторонне устойчивым в смысле Ляпунова относительно множества B*, если $C(x_0) \subset B$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|x(t)-y(t)|<\varepsilon$, $t \in R$, если $y(t) \in B$ $\forall t \in R$ и неравенство $|x(t_0)-y(t_0)|<\delta$ имеет место для *некоторого* значения $t_0 \in R$.

Определение 1.6. Решение $x(t, p)$ называется *двусторонне почти устойчивым в смысле Ляпунова*, если оно определено при всех $t \in R$ и если для каждого $\varepsilon > 0$ существуют измеримое положительной меры множество $A \subset B(p, \varepsilon)$ и число $T > 0$, такое, что для $q \in A$ и для всех $t \in R$ можно найти t_1 так, чтобы $d\Big(x(t,\ q),\ x(t_1,\ p)\Big) < \varepsilon,\ |t - t_1| \leq T.$

В определениях 1.4 и 1.5 число δ зависит не только от числа ε, но и также от выбора изучаемого решения. Из определений 1.4 и 1.5 следует, что строго двусторонне устойчивое решение является двусторонне устойчивым в смысле Ляпунова. Но обратный факт не имеет место. При $A = B(p, \delta)$ и $T = 0$ в определении 1.6 имеет место двусторонняя устойчивость в смысле Ляпунова.

Рассмотрим скалярное уравнение $\dot{x} = \cos^2 x$ и пусть $B = \{-\pi/2 \leq x \leq \pi/2\}$. Уравнение имеет решения $x = \pi/2$, $x = -\pi/2$, $x = \mathrm{arctg}\,(t - \hat{t}\,)$, где $\hat{t}$ – произвольное число. Множество B компактно и инвариантно. Легко проверить, что любое решение $x = x(t) = \mathrm{arctg}\,(t - \hat{t}\,)$ устойчиво в смысле Ляпунова относительно B. Но уравнение не имеет строго устойчивых в смысле Ляпунова решений относительно B в силу наличия свойства $x(t) \to \pi/2(-\pi/2)$ при $t \to +\infty(-\infty)$. Для того чтобы решение $x(t)$ было строго устойчивым относительно B, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\lim\inf\left|y(t) - x(t)\right| > 0$ при $t \to +\infty$ для каждого решения $x(t) \neq y(t)$ в B для всех t.

Исследования устойчивости в смысле Ляпунова применительно к небесно-механическим системам представлены в многочисленных работах отечественных и зарубежных ученых, например, в [51, 53, 58, 91, 95].

Большой вклад в теорию устойчивости А.М. Ляпунова был внесен В.В. Румянцевым и его учениками (см. библиографию в [13]. В.В. Румянцев явился основоположником важного самостоятельного направления в теории устойчивости движения – теории устойчивости движения по отношению к части переменных. Хотя постановка задачи о частичной устойчивости и принадлежит А.М. Ляпунову, сам он не занимался этой задачей. Пусть задана система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = f(t, x, y),\ \ \dot{y} = g(t, x, y), \tag{1.4}$$

где $f:\ R^+ \times D \times R^m \to R^n$, $g:\ R^+ \times D \times R^m \to R^m$ и D – область в R^n, содержащая начало.

Определение 1.7. Предположим, что $f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) = 0$ для всех $t \in R^+$ и функции f и g таковы, что через каждую точку множества $R^+ \times D \times R^m$ проходит единственное решение системы. Пусть $z = (x, y) \in R^{n+m}$, где n и m – целые положительные числа. Обозначим через $z(t, t_0, z_0) = (x(t, t_0, z_0), y(t, t_0, z_0))$ решение системы (4), начинающееся в точке z_0 в начальный момент t_0. Решение $z = 0$ системы (4) называется *положительно устойчивым относительно* $x_1, ..., x_m$, или, короче, x-*устойчивым,* если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что из $|z_0| < \delta$ следует, что $x(t, t_0, x_0) < \varepsilon \ \ \forall t \geq t_0$.

Проведенные В.В. Румянцевым исследования показали большое методологическое сходство в изучении вторым методом полной устойчивости (по всем переменным) и частичной устойчивости (по части переменных). Однако в решении ряда аналогичных вопросов применительно к задачам полной устойчивости и частичной устойчивости имеются определенные различия. Установлен принцип, позволяющий сводить исследование задачи частичной устойчивости к задаче исследования полной устойчивости некоторой вспомогательной системы, и наоборот: исследование задачи полной устойчивости сводить к задаче исследования частичной устойчивости для вспомогательной системы. Два типа устойчивости (полная и частичная) тесно связаны между собой и взаимно дополняют друг друга при решении прикладных задач.

Рассмотрим теперь понятие *устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях*. Это понятие введено П. Болем [98] и Г.Н. Дубошиным [29] и важно для многих задач естествознания и техники. Устойчивость в смысле Ляпунова означает, что рассматривается устойчивость относительно мгновенно действующих возмущений. Однако реальная физическая система, например, планетная система, находится под постоянным воздействием небольших возмущающих сил, учесть которые при составлении уравнения движений практически невозможно. Поэтому важное значение имеет изучение устойчивости рассматриваемого движения относительно постоянно действующих возмущений. Это значит, что надо рассматривать изменения не только начальных условий, но изменение и самих уравнений движения. Такая задача рассмотрена в работах П. Боля, Н.Г. Четаева, Г.Н. Дубошина и других ученых. Родственное понятие рассматривалось в работе Н.А. Артемьева [5]. Наряду с уравнением вида (1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(x) + R(t, x), \tag{1.5}$$

где $R(t, x)$ – некоторая неизвестная вектор-функция, характеризующая возмущение силы, относительно которой известно лишь то, что она достаточно мала и удовлетворяет условию, обеспечивающему существование движений в окрестности невозмущенного движения.

Определение 1.8. Невозмущенное движение $x = \varphi(t)$ дифференциальной системы (1) называется *устойчивым при постоянно действующих возмущениях*, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существуют два других числа $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$ и $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$ таких, что каждое решение $x = \psi(t)$ возмущенного уравнения, удовлетворяющее при $t = t_0$ неравенству $|\psi(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta_1$, удовлетворяет при $t > t_0$ неравенству $|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$, какова бы ни была вектор-функция $R(t, x)$ из (5), удовлетворяющая на множестве $\{t > t_0, |x - \varphi(t)| < \delta\}$ неравенству $|R(t, x)| < \delta_2$.

Задача теории устойчивости Ляпунова заключается в исследовании заданного движения, которое позволило бы установить, каким из перечисленных свойств устойчивости обладает исследуемое движение. В силу того, что дифференциальная система в общем случае не интегрируется в конечном виде, то А.М. Ляпунов поставил главной задачей нахождение таких способов, которые позволяли бы решать задачу в неинтегрируемом случае. Совокупность этих способов и составляет общую теорию устойчивости движения, созданную А.М. Ляпуновым и дополненную трудами отечественных и зарубежных ученых.

Одной из важных областей исследований в рамках теории устойчивости является развитие второго метода Ляпунова для систем с запаздывающим аргументом [68, 74]. В рамках этой области развитие получили два направления развития прямого метода для систем с запаздыванием – метод функционалов (получивших в литературе название функционалов А.М. Ляпунова–Н.Н. Красовкого) и метод функций (известный как метод Б.С. Разумихина). Б.С. Разумихин предложил распространение метода функций Ляпунова на класс дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (метод функций Ляпунова–Разумихина). В современных учебниках теоремы об устойчивости таких систем с помощью функций Ляпунова (не функционалов, а функций) носят название теорем разумихинского типа

1.3. Устойчивость по Жуковскому. Рассмотрим подход У. Томсона – П. Тэта – Н.Е. Жуковского. Общую задачу о динамической прочности траекторий уравнений первого приближения поставил и в ряде случаев разрешил Н.Е. Жуковский в работе [32]. Чтобы дать определение прочности движения, Н.Е. Жуковский рассматривает, как и У. Томсон и П. Тэт [106], основное движение системы и наряду с ним так называемое возмущенное движение. Н.Е. Жуковский одну из координат уравнения (1), например x_1, принимает в качестве независимой переменной, а время t рассматривает как функцию этой координаты, причем выбранная координата в качестве независимой переменной является монотонно возрастающей функцией времени. Рассматривая координаты $x_2, ..., x_n$ как функции от x_1, Н.Е. Жуковский предполагает, что в возмущенном движении функции $x_2, ..., x_n$ получают приращения $y_2, ..., y_n$. Если во все время движения приращения $y_2, ..., y_n$ остаются достаточно малыми, то движение называется *прочным*; если некоторые из этих приращений не являются таковыми, то движение называется *непрочным*.

Важно отметить, что время t рассматривается Н.Е. Жуковским как функция от x, а приращение δt определяется при переходе от данного движения к возмущенному. Из определения Н.Е. Жуковского следует, что речь действительно идет об устойчивости траекторий точек механической системы, а не об устойчивости состояния движения.

Э. Раус [102], как и Н.Е. Жуковский [32], использовал понятия об основном движении и возмущенном движении и ввел понятия об устойчивости и неустойчивости движения. Понятие устойчивости в смысле Э. Рауса и понятие устойчивости движения в смысле Н.Е. Жуковского – различные понятия. Прежде всего, в определении Э. Рауса речь идет об устойчивости состояния движения, в то время как в определении Н.Е. Жуковского – об устойчивости траекторий движения, описываемых точками материальной системы. Далее, движение дифференциальной системы может быть неустойчивым в смысле Э. Рауса, но прочным в смысле Н.Е. Жуковского.

А.М. Ляпунов [49] предложил общее определение понятия устойчивости движения, охватывающее как определение Э. Рауса, так и определение Н.Е. Жуковского. Общее определение устойчивости движения по отношению к некоторым величинам формулируется следующим образом.

Определение 1.9. Пусть 1) задана система k дифференциальных уравнений второго порядка движения механической системы, 2) выбрано некоторое частное решение этих уравнений, определяющее движение системы, которое назовем *невозмущенным*, и 3) даны функции $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$ от времени t, обобщенных координат $q_1, ..., q_k$ и обобщенных скоростей $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_k$. Невозмущенное движение называется *устойчивым по отношению к величинам* $\Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n$, если, задавая произвольно положительные числа $L_1, L_2, ..., L_n$, мы можем определить при всяких L_s, как бы малы они ни были, такие положительные числа $E_1, E_2, \ldots, E_k, E_1', E_2', \ldots, E_k'$, что при всяких начальных возмущениях $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \ldots, \varepsilon_k'$, удовлетворяющих условиям $|\varepsilon_s| \le E_s$, $|\varepsilon_s'| \le E_s'$ ($s = 1, 2, ..., k$), и при всяком t, превосходящем t_0, выполнены неравенства

$$\left|\Phi_1 - \Phi_1^{(0)}\right| < L_1, \quad \left|\Phi_2 - \Phi_2^{(0)}\right| < L_2, \quad \ldots, \quad \left|\Phi_n - \Phi_n^{(0)}\right| < L_n.$$

Если, в частности, положить $n = 2k$ и взять $\Phi_1 = q_1$, $\Phi_2 = q_2, ..., \Phi_k = q_k$, $\Phi_{k+1} = q_1$, $\Phi_{k+2} = q_2, ..., \Phi_{2k} = q_k$, то получим определение устойчивости невозмущенного движения относительно обобщенных координат и скоростей. Ранее приведенное определение 1.3 является частным случаем общего определения 1.9.

А.М. Ляпунов отметил, что в уравнениях возмущенного движения можно заменить время t другой переменной, являющейся монотонно возрастающей функцией времени. Выбирая за независимую переменную одну из координат точек системы, монотонно возрастающую вместе с возрастанием времени t, и приравнивая остальные координаты к функциям Φ_k Ляпунова, убеждаемся в том, что определение устойчивости в смысле Н.Е. Жуковского следует из общего определения А.М. Ляпунова как частный случай.

Теория устойчивости в смысле Жуковского получила дальнейшее развитие в работах [3, 10, 14, 20, 21, 26–28, 39, 44–47, 67, 78, 100, 101, 104, 107] и в других работах. М.Ш. Аминов в [3] ввел понятие "устойчивости в смысле Жуковского" и исследовал методами А.М. Ляпунова и Дж. Синджа устойчивость в смысле Жуковского траекторий некоторых классов механических систем при консервативных и неконсервативных возмущениях.

Рассмотрим подход М.Ш. Аминова, согласно которому рассматривается пространство конфигураций Q^n и изучается поведение окольной траектории относительно базовой траектории. Для этого ставятся в соответствие точки этих траекторий. Метрика действия пространства Q^n определяется равенством: $ds^2 = 4(U + h)Tdt^2$, где U – силовая функция, h – постоянная энергии, T – кинетическая энергия, t – время, ds – элемент действия. Если рассматривать консервативные возмущения, т.е. возмущения, для которых не изменяется полная энергия системы, то в пространстве конфигураций Q^n базовой и окольной траекториям будут соответствовать две соседние геодезические линии (геодетики) это пространства. Пусть O и O_1 – произвольно выбранные начальные точки на базовой и окольной геодетиках. Тогда точки P и P_1 на этих геодетиках считаются соответственными, если $OP = O_1P_1$. Так как выбрано соответствие точек не по времени, а по действию, то соответственными точками этих геодетик будут точки, равноудаленные от некоторых выбранных начальных точек. Точки O и O_1 выбираются так, чтобы отрезок OO_1 был ортогонален к базовой геодетике. Тогда при достаточно малых начальных возмущениях при $OP = O_1P_1$ с точностью до второго порядка малости отрезок PP_1 будет также ортогонален к базовой траектории. Поэтому в основу определения соответствия точек принимается также ортогональное соответствие.

Определение устойчивости по Жуковскому для механической системы согласно [3] формулируется следующим образом.

Определение 1.10. Пусть в точках O и P имеем: q_0^α, $\left(\dfrac{dq^\alpha}{ds}\right)_0$; q^α, $\dfrac{dq^\alpha}{ds}$, в точках O_1 и P_1: $q_0^\alpha + p_0^\alpha$, $\left(\dfrac{dq^\alpha}{ds}\right)_0 + \left(\dfrac{dp^\alpha}{ds}\right)_0$; $q^\alpha + p^\alpha$, $\dfrac{dq^\alpha}{ds} + \dfrac{dp^\alpha}{ds}$. Если для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти другое положительное число $\delta < \varepsilon$ так, чтобы при выполнении неравенств $\left|p_0^\alpha\right| \le \delta$, $\left|\left(\dfrac{dp^\alpha}{ds}\right)_0\right| \le \delta$, где $\alpha = 1, 2, ..., n$, и при всех $OP = s > s_0$ (s_0 – значение функции действия в начальной точке) выполняются неравенства $\left|p^\alpha\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{dp^\alpha}{ds}\right| < \varepsilon$, где $\alpha = 1, 2, ..., n$, то базовое движение механической системы называется *устойчивым по Жуковскому*. В противном случае базовое движение называется *неустойчивым по Жуковскому*.

Отметим, что в определении 1.10 рассматривается ортогональное соответствие точек невозмущенной и возмущенной траекторий, что является характерологической чертой устойчивости по Жуковскому.

1.4. Орбитальная устойчивость. Рассмотрим некоторые понятия и результаты *теории орбитальной устойчивости траекторий и инвариантных множеств*. Понятие орбитальной устойчивости для периодической траектории встречается у П. Лапласа и А. Пуанкаре.

Различные версии определения орбитальной устойчивости индивидуальной полутраектории содержатся в работах Н.Д. Моисеева [58], Б.П. Демидовича [17, 18], причем Н.Д. Моисеев предложил топологический вариант понятия, а Б.П. Демидович – метрический вариант понятия орбитальной устойчивости.

Определение 1.11. Полутраектория $C^+(p)$ решения $\varphi = \varphi(t, p)$, $\varphi(t_0, p) = p$, $t \in R^+_{t_0}$ уравнения (1) называется 1) *положительно орбитально устойчивой*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $q \in B_\delta(p)$ открытого шара $B_\delta(p)$ с центром в p и радиусом δ выполнено соотношение

$$\rho(\varphi(t, q), C^+(p)) < \varepsilon \quad t \geq t_0,$$

где $\rho(z, M)$ – расстояние от точки z до множества $M \subset R^n$ $\rho(z, M) = \inf\limits_{y \in M} |z - y|$;

2) *положительно асимптотически орбитально устойчивой*, если она положительно орбитально устойчива и, кроме того, существует такое число $\delta_1 > 0$, что для всех точек $q \in B_{\delta_1}(p)$ выполнено соотношение $\rho(\varphi(t, q), C^+(p)) \to 0$, $t \to \infty$;

3) *положительно асимптотически орбитально устойчивой в целом*, если шар $B_{\delta_1}(p)$ в пункте 2) совпадает со всем пространством R^n;

4) *положительно орбитально неустойчивой*, если существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого числа $\delta(\varepsilon) > 0$ существует точка $q \in B_\delta(p)$ такая, что при некотором значении $\hat{t} > 0$ выполнено $\rho(\varphi(\hat{t}, q), C^+(p)) > \varepsilon$.

В силу свойства интегральной непрерывности орбитальная устойчивость не зависит от выбора начального момента времени. Поэтому правомерно говорить как об орбитальной устойчивости полутраектории решения, так и об орбитальной устойчивости самого решения.

Рассмотрим в качестве примера систему $\dot{x} = x,\ \dot{y} = 0$. Интегрируя получим $x = x_0 \exp t,\ y = y_0\ \ \forall t \in R$, где $x_0 = x(0),\ y_0 = y_0$. Траекториями на плоскости Oxy являются а) точки $x = 0,\ y = y_0$ при $x_0 = 0$; б) правые полупрямые $y = y_0,\ x > 0$ при $x_0 > 0$; в) левые полупрямые $y = y_0,\ x < 0$ при $x_0 < 0$. Следовательно, каждое решение $x = x(t),\ y = y(t)$ системы неустойчиво в смысле Ляпунова, но очевидно, что траектории типов б) и в) положительно орбитально устойчивы.

Из примера следует, что понятие устойчивости в смысле Ляпунова является более жестким понятием, чем понятие орбитальной устойчивости.

Множество Ω_L всех устойчивых в смысле Ляпунова полутраекторий является подмножеством множества Ω_O всех орбитально устойчивых полутраекторий: $\Omega_L \subset \Omega_O$, причем $\Omega_L \neq \Omega_O$.

Отметим, что приведенные определения орбитальной устойчивости и неустойчивости даны на языке $\varepsilon - \delta$ (в терминах шаров) и эту устойчивость и неустойчивость назовем *метрической*. В [58] рассмотрен другой тип орбитальной устойчивости – *топологическая* орбитальная устойчивость, определение которой дано в терминах открытых окрестностей полутраектории. Для некомпактной полутраектории понятия метрической и топологической орбитальной устойчивости и неустойчивости различны и являются независимыми понятиями. Рассмотрим, например, дифференциальную систему $\dot{x} = 1,\ \dot{y} = 0$ на плоскости. Легко видеть, что ось Ox метрически орбитальной устойчива, но не является топологически орбитально устойчивой.

Будем говорить, что решение $\varphi(t, p)$ уравнения (1) обладает свойством *асимптотической фазы*, если для каждого решения $\varphi(t, q)$ уравнения (1), удовлетворяющего неравенству

$$|\,\varphi(t_0, q) - \varphi(t_0, p)| < \delta,$$

где $\delta > 0$ достаточно мало, имеется число $c = c(\varphi(t))$ такое, что

$$|\,\varphi(t+c, q) - \varphi(t, p)| \to 0,\ \ t \to \infty.$$

Число c называется *асимптотической фазой* [17] решения $\varphi(t, p)$ уравнения (1). В [17] доказано, что орбитально устойчивое решение $\varphi(t)$ уравнения (1) с асимптотической фазой асимптотически орбитально устойчиво. Обратное утверждение неверно. Асимптотически орбитально устойчивое решение может и не иметь асимптотической фазы.

Известная теорема Андронова–Витта [4, 17] состоит в следующем. Пусть ω-периодическое решение φ(t) уравнения (1) отлично от тривиального, причем уравнения в вариациях для этого решения

$$\frac{dx}{dt} = f'_x\big(\varphi(t)\big)x$$

имеют один простой нулевой характеристический показатель, а все остальные характеристические показатели имеют отрицательные действительные части. Тогда решение φ(t) уравнения (1) устойчиво в смысле Ляпунова.

Аналог теоремы Андронова–Витта формулируется следующим образом [17]. Пусть уравнение (1) имеет ω-периодическое решение $\varphi(t)$, отличное от тривиального, причем уравнения в вариациях для этого решения имеют один простой нулевой характеристический показатель, а все остальные – с отрицательными действительными частями. Тогда периодическое решение $\varphi(t)$ асимптотически орбитально устойчиво. Кроме того, для каждого близкого к $\varphi(t)$ решения $\psi(t)$ уравнения (1) имеется асимптотическая фаза, т.е. если $\delta > 0$ достаточно мало и $|\psi(t_1) - \varphi(t_0)| < \delta$ для некоторых чисел t_0 и t_1, то существует постоянная c, такая, что $|\psi(t + c) - \varphi(t_1)| \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема Б.П. Демидовича об орбитальной устойчивости состоит в следующем [18]). Пусть 1) уравнение (1) имеет положительно устойчивое в смысле Лагранжа решение $\varphi \neq \varphi(t)$, причем $\inf\limits_{t\geq 0} \left|\varphi(t)\right| > 0$, 2) система уравнений в вариациях вдоль решения φ правильна в смысле Ляпунова, причем все ее характеристические показатели, кроме одного, отрицательны. Тогда полутраектория $C^+(p)$ решения $\varphi(t)$ асимптотически орбитально устойчива.

Отметим, что понятия орбитальной устойчивости и орбитальной асимптотической устойчивости индивидуальной полутраектории полезны для "изолированных" компактных полутраекторий, в частности, для состояний равновесия и периодических траекторий. Однако эти понятия противоречивы для полутраекторий и траекторий сложных движений, что иллюстрируют следующие ситуации, рассмотренные в работе [46].

Ситуация 1. Может случиться, что полутраектория невозмущенного движения уравнения (1) является как положительно орбитально устойчивой, так и орбитально неустойчивой. Изображающая точка возмущенного движения, покидающая в некоторый момент времени ε-окрестность одного витка невозмущенной траектории, может в тот же момент времени входить в ε-окрестность другого витка траектории. Здесь требования определений орбитальной устойчивости и орбитальной неустойчивости выполняются.

Ситуация 2. Пусть $n = 2$ и вектор-функция $g(x_1, x_2)$ является периодической по обеим координатам с периодом 2π. Тогда векторному полю на R^2 соответствует векторное поле на двумерном торе $T^2 ::= \{x_1, x_2 :\ 0 \le x_i \le 2\pi\}$. Рассмотрим, например, уравнение $dx_i/dt = \omega_i$ $(i = 1, 2)$, определяющее на T^2 векторное поле, не имеющее состояний равновесия. Очевидно, что если отношение $a = \omega_2/\omega_1$ частот ω_2, ω_1 рационально, то все фазовые кривые уравнения замкнуты на торе, а если иррационально, то всюду плотны на нем. При рациональном числе a изображающие точки движений уравнения движутся по поверхности тора параллельно друг другу и с постоянной скоростью. Поэтому расстояние между этими точками постоянно и траектория движения не может быть орбитально асимптотически устойчивой. При иррациональном числе a характер движений изображающих точек остается прежним, однако расстояние каждой изображающей точки до всюду плотной траектории равно нулю и все траектории движения на торе будут орбитально асимптотически устойчивыми. Таким образом, здесь определение орбитальной асимптотической устойчивости противоречиво.

Ситуация 3. Свойство орбитальной неустойчивости траектории, вызванное “разбеганием” траекторий, при достаточно сложном расположении траектории в фазовом пространстве может быть в то же время свойством орбитальной устойчивости, так как явление “разбегания” не всегда будет противоречить требованиям определений этих понятий.

В связи с третьей ситуацией отметим, что понятие орбитальной неустойчивости, как и понятие неустойчивости в смысле Ляпунова не может быть использовано для описания феномена хаотических колебаний в детерминированных системах, характеризующихся “перемешиванием” траекторий в фазовом пространстве.

Различные подходы к определению понятия орбитальной устойчивости полуинвариантного и инвариантного (как компактного, так и некомпактного) множества содержатся в работах В.И. Зубова [33, 34], Н.П. Бхатиа и О. Хайека

[96] Н.П. Бхатиа и Г. Сеге [97], А.А. Шестакова [87–89] и в работах других ученых.

Основными типами орбитальной устойчивости замкнутого множества $A \subset R^n$ динамической системы $\varphi : R^n \to R^n$ являются: 1) орбитальная устойчивость множества относительно его метрических окрестностей, 2) орбитальная устойчивость множества относительно его топологических окрестностей и 3) орбитальная устойчивость множества относительно совокупности двух окрестностных фильтров множества A. Первый тип орбитальной устойчивости рассмотрен в работе В.И. Зубова [34, дополнение], второй тип орбитальной устойчивости – в работе Н.П. Бхатиа и Г. Сеге [97]. Третий тип орбитальной устойчивости в обобщенном варианте – в работе [90].

Отметим, что ряд результатов об орбитальной устойчивости, полученные методом ортогональной линеаризации систем дифференциальных уравнений, могут быть обобщены на случай устойчивости по Жуковскому [21].

1.5. Современный подход к изучению устойчивости по Жуковскому. В связи с изучением движений, отличных от состояния равновесия и периодических движений, роль понятий устойчивости и неустойчивости по Жуковскому траектории в настоящее время приобрела особую значимость во многих задачах нелинейной динамики.

Важно отметить то обстоятельство, что понятие орбитальной устойчивости и неустойчивости теряет смысл применительно к некоторым сложным движениям дифференциальной системы, в то же время как более строгое понятие устойчивости по Жуковскому имеет смысл для любых ее движений. В последние годы усилился интерес к проблемам неустойчивости движения. Прежде всего это связано с наличием хаотических колебаний в детерминированных системах. Для возникновения хаотических колебаний, характеризующихся перемешиванием траекторий в фазовом пространстве, недостаточно неустойчивости в смысле Ляпунова. Оказалось, что с помощью понятия неустойчивости по Жуковскому траектории можно объяснить ряд явлений, связанных с наличием хаоса [21, 46, 47].

В настоящее время теория устойчивости по Жуковскому траекторий дифференциальных систем является направлением, имеющим свои специфические особенности и различия по сравнению с теорией устойчивости в смысле Ляпунова.

Рассмотрим автономную систему вида (1), где $g \in C^1(R^n \to R^n)$. Важным подмножеством множества орбитально устойчивых траекторий дифференциальной системы является подмножеством устойчивых в смысле Жуковского траекторий этой системы. Промежуточное между устойчивостью по Ляпунову и орбитальной устойчивостью понятие устойчивости по Жуковскому достаточно эффективно для изучения сложных траекторий и устраняет возникновение ситуаций, описанных выше, а также позволяет не привлекать в этих ситуациях понятие устойчивости по Ляпунову – понятие, более жесткое, чем устойчивость по Жуковскому.

Приведем определение устойчивости в смысле Жуковского, используемое в работах [20, 21, 26, 28, 46, 47].

Определение 1.12. Обозначим через Σ_τ множество всех взаимно однозначных и взаимно непрерывных отображений (гомеоморфизмов) σ числового множества $R_\tau^+ ::= [\tau, \infty)$ на себя таких, что $\sigma(\tau) = \tau$. Полутраектория $C^+(p)$ решения $\varphi(t, p)$, $t \in R_{t_0}^+$, $\varphi(t_0, p) = p$, системы (1) называется 1) *положительно устойчивой в смысле Жуковского*, если существует репараметризация $\sigma(t) \in \Sigma_{t_0}$, обладающая свойством: для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любой точки $q \in B_\delta(p)$ имеет место $r_{\varphi,\sigma}(t, p, q) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$, где $r_{\varphi,\sigma}(t, p, q) ::= |\varphi(\sigma(t), q) - \varphi(t, p)|$, 2) *положительно асимптотически устойчивой в смысле Жуковского*, если она положительно устойчива в смысле Жуковского и, кроме того, существует такое число $\delta_1 > 0$, что для всех точек $q \in B_{\delta_1}(p)$ существует репараметризация $\sigma \in \Sigma_{t_0}$ такая, что $r_{\varphi,\sigma}(t, p, q) \to 0$, $t \to \infty$, 3) *неустойчивой в смысле Жуковского*, если существует число $\varepsilon > 0$, что для каждого числа $\delta > 0$ имеется точка $q \in B_\delta(p)$ такая, что для любой репараметризации $\sigma \in \Sigma_{t_0}$ при некотором значении времени $t_1 \in R_{t_0}^+$ выполнено неравенство $r_{\varphi,\sigma}(t, p, q) > \varepsilon$.

Рассмотрим в качестве примера прямолинейное движение частицы в однородном поле сил. Пусть движение направлено вдоль оси Ox_1. Рассмотрим невозмущенную траекторию C_1: $x_1 = p_1 + p_2 t + \frac{1}{2}at^2$, $\dot{x}_1 = x_2 = p_2 + at$ и возмущенную траекторию $\tilde{C}_1$: $y_1 = p_1 + \alpha_1 + (p_2 + \alpha_2)\,t + \frac{1}{2}at^2$, $y_2 = p_2 + \alpha_2 + at$. Так как $y_1 - x_1 = \alpha_1 + \alpha_2 t$, $y_2 - x_2 = \alpha_2$, то при $\alpha_2 \neq 0$ $|\varphi(t, p+\alpha) - \varphi(t, p)| \to \infty$ при $t \to \infty$, и траектория C_1 движения $\varphi(t, p)$ неустойчива в смысле Ляпунова.

Введем новую независимую переменную $s = t + \Delta$, где $\Delta = a^{-1}\alpha_2$. Пусть $t > a^{-1}|\alpha_2|$. Тогда имеем $\varphi_1(t,\ p+\alpha) - \varphi_1(s,\ p) = \alpha_1 - \Delta\left(p_2 + \frac{\alpha_2}{2}\right) \to 0$ при $\alpha_i \to 0$, $\varphi(t, p+\alpha) - \varphi(t, p) = 0$, так как $p_2 + \alpha_2 + at - p_2 - as = \alpha_2 - \alpha_2 = 0$. Следовательно, траектория C_1 устойчива в смысле Жуковского.

Приведенные определения 1.12 являются обобщениями и модификациями определения Н.Е. Жуковского [32]. Образно говоря, полутраектория $C^+(p)$ решения $\varphi(t, p)$: $R^+_{t_0} \to R^n$ называется положительно устойчивой в смысле Жуковского, если существует репараметризация $\sigma(t)$ времени, при которой движение $\varphi(\sigma(t), t)$ становится устойчивым в смысле Ляпунова.

Множество Ω_J всех устойчивых по Жуковскому полутраекторий системы (1) является подмножеством множества $\Omega_{\text{орб}}$ всех орбитально устойчивых полутраекторий системы (1). Другими словами, понятие устойчивости по Жуковскому является более жестким понятием, чем понятие орбитальной устойчивости: $\Omega_J \subset \Omega_{\text{орб}}$, причем $\Omega_J \neq \Omega_{\text{орб}}$.

С другой стороны, множество Ω_L всех устойчивых в смысле Ляпунова полутраекторий системы (1) является подмножеством множества Ω_J всех устойчивых в смысле Жуковского полутраекторий уравнения (1). Другими словами, понятие устойчивости в смысле Ляпунова полутраекторий уравнения (1) является более жестким понятием, чем понятие устойчивости в смысле Жуковского: $\Omega_{\text{Ляп}} \subset \Omega_J$, причем $\Omega_L \neq \Omega_J$.

1.6. Управляемые системы. Рассмотрим основные понятия и принципы управления в рамках математической теории управления. Как известно [6, 8, 11, 12, 19, 35–38, 64, 65, 76, 82], теория управления изучает методы и средства систем управления и закономерности протекающих в них процессов. Предметом теории управления являются не только процессы материального производства, но и сферы деятельности человека: организационно-административное управление, проектирование и конструирование, информационное обслуживание, научные исследования, образование и многие другие. Теория управления как научное направление сложилась в XX веке на базе теории автоматического регулирования, которая начала интенсивно развиваться XIX веке в связи с потребностью в регуляторах, поддерживающих устойчивый режим работы внедрявшихся паровых машин в промышленности и на транспорте.

Современная теория управления занимает одно из ведущих мест в технических науках и в то же время относится к одной из отраслей прикладной математики, тесно связанной с вычислительной техникой. Теория управления на базе математических моделей позволяет изучать динамические процессы в автоматических системах, устанавливать структуру и параметры составных частей системы для придания реальному процессу управления желаемых свойств и заданного качества. Она является фундаментом для специальных дисциплин, решающих проблемы автоматизации управления и контроля технологических процессов, проектирования следящих систем и регуляторов, автоматического мониторинга производства и окружающей среды, создания автоматов и робототехнических систем.

Основными задачами теории управления являются задачи анализа динамических свойств автоматических систем на модельном или физическом уровне, и задачи синтеза алгоритма управления, функциональной структуры автоматической системы, реализующей этот алгоритм, а также задачи автоматического проектирования систем управления, создания и испытания автоматических систем.

Устройство (машина, агрегат, технологический процесс), состоянием которого можно и нужно управлять, называется объектом управления (ОУ) или управляемым объектом. Целью управления управляемым объектом является поддержание заданного режима. Под заданным режимом понимают изменение какого-либо параметра, характеризующего состояние объекта управления, по определенному закону. Указанный параметр, который может быть векторной величиной, называется управляемой или выходной переменной (величиной) объекта управления. В частном случае заданным режимом может быть поддержание выходной переменной неизменной и равной некоторой заданной величине.

Часть объекта управления, на которую оказывают воздействие при управлении, называют управляющим (регулирующим) органом. Устройство, осуществляющее управление управляемым объектом, называется управляющим устройством (УУ).

Объект управления с взаимодействующим с ним управляющим устройством называют системой управления. Если система управления функционирует с участием человека, то она называется автоматизированной системой управления (АСУ). Если система управления функционирует без непосредственного участия человека, то она называется автоматической системой управления или системой автоматического управления (САУ).

В простейших случаях систему автоматического управления называют системой автоматического регулирования (САР), управляющее устройство – регулятором, а объект управления – объектом регулирования, или регулируемым объектом. Канал связи, по которому информация о текущем состоянии объекта управления (ОУ) поступает в управляющее устройство (УУ), называется обратной связью. Внешнее воздействие, которое определяет требуемый (заданный) закон изменения выходной переменной, называется задающим воздействием. Часто задающее воздействие выведено за пределы управляющего устройства, в то время как задающее воздействие вырабатывается датчиком, входящим в состав УУ.

Как правило, на объект управления действует возмущение, которое приводит к отклонению управляемой переменной от требуемого значения. Такое воздействие называется возмущением и возмущающим воздействием. Возмущение может действовать и на УУ. В частном случае в зависимости от принципа управления обратная связь или канал связи, по которому информация о возмущении поступает на УУ, может отсутствовать.

Выходная переменная УУ u, являющаяся входной переменной ОУ, называется *управляющим воздействием*, или *управлением*. Объекты управления в зависимости от реакции на входные воздействия делятся на устойчивые, нейтральные и неустойчивые. Пусть при входных воздействиях $u = u_0$ и $f = f_0$ выходная переменная имеет вид $y = y_0$, и пусть на какое-то время T хотя бы одно из входных воздействий изменяется, а затем принимает первоначальное значение. Если при этом выходная переменная со временем принимает первоначальное значение ($y \to y_0$ при $t\to\infty$), объект управления называется *устойчивым*; если переменная принимает новое постоянное значение ($y \to y^* \neq y_0$ при $t\to\infty$), объект управления называется *нейтральным*; если переменная не стремится к первоначальному или новому постоянному значению, объект называется *неустойчивым*.

Если информация о том, как зависит выходная переменная объекта управления от управляющего воздействия, является известной, то управление можно формировать как известную функцию времени $u = u^*(t)$. Такой способ организации управления часто называют принципом программного управления. При таком принципе управления УУ можно представить как устройство, состоящее из программатора (программирующего устройства) и исполнительного устройства (ИУ).

Принцип программного управления неприменим при управлении объектом, на который действуют заранее не известные возмущения, оказывающие существенное влияние на управляемую величину. Он также неприменим, если объект управления является нейтральным или неустойчивым и система управления должна функционировать достаточно длительное время. Это связано с тем, что при нейтральном и неустойчивом объекте управления небольшая систематическая ошибка в программном управлении приводит к нарастающей ошибке управляемой переменной.

Основной причиной, обуславливающей использование специальных УУ, содержащих, помимо программатора и ИУ, измерительные и усилительно-преобразующие устройства, является действие на систему управления возмущений, оказывающих существенное влияние на ее работу. При этом важной хадачей является поиск способов управления, при котором определяются (измеряются) действующие на систему управления возмущения и на их основе вырабатывается управляющее воздействие, которое полностью или частично компенсирует влияние возмущений на процесс управления.

Способ управления, при котором управляющее воздействие вырабатывается на основе действующих возмущений, называется способом управления по возмущению или принципом компенсации. Управлением по отклонению называется такой способ управления, при котором определяется отклонение текущего значения выходной переменной от требуемого значения и на его основе формируется управляющее воздействие.

Системы управления, основанные на способе управления по отклонению, содержат *обратную связь* – канал связи, по которому информация об управляемой переменной поступает на управляющее устройство. Поэтому способ управления по отклонению называют также принципом обратной связи. Одним из преимуществ принципа обратной связи является его универсальность, возможность его использования в условиях отсутствия информации о возмущающих воздействиях. Недостатком способа управления по отклонению является невозможность полной компенсации возмущающих воздействий. Данный факт связан с тем, что при этом способе управления управляющее воздействие начинает вырабатываться и оказывать влияние на ход процесса управления только после того, как возмущение, начав действовать, вызывает отклонение управляемой величины от требуемого режима. Кроме того, следует отметить, что система управления с обратной связью может оказаться неустойчивой, хотя объект управления устойчив.

Способом управления, учитывающим преимущества принципа компенсации и принципа обратной связи, является принцип *комбинированного управления*, при котором одновременно используются способы управления как по возмущению, так и по отклонению. Принцип комбинированного управления используется в тех случаях, когда на систему действует много различных возмущений, один (или несколько) из которых оказывает наибольшее влияние на работу системы управления и может быть измерен. В подобных случаях влияние превалирующего возмущения можно нейтрализовать, используя принцип компенсации, и нейтрализовать влияние остальных возмущений с применением принципа обратной связи.

Система управления включает управляющее устройство (УУ) и объект управления. Структура УУ зависит от используемого принципа управления. При использовании принципа программного управления УУ включает программатор и исполнительное устройство. Управляющее устройство, построенное на основе принципа компенсации, включает в себя задающее устройство (ЗУ), которое вырабатывает задающее воздействие; чувствительный элемент (ЧЭ), предназначенный для измерения возмущения; усилительно-преобразовательное устройство (УПУ), которое на основе задающего воздействия и измеренных значений возмущения вырабатывает управляющее воздействие; исполнительное устройство (ИУ), которое непосредственно воздействует на объект управления.

Управляющее устройство системы управления по отклонению, помимо задающего устройства, усилительно-преобразующего устройства и исполнительного устройства, содержит сравнивающее устройство (СУ), которое определяет ошибку, равную или пропорциональную отклонению управляемой переменной от требуемого значения, и чувствительный элемент (ЧЭ), предназначенный для измерения управляемой переменной.

Управляющее устройство системы комбинированного управления по сравнению с управляющим устройством системы управления по отклонению включает дополнительно чувствительный элемент, предназначенный для измерения возмущения.

Как было указано выше, управляющее устройство состоит из различных элементов. Однако при разработке и исследовании алгоритмов управления обычно исполнительное устройство и другие элементы, обладающие инерционностью, объединяют с объектом управления, и получают замкнутую систему управления. В этом случае под регулятором или управляющим устройством понимают преобразующее устройство, формирующее на основе ошибки e управляющее воздействие, а объектом регулирования (управления) – собственно объект управления, объединенный с остальной (инерционной) частью управляющего устройства. Зависимость $u = F(e)$ выходной переменной регулятора от его входной переменной называется законом или алгоритмом управления.

Системы управления классифицируют по различным признакам. По наличию или отсутствию обратной связи выделяют *замкнутые* и *разомкнутые* системы управления соотвественно. По виду задающего воздействия g различают: а) системы стабилизации, когда $g = \text{const}$; б) системы программного управления, когда $g = g(t)$, т.е. задающее воздействие – заданная функция времени; в) следящие системы, когда задающее воздействие заранее не известно и определяется внешними факторами (например, в радиолокационной станции слежения за самолетом задающее воздействие определяется движением наблюдаемого самолета).

В зависимости от использования текущей информации системы управления делятся на *обычные* (*неадаптивные*) и *адаптивные*. Система управления называется неадаптивной, если текущая информация используется только для выработки управляющего воздействия при неизменном алгоритме управления. Система называется адаптивной, если текущая информация используется также для изменения алгоритма управления и/или задающего воздействия.

В зависимости от вида сигнала на выходе элементов системы управления делят на *непрерывные* и *дискретные*. Если сигнал на выходе какого-либо элемента квантован по уровню (т.е. принимает дискретные значения) и/или по времени (т. е. представляет последовательность импульсов), то система управления называется дискретной, в противном случае, т.е. когда выходные переменные всех элементов системы управления являются непрерывными функциями, система называется непрерывной.

По тому, зависит характеристика (свойство) системы управления от времени или нет, различают *стационарные* и *нестационарные* системы управления. Систему управления называют стационарной, если ее характеристика не зависит от времени, и нестационарной, если ее характеристика зависит от времени.

По уравнениям, которыми описываются системы управления, они делятся на *линейные* и *нелинейные*. Система управления называется линейной, если она описывается линейными уравнениями, и нелинейной, если она описывается нелинейными уравнениями.

По характеру внешних (задающих и возмущающих) и внутренних (возмущающих) воздействий различают *детерминированные* и *стохастические* системы управления. Система управления называется детерминированной, если если все параметры объекта и внешние воздействия определены (заданы) точно. Детерминированные системы рассматривались в классической теории управления [6, 8, 12, 13, 76]. Системы, в которых действуют случайные возмущения или параметры объекта могут изменяться случайным образом, называются стохастическими [23].

Часто требования к системе можно сформулировать в виде задачи оптимизации. В оптимальных системах регулятор строится так, чтобы обеспечить минимум или максимум какого-то критерия качества. Если параметры объекта или возмущений известны неточно или могут изменяться со временем (в нестационарных системах), применяют адаптивные или самонастраивающиеся регуляторы, в которых закон управления меняется при изменении условий [36, 38]. В простейшем случае (когда есть несколько заранее известных режимов работы) происходит простое переключение между несколькими законами управления.

Во многих современных устройствах регуляторы, построенные на принципах нечеткой логики [11, 22–25]. Этот подход позволяет формализовать человеческий способ принятия решения. Одно из популярных направлений в современной теории – применение достижений искусственного интеллекта для управления техническими системами [11, 24]. Регулятор строится (или только настраивается) на основе нейронной сети, которую предварительно обучает человек- эксперт.

Одна из известных постановок задачи синтеза управления с учетом устойчивости состоит в следующем. Применительно к объекту управления

$$\dot{x} = Px + Bu,\ x \in R^n,\ u \in R^1, \tag{1.4}$$

где x – вектор состояний, u – управление (скаляр), P и B – заданные матрицы чисел соответствующих размеров, под задачей управления подразумевают синтез закона управления (организованного по принципу обратной связи)

$$u = C^T x, \tag{1.5}$$

где C^T – искомая матрица параметров этого закона, ^{T} – символ транспонирования, при котором матрица F системы, полученной замыканием объекта управления (4) регулятором (5),

$$\dot{x} = [P + BC^T]x \equiv Fx \tag{1.6}$$

имеет корни, удовлетворяющие неравенствам

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

т.е. замкнутая система является асимптотически устойчивой по Ляпунову. При этом назначение корней характеристического (минимального) многочлена замкнутой системы производится, исходя из желаемых точности и качества переходных процессов.

Устойчивость является одним из основных требований к системам автоматического управления (САУ). Поэтому важно обеспечивать соответствующим выбором структуры и параметров системы управления ее устойчивость.

Если на систему управления действуют два внешних воздействия – задающее воздействие g и возмущение f, то в ряде случаев ее можно описать с помощью уравнения

$$a_0 \overset{(n)}{y} + a_1 \overset{(n-1)}{y} + \ldots + a_n y = b_0 \overset{(m)}{g} + b_1 \overset{(m-1)}{g} + \ldots + b_m g + c_0 \overset{(l)}{f} + c_1 \overset{(l-1)}{f} + \ldots + c_l f\ ,$$

или в символьной форме

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m) g + \\ + (c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l) f. \tag{1.7}$$

Учитывая, что g и f – некоторые функции времени, выполнив необходимые операции в правой части, получим

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) y = \varphi_g(t) + \varphi_f(t), \tag{1.8}$$

где $\varphi_g(t)$ и $\varphi_f(t)$ – функции, получаемые соответственно из первого и второго слагаемого в правой части уравнения (7).

Из уравнения (7) при $g = 0$ и $f = 0$ получаем однородное дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) y = 0. \tag{1.9}$$

Назначением систем управления является поддержание некоторого заданного режима, называемого невозмущенным движением. Если на систему действует возмущение, то фактическое движение (которое называется возмущенным движением) будет отличаться от невозмущенного движения. Невозмущенное движение называется асимптотически устойчивым, если после окончания действия возмущения возмущенное движение $y(t)$ с течением времени стремится к невозмущенному движению $y_н(t)$: $y(t) \to y_н(t)$ при $t \to \infty$. Линейная система управления является асимптотически устойчивой, если любое ее невозмущенное движение, определяемое задающим воздействием, асимптотически устойчиво.

Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y(t) = y_В(t) + y_с(t),$$

где $y_В(t)$ – частное решение уравнения (8), $y_с(t)$ – общее решение однородного уравнения (9).

Частное решение $y_В(t)$ можно представить в виде

$$y_В(t) = y_g(t) + y_f(t),$$

где $y_g(t)$ – частное решение уравнения (1.2) при $\varphi_f(t) \equiv 0$, $y_f(t)$ – частное решение этого уравнения при $\varphi_g(t) \equiv 0$.

Общее решение $y_с(t)$ однородного уравнения описывает свободное движение системы управления (т. е. движение при отсутствии внешних воздействий), определяемое только начальными условиями. Частное решение $y_В(t)$ описывает вынужденное движение, определяемое внешними воздействиями.

Возмущение, которое действует до начального момента t_0, влияет на начальные условия, от которых зависит только свободное движение. Поэтому для того, чтобы возмущенное движение было асимптотически устойчиво (т.е. для $y(t) \to y_{\text{н}}(t)$ при $t \to \infty$), необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{t\to\infty} y_{\text{c}}(t) = 0.$$

Характеристическое уравнение системы управления, описываемой уравнением (7), имеет вид

$$Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0.$$

Левая часть этого уравнения ($Q(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$) называется характеристическим полиномом. Характеристический полином получается из собственного оператора системы

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n$$

при подстановке $p = \lambda$: $Q(\lambda) = Q(p)|_{p=\lambda}$.

Если λ_i ($i = 1, 2,\ldots, q$) – корни характеристического уравнения кратности k_i ($k_1 + k_2 + \ldots + k_q = n$), то общее решение однородного уравнения y_{c} имеет вид

$$y_{\text{c}}(t) = \sum_{i=1}^{q} P_i(t) e^{\lambda_i t},$$

где $P_i(t) = C_1^{(i)} + C_2^{(i)}\, t + \ldots + C_{k_i}^{(i)} t^{k_i - 1}$; $C_1^{(i)}$, $C_2^{(i)}$, …, $C_{k_i}^{(i)}$ – постоянные интегрирования.

Нетрудно проверить, что $P_i(t)e^{\lambda_i t} \to 0$ при $t \to \infty$ тогда и только тогда, когда действительная часть корня λ_i отрицательна: $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$. Поэтому правая часть в предыдущем уравнении будет стремиться к нулю при $t \to \infty$, т. е. будет выполнено (необходимое и достаточное) условие устойчивости, если

$$\operatorname{Re}\lambda_i < 0,\ i = 1, 2, \ldots, q.$$

Для того, чтобы линейная стационарная и непрерывная система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть. На комплексной плоскости корни, имеющие отрицательную вещественную часть, располагаются в левой полуплоскости и поэтому называются левыми, корни, имеющие положительную вещественную часть, располагаются в правой полуплоскости и называются правыми, а корни, расположенные на мнимой оси – нейтральными. С учетом этого критерий устойчивости можно сформулировать следующим образом: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми.

Важно отметить, что существуют различные критерии устойчивости, которые позволяют судить о том, находятся ли корни полинома в левой полуплоскости без вычисления этих корней.

Развитие современных математических методов теории автоматического управления для различных типов систем представлено в [6, 11, 36, 64, 65] и в других работах.

1.7. Практическая значимость исследований устойчивости и некоторые направления анализа устойчивости систем управления. В заключение настоящего параграфа кратко остановимся на значимости понятий устойчивости для технических приложений и на обзоре некоторых научных направлений, связанных с анализом устойчивости системинтеллектного управлением.

Любой инженерный проект опирается, по существу, на решения дифференциальных уравнений движения и равновесия механической системы. Реализация проекта сопровождается некоторыми допусками при изготовлении, а сама механическая система вынуждена работать под действием случайных возмущающих сил, которые не учтены в дифференциальных уравнениях в силу их неизвестности.

Случайные воздействия на расчетные движения могут приводить к совершенно различным результатам. В одном случае возмущенное движение мало отличается от расчетного (случай устойчивости), в другом – возмущенное движение совершенно отличается от расчетного (случай неустойчивости).

Особо важное значение теория устойчивости движения имеет для техники. Корабль, самолет, ракета при движении должны устойчиво сохранять заданный курс. Турбины, генераторы должны устойчиво работать в заданном режиме. Гироскопический компас должен устойчиво показывать направление географического меридиана и т.д. Следовательно, необходимым требованием к управляемым динамическим системам является их устойчивость (в том или ином смысле) по отношению к структурным и внешним возмущениям. Построение алгоритмов исследования устойчивости позволяет проводить анализ влияния различных проектных параметров на качество функционирования сложного технического объекта.

Одним из эффективных методов исследования устойчивости и других качественных свойств динамических систем является классический и обобщенный методы функций Ляпунова. Метод функций Ляпунова получил развитие в [22–25, 27, 33, 49, 59, 73,76, 79, 88–90] и многих других работах. В настоящее время обобщенный второй метод Ляпунова стал одним из важнейших методов качественного исследования устойчивости движения динамических управляемых систем. В [24] с помощью обобщенных функций Ляпунова получены необходимые и достаточные условия устойчивости динамических управляемых систем, дан обзор известных результатов по применению разрывных функций Ляпунова к изучению устойчивости систем управления.В [23] развиты методы анализа устойчивости и управляемости динамических систем, задаваемых дифференциальными уравнениями различных типов.

В системах с логическими регуляторами знания о взаимодействии регулятора с объектом (процессом) управления представляются в форме правил вида: ЕСЛИ (исходная ситуация), ТО (ответная реакция). Часть ЕСЛИ (предпосылки или условия) означает сопряжение логических операций, а часть ТО (решение, вывод, заключение) представляет собой указание лингвистической величины для выходного воздействия (управляющего воздействия на объект управления) логического регулятора.

При решении задач управления системами на основе логических регуляторов возникает проблема исследования устойчивости этих систем. В ряде промышленных нормативов в России и за рубежом заложено требование обеспечения устойчивости системы управления. Это требование рассматривается как необходимое условие для использования системы управления. Имеется много прикладных задач, для которых проверка устойчивости управляемой системы оценивается как важнейшая задача. К этим задачам относятся задачи проектирования управляемых систем, влияющих на безопасность людей (стабилизация полета самолета и т.п.), проектирования управляющих дорогостоящих объектов, изучения сложных технических процессов, подверженных потере устойчивости. Вопросы алгоритмического конструирования и устойчивости динамических систем с логическими регуляторами рассматривались в [11, 22, 24, 25, 103, 105] и в других работах. Несмотря на то, что литература по теории динамических систем с логическими регуляторами весьма обширна, вопросы устойчивости и стабилизации указанных систем требуют дальнейшей разработки [24].

Современным подходом к изучению динамических систем с логическими регуляторами является переход к интеллектному управлению [11]. Использование интеллектных систем ведет к более высокой степени автоматизации для сложных, плохо структурированных процессов и в ряде случаев сокращает время разработки технических систем. Интеллектное управление оказывается полезным в случаях, когда технологические процессы являются слишком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов или когда доступные источники информации интерпретируются неточно или неопределенно.

Многие управляемые объекты управления в силу своей динамики представляют собой различные виды маятниковых установок (а в некоторых случаях и их комбинацию), соблюдение устойчивости для которых является обязательным требованием их эксплуатации. Динамические модели перевернутого маятника используется в задачах управления техническими средствами с гироскопическим устройством, в робототехнике, в ракетостроении. Многозвенные перевернутые маятники служат упрощенными примерами шагающих роботов. В связи с многообразием фиизических эффектов, нестационарностью объекта и наличием неконтролируемых возмущающих воздействий процессы, протекающие в маятниковых системах, в ряде случаев являются сложными для получения их адекватного математического описания с помощью классических методов моделирования [22]. Для решения данной научной проблемы существуют подходы, базирующиеся на правилах логического вывода и логическом регуляторе, синтезируемом для стабилизации системы. В одном из наиболее эффективных подходов построение модели управляемой системы осуществляется при наличии хотя бы приближенной математической модели, заданной в виде дифференциальных или разностных уравнений. С помощью универсальной аппроксимации исходная модель приводится к виду модели Такаги–Суджено (ТС-модели) [24, 103, 105]. Базирующиеся на правилах логического вывода и нечетких регуляторах ТС-модели находят приложения в задачах управления механическими транспортными средствами, управления подъемными и мостовыми кранами, управления роботами-манипуляторами.

Общей идеей большинства исследований по устойчивости и стабилизации ТС-моделей является использование метода функций Ляпунова и сведение решения вопроса об устойчивости к анализу свойств линейных матричных неравенств, к которым применимы методы численного решения. Линейные матричные неравенства требуемого вида обычно получают на основе достаточных условий устойчивости (асимптотической устойчивости) в терминах функций Ляпунова. Вид линейных матричных неравенств зависит как от структуры применяемой функции Ляпунова, так и от ограничений, накладываемых на эту функцию. Основные трудности в конкретных задачах устойчивости, решаемых с помощью прямого метода, возникают при построении функций Ляпунова, и на ослаблении требований к указанным функциям базируется один из подходов к дальнейшей разработке условий устойчивости. Несмотря на большой интерес исследователей к данной области развитие систематических методов изучения устойчивости динамических систем с логическими регуляторами остается малоизученным направлением в теории управляемых систем.

В [25] охарактеризованы известные и разработанные авторами подходы к исследованию устойчивости динамических систем с логическими регуляторами. Подходы базируются на развитии метода функций Ляпунова, дивергентного, спектрального-бифуркационного и других методов. а также на представлении нелинейных систем с помощью ТС-моделей. Для ряда классов нелинейных управляемых систем с логическими регуляторами, представленных ТС-моделями, в [22, 24] на основе полученных условий устойчивости разработаны алгоритмы исследования стабилизации, реализация которых возможна с применением современного программного обеспечения. Отметим, что перспективой дальнейших исследований является синтез и анализ устойчивости ТС-моделей с переменными параметрами, в частности, ТС-моделей параметрических маятников. Для указанных целей потребуется дальнейшая разработка научного программного обеспечения. Ряд перспективных направлений отмечен также в [22, 24, 25].

Рассмотренные подходы демонстрируют эффективность применения методов Ляпунова в сочетании с другими методами для анализа устойчивости управляемых систем с логическими регуляторами, а также эффективность использования полученных на основе этих методов критериев устойчивости и алгоритмов стабилизации.

§ 2. Метод функций Ляпунова

2.1. Теоремы об устойчивости и об асимптотической устойчивости. В классическом труде «Общая задача об устойчивости движения» (1892) А.М. Ляпуновым наряду с методом характеристических показателей был развит прямой (или второй) метод, который также называют методом функций Ляпунова, – метод исследования устойчивости, когда об устойчивости судят по изменениям в возмущенном движении системы некоторых функций ее координат. Прямой метод Ляпунова является наиболее общим, однако подбор функций Ляпунова во многих случаях довольно сложен.

Функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определенной в H-окрестности* ($\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le H$) *начала координат,* если она положительна во всех точках этой окрестности, за исключением начала координат, где она равна нулю:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0, \quad V(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Например, функция $V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ будет положительно определенной функцией в пространстве переменных x_1, x_2, x_3. Функция $u = x_1^2 + x_2^2$ будет лишь знакопостоянной в этом пространстве, но не положительно определенной, так как она обращается в нуль на всей оси Ox_3, а не только в точке (0, 0, 0), и она же будет положительно определенной в пространстве x_1, x_2. Если $V(x_1, x_2, x_3) < 0$ при $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$ и $V(0, 0, ..., 0) = 0$, то функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *отрицательно определенной*.

Функция $V(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определенной в H-окрестности начала координат при* $t \ge t_0$, если существует такая не зависящая от t положительно определенная функция $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $V(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \ge W(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при всех указанных значениях аргументов и $v(t, 0, 0, ..., 0) = 0$.

Признаки знакоопределенности функции можно выявить с помощью *критерия Сильвестра*. Рассмотрим матрицу коэффициентов квадратичной формы, представив ее в виде

$$V = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{n} c_{ij} x_i x_j .$$

Составим для нее *n* главных диагональных миноров. В алгебре доказывается следующий критерий Сильвестра: для того чтобы квадратичная форма с вещественными коэффициентами была определенно-положительной, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы квадратичной формы $[c_{ij}]$ были положительны:

$$\Delta_1 = c_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0 .$$

Например, для функции

$$V = \frac{1}{2}\left(3x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right)$$

матрица коэффициентов имеет вид

$$(c_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

а главные диагональные миноры соответствующего определителя имеют вид $\Delta_1 = 3 > 0$, $\Delta_2 =$ = [3·1 – (–1)(–1)] = 2 > 0. Следовательно, функция V является положительно определенной.

Если функция $V(x)$ положительно определенная, то функция $-V(x)$ будет отрицательно определенной. В этом случае условия критерия Сильвестра должны записываться для матрицы $-(c_{ij})$. Эти условия имеют вид

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \ldots ,$$

т.е. знаки определителей должны последовательно чередоваться, причем знак c_{11} должен быть отрицательным.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.1}$$

где все f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны в окрестности начала координат, $t \ge t_0$, $f_i(t, 0, 0, ..., 0) \equiv 0$, и пусть $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов. Полная производная по t функции $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ в силу системы (1) (вдоль интегральных кривых), равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(t, x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (2.2)$$

Если правые части системы (1) не содержат явно t, то такая система называется *автономной,* или *стационарной*.

Фундаментальный результат А.М. Ляпунова об устойчивости состоит в следующем: если система дифференциальных уравнений (1) такова, что существует функция $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная при $t \ge t_0$ в некоторой H-окрестности начала координат, производная которой $\dfrac{dV}{dt}$ в силу системы (1), неположительна, то нулевое решение системы (1) устойчиво. Условия А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевого решения приведем для автономной системы: если система

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \qquad (2.3)$$

такова, что существует функция $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, положительно определенная в некоторой H-окрестности начала координат, производная которой $\dfrac{dV}{dt}$ в силу системы (3), отрицательно определена, то тривиальное решение $x_i \equiv 0$, $i = 1, 2, ..., n,$ асимптотически устойчиво. Далее сформулируем приведенные результаты в несколько ином виде и приведем краткие доказательства.

Функции $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, фигурирующие в приведенных выше условиях, называются *функциями Ляпунова*.

Систему (1) запишем в векторном виде

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \qquad (2.4)$$

где $x \in R^n$, $f \in R^n$. Запишем производную в силу системы (4):

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot f_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\cdot f_n, \tag{2.5}$$

где V и $f_1, \ldots, f_n$ зависят от t, $x_1, \ldots, x_n$. Формула (5) позволяет найти производную сложной функции

$$V(t, x(t)) \equiv V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

где $x(t)$ – любое решение системы (4). По теореме о производной сложной функции имеем

$$\frac{d}{dt}V(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\cdot\frac{dx_n}{dt}. \tag{2.6}$$

Так как $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ – решение системы (4), то $dx_i/dt = f_i(t, x_1, \ldots, x_n)$ и сумма в (6) равна (5).

Теорема 2.1 (теорема А.М. Ляпунова об устойчивости). *Пусть* $x(t) \equiv 0$ – *решение системы* (1), *и пусть при* $|x| \le \rho\ (\rho > 0)$ *существует функция* $V(x) \in C^1$, *удовлетворяющая условиям* $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ *при* $x \ne 0$, $dV/dt|_{(4)} \le 0$. *Тогда нулевое решение* $x(t) \equiv 0$ системы (4) *устойчиво*.

Действительно, рассмотрим любое $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 = \min\{\varepsilon, \rho\}$. Непрерывная функция $v(x)$ на множестве $S(|x| = \varepsilon_1)$ достигает в некоторой точке $x^* \in S$ своего наименьшего значения $\min v(x) = v(x^*)$. Так как $v(x) > 0$ на S, то $v(x^*) = m > 0$. Функция $V(x)$ непрерывна, $v(0) = 0$, поэтому найдется такое $\delta > 0$, что $V(x) < m$ при $|x| < \delta$.

Предположим, что решение $x(t)$ с $|x(t_0)| < \delta$ или существует не на всем интервале $t_0 \le t < \infty$, или не остается в области $|x| < \varepsilon_1$. Тогда в силу теоремы о продолжении рещений [79] найдется такое $t_1 > t_0$, что $|x(t_1)| = \varepsilon_1$, $|x(t)| < \varepsilon_1$ при $t_0 \le t < t_1$. Тогда $V(x(t_0)) < m$, $V(x(t_1)) \ge m$ в силу выбора m и δ. Это невозможно, поскольку

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \left.\frac{dV}{dt}\right|_{(4)} \le 0$$

и $V(x(t))$ не возрастает. Итак, предположение неверно, и теорема доказана.

Теорема 2.2 (теорема А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости). *Пусть выполнены условия теоремы* 2.*1 с заменой последнего* неравенства на $dV/dt|_{(4)} \le -W(x) < 0$ при $0 < |x| \le \rho$; функция $W(x)$ непрерывна при $|x| \le \rho$. *Тогда нулевое решение системы* (4) *асимптотически устойчиво*.

Действительно, из теоремы 2.1 следует, что нулевое решение устойчиво и что любое решение $x(t)$ с $|x(t_0)| < \delta$ остается в шаре $|x| < \varepsilon_1$ при $t_0 \le t < \infty$. Докажем, что $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. В противном случае нашлись бы такие числа $\eta > 0$ и $t_1, t_2, \ldots \to \infty$, что $|x(t_i)| \ge \eta, i = 1, 2, \ldots$. В замкнутой области $\eta \le |x| \le \varepsilon_1$ имеем $V(x) \ge \mu > 0$, поэтому $V(x(t_i)) \ge \mu > 0\,(i = 1, 2, \ldots)$. Так как $dv/dt|_{(1)} \le 0$, то $v(x(t))$ не возрастает; поэтому $V(x(t)) \ge \mu$ при всех $t \ge t_0$. Если бы было $V(x(t)) < \mu$ при некотором *t*, то при всех t_i больших этого *t*, тоже было бы $V(x(t_i)) < \mu$, а это противоречит предположению.

Рассмотрим такое $\delta_1 > 0$, что $V(x) < \mu$ в области $|x| < \delta_1$. Решение $x(t)$ не может войти в эту область, поэтому остается в замкнутой области $\delta_1 \le |x| \le \varepsilon_1$. В этой области $W(x) \ge \beta > 0$, $dV/dt|_{(1)} \le -\beta < 0$, поэтому

$$V(x(t)) - V(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t} \frac{dV(x(\tau))}{d\tau} d\tau \le -\beta(t - t_0) \to -\infty, t \to \infty,$$

но $V(x) \ge 0$. Противоречие показывает, что предположение $x(t) \not\to 0$ неверно.

Отметим, что А.М. Ляпунов доказал более общие теоремы – с функцией $V(t, x)$ вместо $V(x)$, удовлетворяющей соответствующим ограничениям.

Пример 2.1. Рассмотрим уравнение

$$x' = \sin x - x.$$

и выберем в качестве функции Ляпунова $V = x^2$. Имеем

$$\frac{dV}{dt} = 2xx' = 2x(\sin x - x) < 0 \text{ при } x \ne 0.$$

По теореме Ляпунова об асимптотической устойчивости нулевое решение асимптотически устойчиво.

Для систем вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in R^n. \tag{2.7}$$

часто используется теорема Е.А. Барбашина–Н.Н. Красовского. Эта теорема в англоязычной литературе известна также как принцип инвариантности ЛаСалля.

Теорема 2.3 (теорема Е.А. Барбашина–Н.Н. Красовского). *Пусть* в (7) $f \in C, f(0)=0$ *и пусть при* $|x| \le \rho \, (\rho > 0)$ *существует такая функция* $V(x) > 0 \, (x \ne 0)$, $dV/dt|_{(5)} \le 0$, *а множество N тех x, при которых* $dV/dt|_{(2)} = 0$, *не содержит целых траекторий, кроме* $x=0$. *Тогда нулевое решение системы* (7) *асимптотически устойчиво.*

Действительно, при данных условиях выполнены также условия теоремы Ляпунова об устойчивости, поэтому нулевое решение устойчиво и все решения с $|x(0)| < \delta$ остаются в шаре $S\left(|x| \le \varepsilon\right)$. У любого такого решения $x(t)$ существует ω-предельное множество $\Omega \subset S$, состоящее из целых траекторий. Известно [59; 79, гл. 4, §17], что если полутраектория ограничена и вместе со своей ε-окрестностью содержится в области, в которой все f_i и $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$, непрерывны, то ω-предельное множество непустно, ограничено, замкнуто, связано и состоит из целых траекторий. Функция $V(x(t))$ не возрастает и существует $\lim\limits_{t\to\infty} V(x(t)) = l$. Любая точка $b \in \Omega$ есть $\lim x(t_i)$ для некоторйо последовательности $t_i \to \infty$. В силу непрерывности функции V из $x(t_i) \to b$ следует $V(b) = \lim V(x(t_i)) = l$. Точка $b \in \Omega$ произвольна, поэтому на Ω всюду $V(x) = l$. В силу свойств множества Ω существует решение $z(t) \in \Omega$ с $z(0) = b$. Тогда $V(\mathrm{z(t)}) \equiv l$, и на траектории $z(t)$

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(5)} = \frac{dV(z(t))}{dt} \equiv 0.$$

Значит, траектория $z(t)$ содержится во множестве *N*, не содержащем целых траекторий, кроме точки $x=0$, то $z(t) \equiv 0, b=0$. Так как b – любая точка из Ω, то множество Ω состоит из одной точки $x=0$. Значит, все решения с $|x(0)| < \delta$ стремятся к нулю при $t \to \infty$, и нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Пример 2.2. Исследовать устойчивость нулевого решения системы

$$x' = y, \; y' = -x^3 - ay. \tag{2.8}$$

В случае $a=0$ из (6) следует $dy/dx = -x^3/y, 2y^2 + x^4 = c$. Рассматривая $V = 2y^2 + x^4$, получаем $dV/dt|_{(8)} \equiv 0$. По теореме Ляпунова об устойчивости нулевое решение устойчиво. Асимптотической устойчивости нет, так как для любого ненулевого решения $x(t)$, $y(t)$ имеем $2y^2(t)+x^4(t)=\text{const}$. Следовательно, нет стремления к нулю при $t\to\infty$.

В случае $a>0$ также рассмотрим $V=2y^2+x^4$. Тогда

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(8)}=-4ay^2\le 0.$$

Равенство достигается только на прямой $y=0$. На этой прямой имеем $y'=-x^3\ne 0$ при $x\ne 0$. Следовательно, все решения, проходящие через точки прямой $y=0$, кроме нулевого решения, тут же сходят с нее. По теореме Барбашина–Красовского нулевое решение асимптотически устойчиво.

В случае $a<0$ система (8) заменой t и y на $-t$ и $-y$ сводится к системе $x'=y,\ y'=-x^3+ay$, отличающейся от (8) только знаком перед a. Все решения этой новой системы из некоторой области $x^2+y^2<\rho^2$ стремятся к нулю при $t\to\infty$. Значит, для системы (8) решения стремятся к нулю при $t\to-\infty$. Нетрудно проверить, при наличии хотя бы одного решения, стремящегося к нулю при $t\to-\infty$, нулевое решение неустойчиво.

2.2. Теоремы о неустойчивости. А.М. Ляпуновым был изучен вопрос не только об устойчивости, но и о неустойчивости нулевого решения. Им доказано, что если функция $V(x)$ такова, что $V(0)=0$ и все частные производные первого порядка непрерывны в окрестности начала координат, и если $\dot V$ – положительно определенная функция, а сколь угодно близко от начала координат имеются точки, в которых функция $V(x)$ принимает положительные значения, то начало координат неустойчиво. В этих условиях неустойчивости речь идет о всей области окрестности начала координат. Утверждение, охватывающее теорему Ляпунова, но использующее более узкую область, получил в начале Н.Г. Четаев (30-е годы XX века).

Теорема 2.4 (теорема Н.Г. Четаева о неустойчивости). *Пусть* $x(t)\equiv 0$ – *решение системы* (4). *Пусть область* D *пространства* x *лежит в шаре* $S(|x|<\varepsilon)$, *а ее граница* $\Gamma=\Gamma_0\cup\Gamma_1,\ 0\in\Gamma_0,\ |x|<\varepsilon$ *на* Γ_0, $|x|=\varepsilon$ *на* Γ_1, *множество* Γ_1 *может быть пустым. Пусть в* $D\cup\Gamma$ *существует непрерывная функция*

$V(x), V(x)=0$ *на* Γ_0, *а в* D *имеем* $V \in C^1, V(x)>0$, $dV/dt\big|_{(4)} \ge W(x)>0$, *W непрерывна в* $D \cap \Gamma$. *Тогда нулевое решение системы* (4) *неустойчиво.*

Предположим, что нулевое решение устойчиво. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) \in D, |x(t_0)| < \delta$, остается в шаре *S* при $t_0 \le t < \infty$. При $x(t) \in D$ имеем $dV(x(t))/dt > 0$, значит $V(x(t))$ возрастает и $V(x(t)) > V(x(t_0)) = V_0 > 0$. Та часть D_0 множества $D \cup \Gamma$, в которой $V(x) \ge V_0$, – ограниченное замкнутое множество (в его предельных точках имеем тоже $x \in D \cup \Gamma, V(x) \ge V_0$ вследствие непрерывности $v(x)$). Решение $x(t)$ не может выйти из D_0, так как на Γ_0 $V(x)=0$, а на Γ_1 решение не попадает, поскольку $|x(t)| < \varepsilon$. На D_0 имеем $W(x) \ge \beta > 0$,

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \ge W(x(t)) \ge \beta, V(x(t)) - V(x(t_0)) \ge \beta(t - t_0) \to \infty, t \to \infty .$$

Это противоречит ограниченности функции $V(x)$ в D_0. Следовательно, нулевое решение неустойчиво.

Согласно теореме Четаева о неустойчивости, нулевое решение неустойчиво, если для системы (3) существует функция *V*, обладающая следующими свойствами:

1) при сколь угодно больших значениях *t* в сколь угодно малой окрестности начала координат существует область $V > 0$;
2) в области $V > 0$ функция *V* ограничена;
3) в области $V > 0$ производная $\dfrac{dV}{dt}$, составленная в силу систем уравнений (3), положительно определена. Под областью $V > 0$ понимается какая-нибудь область окрестности начала координат пространства переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая ограничена поверхностью $V = 0$ и в которой функция *V* принимает положительные значения.

Пример 2.3. Рассмотрим автономную систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x^2 + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = y^2 + x. \end{cases} \tag{2.9}$$

Выберем для системы (9) в качестве $V(x, y)$ функцию $V = \frac{1}{3}x^3 + xy + \frac{1}{3}y^3$. Областью $V > 0$ является, например, область $x > 0, y > 0$. В области $V > 0$ имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (x^2 + y)^2 + (x + y^2)^2 > 0.$$

Согласно теореме Четаева о неустойчивости, решение $x = 0,\ y = 0$ системы (9) неустойчиво.

Пример 2.4. Рассмотрим систему

$$x' = ax + by - y^2,\ y' = cx + dy - x^2, \tag{2.10}$$

где $a, b, c, d > 0$. При малых x, y в первой четверти имеем $x' > 0, y' > 0$, значит, там решения удаляются от точки (0,0). Выберем $V = xy$ в области $(x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < \varepsilon^2)$. Тогда

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(10)} = x'y + xy' = axy + by^2 - y^3 + cx^2 + dxy - x^3 = W(x, y).$$

При малом ε и $0 < x < \varepsilon, 0 < y < \varepsilon$ имеем $y^2 - y^3 + cx^2 > 0$, поэтому $W(x, y) > 0$ указанной области. По теореме Четаева нулевое решение неустойчиво.

§ 3. Устойчивость по первому приближению

3.1. Уравнения первого приближения. Дифференциальные уравнения, задающие математические модели динамических систем, обычно бывают нелинейными, и для исследования устойчивости их решений проводят *линеаризацию уравнений*. В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение о том, что возмущения координат и скоростей во все время движения остаются малыми, и поэтому в дифференциальных уравнениях удерживаются только члены первого порядка малости. Членами второго и более высоких порядков малости пренебрегают. Таким образом, линеаризованные дифференциальные уравнения являются линейными относительно возмущений координат и скоростей. Линеаризованные уравнения называют также *уравнениями первого приближения*.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f(t, x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3.1}$$

где f_i – дифференцируемые в окрестности начала координат функции, $f_i(t, 0, 0, ..., 0) \equiv 0$. Рассмотрим вопрос об устойчивости положения равновесия $x_i \equiv 0 \quad (i = 1, 2, ..n)$ системы (1). С помощью разложения правых частей (1) по формуле Тейлора по степеням x в окрестности начала координат представим систему (1) в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j + \varphi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{3.2}$$

где φ_i имеют порядок выше первого относительно. Линейная система

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) x_j, \qquad i = 1, 2, ..., n, \tag{3.3}$$

называется *системой уравнений первого приближения или линеаризованной системой для системы* (1). В случае, когда коэффициенты $a_{ij}(t)$ в (3) постоянны, говорят, что система (2) *стационарна в первом приближении*.

Известно, что в общем случае устойчивость (неустойчивость) положения равновесия системы (3) не влечет устойчивость (неустойчивость) положения равновесия исходной системы (1). То есть в указанном смысле строгой связи между системами (1) и (3) нет.

Например, для нелинейного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 e^t \tag{3.4}$$

линеаризованное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = x. \tag{3.5}$$

Решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (5) неустойчиво, так как каждое решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^t$$

и очевидно, что $|x(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. С другой стороны, решение $x(t) \equiv 0$ уравнения (4) является асимптотически устойчивым. В самом деле, общее решение этого уравнения имеет вид

$$x(t) = Ce^t \left[1 + \frac{2}{3} C^2 (e^{3t} - 1)\right]^{-1/2}$$

и, очевидно, стремится к нулю при $t \to +\infty$.

В теоремах об устойчивости по первому приближению указываются условия, при которых по устойчивости системы первого приближения можно судить об устойчивости исходной нелинейной системы.

Условия устойчивости по первому приближению можно сформулировать следующим образом. Если система уравнений (2) стационарна в первом приближении, все члены φ_i ограничены по t и разлагаются в ряды по степеням $x_1, \ldots, x_n$ в некоторой области $\sum_{i=1}^{n} x_i \le H$, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка, а все корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22-k} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \tag{3.6}$$

имеют отрицательные действительные части, то нулевое решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (2) асимптотически устойчиво.

Кроме того, если система уравнений (2) стационарна в первом приближении, все функции φ_i удовлетворяют указанным выше условиям и хотя бы один из корней характеристического уравнения (6) имеет положительную действительную часть, то нулевое решение $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ системы (2) неустойчива.

Если действительные части всех корней характеристического уравнения (6) неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю, то исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно (в этом случае начинают влиять нелинейные члены).

Далее сформулируем условия устойчивости по первому приближению в несколько более общем виде, приведем краткое доказательство и рассмотрим ряд примеров.

3.2. Теорема об устойчивости по первому приближению. Запишем изучаемые системы в векторном виде. Пусть $x = x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ – положение равновесия системы

$$x' = f(x),$$

где $x \in R^n$, причем $x = x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ – положение равновесия системы, т.е. $f(x_0) = 0$. Разлагая $f(x)$ вблизи точки $x = x_0$ по формуле Тейлора до членов первого порядка малости, получаем систему

$$x_i' = a_{i1}(x_1 - x_{10}) + \ldots + a_{in}(x_n - x_{n0}) + \varphi_i(x), i = 1, \ldots, n,$$

где $a_{ij} = \partial f_i / \partial x_j \big|_{x=x_0}$, $\varphi_i(x) = o(|x - x_0|)$ при $x \to x_0$. С учетом переноса начала координат в точку x_0 заменой $x = x_0 + y$, получим в векторной записи

$$y' = Ay + \varphi_0(y), \varphi_0(y) = o(|y|) \text{ при } y \to 0,$$

где $A = (a_{ij})_{i, j=1,\ldots,n}$ является постоянной матрицей.

Теорема об устойчивости по первому приближению. *Рассмотрим систему*

$$x' = Ax + \varphi(t, x), x \in R^n. \qquad (3.7)$$

Пусть при $t \geq 0, |x| \leq \rho_0$ *функция* $\varphi \in C^1, |\varphi(t, x)| \leq \gamma(x)|x|, \gamma(x) \to 0 \ (x \to 0)$.

1. *Если матрица A имеет все* $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$*, то нулевое решение асимптотически устойчиво.*

2. *Если матрица A имеет хотя бы одно* λ *с* $\mathrm{Re}\lambda > 0$*, то нулевое решение неустойчиво.*

3. *В «критическом» случае, т.е. когда* $\max \operatorname{Re}\lambda_j = 0$*, наличие устойчивости или неустойчивости зависит не только от матрицы A, но и от функции* $\varphi(t, x)$.

Докажем теорему в случае, когда все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$. Оценим столбцы матрицы e^{tA}. Эта матрица является фундаментальной для системы $y' = Ay$, а ее столбцы $\psi^1(t),\ldots,\psi^n(t)$ – решения этой системы. Каждое решение имеет вид $x = P_1(t)e^{\lambda_1 t} + \ldots + P_m(t)e^{\lambda_m t}$, где $P_j(t)$ – многочлен степени не выше $k_j - 1$, k_j – размер наибольшей из жордановых клеток, содержащих λ_j. Пусть $\alpha > 0$ такое, что все $\operatorname{Re}\lambda_j < -\alpha < 0$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_j + \alpha \le -\mu < 0$ для всех *j*. Имеем $\left|P_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}\right| \le \left|P_j(t)/e^{\mu t}\right| \to 0$ при $t \to \infty$. Значит, $\left|P_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}\right| \le c_j \ (0 \le t < \infty)$, и

$$\left|P_j(t)e^{\lambda_j t}\right| = \left|P_j(t)e^{(\lambda_j+\alpha)t}\right| e^{-\alpha t} \le c_j e^{-\alpha t}.$$

Поэтому при некотором c = const имеем оценку

$$\left|\psi^k(t)\right| \le ce^{-\alpha t},\ k = 1,\ldots,n. \tag{3.8}$$

Функцию Ляпунова выберем в виде

$$V(x) = \int_0^\infty \left|e^{\tau A}x\right|^2 d\tau. \tag{3.9}$$

Решение системы $y' = Ay$ с начальным условием $y(0) = x = (x_1,\ldots,x_n)^T$ есть

$$y(t) = e^{tA}x = x_1\psi^1(t) + \ldots + x_n\psi^n(t),$$

поскольку $\psi^k(t)$ – решение, у которого $\psi^k(0)$ есть k-й столбец единичной матрицы. Следовательно,

$$\left|e^{\tau A}x\right|^2 = \left|y(\tau)\right|^2 = y \cdot y = \sum_{i,j=1}^n d_{ij}(\tau)x_i x_j,\ d_{ij}(\tau) = \psi^i(\tau)\psi^j(\tau).$$

В силу (8) $\left|d_{ij}(\tau)\right| \le c^2 e^{-2\alpha\tau}$. С учетом этого неравенства из (9) получаем

$$V(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}x_i x_j,\ b_{ij} = \int_0^\infty d_{ij}(\tau)d\tau = b_{ji}. \tag{3.10}$$

В силу оценки функций $d_{ij}(\tau)$ интегралы от них, а значит, и интеграл в (9), сходятся.

Найдем dV/dt в силу системы $y' = Ay$. Имеем

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{y'=Ay}=\left.\frac{dV(y(t))}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}\int_0^\infty\left|e^{\tau A}y(t)\right|^2 d\tau\right|_{t=0}, \qquad (3.11)$$

где $y(t)$ – решение системы $y'=Ay$ с начальным условием $y(0)=x$, то есть $y(t)=e^{tA}x$. Подынтегральное выражение равно $\left|e^{\tau A}e^{tA}x\right|^2=\left|e^{(\tau+t)A}x\right|^2$. Переходя от τ к $s=\tau+t$, получаем, что выражение (11) равно

$$\left.\frac{d}{dt}\int_t^\infty\left|e^{sA}x\right|^2 ds\right|_{t=0}=-\left.\left|e^{tA}x\right|^2\right|_{t=0}=-|x|^2. \qquad (3.12)$$

Теперь найдем dV/dt в силу системы (18)

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(7)}=(\mathrm{grad}V(x))\cdot(Ax+\varphi(t,x))=(\mathrm{grad}V(x))\cdot Ax+(\mathrm{grad}V(x))\cdot\varphi(t,x).$$

Первое слагаемое есть $dV/dt|_{x'=Ax}$, значит, равно выражению (12). Выполним оценку второго слагаемого. Пользуясь неравенством Коши [17, 79] и считая $\left|b_{ij}\right|\le b,\ i,\ j=1,\dots,n$, из (10) получим

$$\frac{dV}{dx_i}=2\sum_{j=1}^n b_{ij}x_j,\ \left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2\le 4\sum_{j=1}^n b_{ij}^2\sum_{j=1}^n x_j^2\le 4b^2n|x|^2,\ \left|\mathrm{grad}V(x)\right|^2=\sum_{i=1}^n\left(\frac{dV}{dx_i}\right)^2\le$$

$$\le 4b^2n^2|x|^2,\ |\varphi(t,x)|\le\gamma(x)|x|.$$

Поэтому

$$\left.\frac{dV(x)}{dt}\right|_{(18)}\le-|x|^2+2bn|x|\cdot\gamma(x)|x|\le-\frac{1}{2}|x|^2$$

в той области, где $\gamma(x)\le 1/(4bn)$. Кроме того, из (9) имеем $V(0)=0, V(x)>0$ при $x\ne 0$. Следовательно, $V(x)$ – функция Ляпунова для системы (7), и нулевое решение асимптотически устойчиво по об асимптотической устойчивости (см. параграф 2 настоящего пособия). Доказательства утверждений 2) и 3) можно найти, например, в [17, 50].

Рассмотрим следующий пример. Исследуем устойчивость положения равновесия $x=0$, $y=0$ системы

$$\begin{cases}\dot{x}=-x+y+2x^4-y^6,\\ \dot{y}=x-3y+11y^4.\end{cases}$$

(3.13)

Нелинейные члены удовлетворяют условиям теоремы об устойчивости по первому приближению. Рассмотрим системy первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases} \tag{3.14}$$

Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -1-k & 1 \\ 1 & -3-k \end{vmatrix} = 0.$$

Оно имеет отрицательные корни $k_1 = -2 + \sqrt{2}$, $k_2 = -2 - \sqrt{2}$. Следовательно, на основании теоремы об устойчивости по первому приближению положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ систем (13) и (14) асимптотически устойчиво.

Далее, в качестве примера рассмотрим уравнение колебания маятника

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\sin x = 0. \tag{3.15}$$

Здесь $x -$ угол отклонения маятника от вертикали.Уравнению (15) соответствует система

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ax - b\sin x. \end{cases} \tag{3.16}$$

Положениями равновесия системы (16) являются точки

$$x = k\pi \quad (k \text{ целое}), \quad y = 0. \tag{3.17}$$

Исследуем на устойчивость точку $x = 0$, $y = 0$, получающуюся из (17) при $k = 0$. Используя разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

запишем систему первого приближения

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -bx - ay, \end{cases}$$

(3.18)

характеристическое уравнение которой

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

(3.19)

Если $a > 0$, $b > 0$, то корни уравнения (5.15) имеют отрицательные вещественные части, и, следовательно, положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ устойчиво по первому приближению.

Исследуем на устойчивость точку $(\pi, 0)$, что соответствует $k=1$. Используя разложение

$$\sin x = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{3!} - \ldots$$

и переноса начало координат в точку $x=\pi,\ y=0$, получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = bx - ay. \end{cases} \tag{3.20}$$

Характеристическое уравнение для (20) имеет вид

$$\lambda^2 + a\lambda - b = 0. \tag{3.21}$$

При $a>0,\ b>0$ корни этого уравнения будут действительными и разных знаков. Следовательно, точка $(\pi, 0)$ является неустойчивой точкой для системы (20).

Далее рассмотрим следующий пример исследования устойчивости. Требуется провести анализ устойчивости положения равновесия $x=0,\ y=0$ системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x\,f(x, y), \\ \dot{y} = -x - y\,f(x, y), \end{cases}$$

(3.22)

где функция $f(x,y)$ разлагается в сходящийся степенной ряд $f(0,0)=0$.

Линеаризованная система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

(3.23)

Характеристическое уравнение системы (23)

$$\begin{vmatrix} -k & 1 \\ -1 & -k \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad k^2 + 1 = 0 \tag{3.24}$$

имеет чисто мнимые корни $k_{1,2} = \pm i$. Точка покоя (0, 0) системы первого приближения (23) устойчива (центр). Так как действительные части корней характеристического уравнения (24) равны нулю, то согласно замечанию вопрос об устойчивости точки покоя (0, 0) требует дополнительного исследования. Для исследования на устойчивость нулевого решения (0, 0) системы (22) применим второй метод Ляпунова. Выберем $V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, затем найдем

$$\frac{dV}{dt} = -(x^2 + y^2)\, f(x, y).$$

Если $f(x, y) \geq 0$ в достаточно малой окрестности начала координат, то точка покоя (0, 0) устойчива; если $f(x, y)$ – положительно определенная функция в некоторой окрестности начала координат, то точка покоя (0, 0) асимптотически устойчива; если $f(x, y) < 0$ в достаточно малой окрестности начала координат, то точка покоя (0, 0) неустойчива. Этот пример иллюстрирует тот факт, что в некоторых случаях нельзя судить об устойчивости точки покоя по первому приближению.

Существуют алгебраические критерии устойчивости линейных систем, которые удобно использовать в задачах устойчивости. Некоторые алгебраические критерии рассмотрены в §5 настоящего пособия.

§ 4. Методы исследования устойчивости по Жуковскому

4.1. Необходимые и достаточные условия устойчивости по Жуковскому. Устойчивость по Жуковскому будем изучать с помощью ортогональной репараметризации. Указанная ортогональная репараметризация существует для C^2-гладкой системы дифференциальных уравнений, определенной на ограниченном множестве евклидова пространства R^n, если на замыкании множества отсутствуют состояния равновесия. Установление условий существования ортогональной репараметризации позволило развить метод исследования устойчивости по Жуковскому траекторий с помощью уравнений в вариациях Н.Е. Жуковского [21]. Этот метод является распространением метода исследований ляпуновской устойчивости с помощью уравнений в вариациях Пуанкаре на случай исследования устойчивости по Жуковскому.

Рассмотрим C^2-гладкую систему дифференциальных уравнений, которую запишем в виде уравнения в векторной форме

$$\frac{dx}{dt} = g(x),\ \ g \in C^2(X \to R^n),\ g(x) \neq 0, \quad \forall x \in \bar{X}\ , \tag{4.1}$$

где $X \subset R^n$ – ограниченное множество, на замыкании которого уравнение (1) не имеет состояний равновесия.

Ортогональная репараметризация $h(t)$ полутраекторий $C^+(p)$ уравнения (1) позволяет определить новое расстояние между изображающими точками невозмущенной полутраектории $C^+(p)$ и возмущенной полутраектории $C^+(q)$ рассматриваемой дифференциальной системы, причем функция $h(t)$ принадлежит множеству Σ_{t_0} и обеспечивает ортогональность полутраектории $C^+(p)$ и вектора $\varphi(h(t), q) - \varphi(t, p)$.

В качестве расстояния примем длину

$$r_{\varphi,h}(t, p, q) ::= |\varphi(h(t), q) - \varphi(t, p)| \tag{4.2}$$

вектора $y(t) ::= \varphi(h(t), q) - \varphi(t, p)$, ортогонального к полутраектории $C^+(p)$ в точке $\varphi(t, p)$, где функция $h: R^+_{t_0} \to R^+_{t_0},\ h(t_0) = t_0$, является нетождественным гомеоморфизмом $R^+_{t_0}$ на себя такой, что при всех значениях $t \geq t_0$ выполняется условие

$$y^*(t)\, g(\varphi(t, p)) = 0. \tag{4.3}$$

Имеет место следующее утверждение [21].

Предложение 4.1. *Пусть* 1) $f(x): X \to R^n$ *– функция класса* C^2 *на ограниченном множестве* $X \subset R^n$ *такая, что*

$$f^*(x)\, g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{X}\,, \tag{4.4}$$

2) $\varphi(t, p)$ $\forall t \in R_{t_0}^{+}$, $\varphi(t_0, p) = p$, *– решение уравнения* (1). *Тогда для любого числа* $\tau > 0$ *существует число* $\delta = \delta(\tau, t_0) > 0$ *такое, что для каждой точки* $q \in B_\delta(p)$ *имеется скалярная функция* $h(t) \in \Sigma_\tau$, *для которой при всех* $t \in [t_0, t_0+\tau)$ *выполнено*

$$y^*(t)\, f(\varphi(t, p)) = 0. \tag{4.5}$$

Из предложения 4.1 вытекает, что при $f(x) \equiv g(x)$ на конечном отрезке времени можно измерять расстояние между близкими в начальный момент полутраекториями при помощи длины перпендикуляра, основание которого непрерывно движется по одной из полутраекторий.

Предложение 4.2. *Пусть полутраектория* $C^{+}(p)$ *решения* $\varphi(t, p)$, $\varphi(t_0, p) = p$, *уравнения* (1) *устойчива в смысле Жуковского. Тогда существует число* $\delta = \delta(t_0) > 0$ *такое, что для каждой точки* $q \in B_\delta(p)$ *имеется параметризация* $h(t) \in \Sigma_{t_0}$, *для которой имеет место соотношение*

$$y^*(t)\, g(\varphi(t, p)) = 0 \quad \forall t \geq t_0. \tag{4.6}$$

Действительно, на основании предложения 4.1 возможно определить число $\delta_1 > 0$ такое, для которого существует функция $h(t)$, удовлетворяющая (10) при $t \in [t_0, t_0+\tau]$. В силу свойства устойчивости по Жуковскому полутраектории $C(p)$ уравнения (1) существует такое число $\delta > 0$, что

$$\|\varphi(h_1(t), q) - \varphi(h_2(t), p)\| < \delta_1 \quad \forall t \geq t_0, \tag{4.7}$$

при некоторых $h_1, h_2 \in \Sigma_{t_0}$ и произвольной точки $q \in B_{\delta_1}(p)$. Рассмотрим возмущенное движение $\varphi(t, q)$ уравнения (1), где $q \in B_\delta(p)$. Имеем

$$\left\| \varphi\left(h_1\left(h_2^{-1}(t_0+\tau)\right),\ q\right) - \varphi\left(t_0+\tau,\ p\right) \right\| < \delta_1.$$

Положим $h(t) ::= h_1\left(h_2^{-1}(t)\right)$. Очевидно, что $h \in \Sigma_{t_0}$. Имеет место оценка

$$r_{\varphi,h}(t_0+\tau, p, q) \leq \delta_1, \tag{4.8}$$

где $r_{\varphi,h}(t, p, q) ::= |\varphi(h(t), q) - \varphi(t, p)|$.

По предложению 4.1 из неравенства (8) следует, что параметризация $h(t)$ может быть построена на отрезке $[t_0, t_0+2\tau]$. Так как (7) выполняется при всех $t \geq t_0$, то для правого конца промежутка имеем

$$r_{\varphi,h}\,\varphi((t_0+2\tau, p), C^+(q)) < \delta_1.$$

Поэтому можно продолжить построение $h(t)$ и, значит, $r_{\varphi,h}$ на отрезок $[t_0, t_0+3\tau]$. Аналогичным образом можно построить функцию $h(t)$ со свойством (6) для всех значений $t\in[t_0, \infty)$ и тем самым определить расстояние $r_{\varphi,h}$ соотношением (2) на множестве $R^+_{t_0}$. Таким образом, предложение 4.2 доказано.

Предложение 4.3. *Для того чтобы полутраектория* $C^+(p)$ *решения* $\varphi(t, p)$, $t\in R^+_{t_0}$, $\varphi(t_0, p) = p$, *уравнения* (1) *была* 1) *устойчивой по Жуковскому, необходимо и достаточно, чтобы* а) *для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существовало число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для каждой точки* $q\in B_\delta(p)$ *функция* $r_{\varphi,h}(t, p, q)$ *определена при всех* $t\in R^+_{t_0}$ *и выполнено неравенство* $r_{\varphi,h}(t, p, q) < \varepsilon$ $\forall t \geq t_0$; 2) *асимптотически устойчивой по Жуковскому, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено вышеуказанное условие* а) *и условие* б) *существует число* $\Delta > 0$ *такое, что* $r_{\varphi,h}(t, p, q) \to 0$, $t \to \infty$, $\forall q\in B_\Delta(p)$.

Действительно, необходимость следует из предложении 4.2. Достаточность вытекает из определения 1.12 параграфа 1 настоящего пособия.

Предложение 4.4. *Для того чтобы полутраектория* $C^+(p)$ *решения* $\varphi(t, p)$, $t\in R^+_{t_0}$, $\varphi(\tau, p) = p$, *уравнения* (1) *была неустойчивой по Жуковскому, необходимо и достаточно выполнение условия*: *существует число* $\varepsilon > 0$, *при котором для любого числа* $\delta > 0$ *найдется точка* $q\in B_\delta(p)$ *такая, что при некотором значении* $\bar{t} \geq t_0$ *будет выполнено неравенство* $r_{\varphi,h}(\bar{t}, p, q) > \varepsilon$.

Справедливость предложения 4 .4 следует из предложения 4.3 и того факта, что свойство неустойчивости полутраектории является отрицанием свойства ее устойчивости.

Из предложений 4.3, 4.4 вытекает, что определения различных типов устойчивости по Жуковскому можно сформулировать следующим образом.

Определение 4.1. Полутраектория $C^+(p)$ решения $\varphi(t, p)$, $t\in R^+_\tau$, $\varphi(\tau, p) = p$, уравнения (1) произвольного класса гладкости называется 1) *устойчивой по Жуковскому*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждой точки $q \in B_\delta(p)$ существует функция $r_{\varphi,h}$, определенная на R^+_τ, и при каждом $t \in R_\tau^+$ выполнено неравенство $r_{\varphi,h}(t, p, q) < \varepsilon \quad \forall t \geq \tau$, 2) *асимптотически устойчивой по Жуковскому*, если она устойчива по Жуковскому и существует $\Delta > 0$ такое, что $r_{\varphi,h}(t, p, q) \to 0, \quad t \to +\infty, \quad \forall q \in B_\Delta(p)$, 3) *неустойчивой по Жуковскому*, если она не является устойчивой по Жуковскому.

Так как функция (2) есть норма вектор-функции $y(t)$, то условия 2) вышеприведенного определения являются условиями асимптотической устойчивости в смысле Ляпунова нулевого решения некоторого вспомогательного уравнения. Производная от h по t может быть представлена в виде

$$\frac{dh}{dt} = 1 - \left[g^*(\varphi_1(t))\, f(\varphi_1(t)) \right]^{-1} \Bigg[g^*(\varphi_1(t)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi_1(t)) \right)^* +$$

$$+ f^*(\varphi_1(t)) \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi_1(t)) \Bigg] y(t) + O\left(|y(t)|^2 \right), \qquad (4.9)$$

С помощью равенства (7) при $f(x) = g(x)$ нетрудно показать, что производная $\dot{y}(t)$ вектор-функции $y(t)$ в силу уравнения (1) при условии (3) равна

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y + R(t, y), \qquad (4.10)$$

где матрица $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t, p)) - \left| g(\varphi(t, p)) \right|^{-2} g(\varphi(t, p))\, g^*(\varphi(t, p)) \times$$

$$\times \left[\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t, p)) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(\varphi(t, p)) \right)^* \right], \qquad (4.11)$$

причем вектор-функция $R(t, y)$ удовлетворяет условиям вида

$$|R(t, y)| = O(|y(t)|^2), \quad g^*(\varphi(t, p))R(t, y(t)) \equiv 0. \qquad (4.12)$$

Так как $|y(t)| = r_{\varphi,h} = \rho(\varphi(t, q), C^+(p))$, то из асимптотической устойчивости нулевого решения $y = 0$ уравнения (10) вытекает в силу вышеприведенного определения асимптотическая устойчивость по Жуковскому полутраектории $C^+(p)$ уравнения (1), если только начальные значения (t_0, p) возмущенных решений удовлетворяют свойству $y^*(t_0)g(p) = 0$.

Для асимптотической устойчивости по Жуковскому полутраектории $C^+(p)$ уравнения (1) достаточно, чтобы нулевое решение $y = 0$ линейного уравнения $dy/dt = A(t)y$ было экспоненциально устойчивым, если только выполнено условие $y^*(t)g(\varphi(t, p)) \equiv 0$ при всех значениях $t \geq t_0$ [21, 46].

4.2. Уравнение в вариациях. Обозначим через $\varphi(t, p)$, $t \in R^+_{t_0}$, решение уравнения (1), проходящее через точку $p \in X$, а через $\varphi(t, q)$ – решение уравнения (1), проходящее через точку q в момент времени t, $t \in R^+_{t_0}$. Движение, описываемое первым решением, назовем *невозмущенным* (*базовым*), а движение, описываемое вторым решением – *возмущенным* (*окольным*).

Обозначим через $h(t)$ репараметризацию времени в уравнении (1), где $h: R^+_{t_0} \to R^+_{t_0}$, $h(t_0) = t_0$, – нетождественный гомеоморфизм $R^+_{t_0}$ на себя такой, что $y^* g(\varphi(t, p)) = 0$ для любого $t \geq t_0$ и $y(t) ::= \varphi(h(t), q) - \varphi(t, p)$ – вектор, ортогональный к полутраектории $C^+(p)$ в точке $\varphi(t, p)$.

Из предложения 4.1 вытекает, что дифференциальное уравнение для вектора возмущения $y(t)$ можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = g\big(\varphi\big(h(t), q\big)\big)\dot{h}(t) - g\big(\varphi(t, p)\big). \tag{4.13}$$

После преобразований уравнение (13) примет вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\big|g\big(\varphi(t, p)\big)\big|^2 - g^*\big(\varphi(t, p)\big)\big(Dg\big(\varphi(t, p)\big)\big)^* y(t)}{g^*\big(\varphi\big(h(t), q\big)\big) g\big(\varphi(t, p)\big)} \times$$

$$\times g\big(\varphi\big(h(t), q\big)\big) - g\big(\varphi(t, p)\big). \tag{4.14}$$

Обозначив правую часть уравнения (14) через $\Phi(t, y)$, получим

$$\frac{dy}{dt} = \Phi(t, y). \tag{4.15}$$

Уравнение (15) назовем *уравнением возмущенной полутраектории*, соответствующим разности $\varphi(h(t), q) - \varphi(t, p)$ возмущенного репараметризованного движения $\varphi(h(t), q)$ и базового движения $\varphi(t, p)$.

Предполагается, что правая часть (15) определена на множестве $R^+ \times D$, $D \subset R^n$, и решение $y = \psi(t)$, удовлетворяющее условию $\psi(t_0) = q - p$, не выходит из области D.

Разлагая правую часть в ряд Тейлора, запишем уравнение (15) в виде

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + R(t, y), \quad y^* g\big(\varphi(t, p)\big) = 0, \tag{4.16}$$

где

$$A(t) ::= A(\varphi(t, p)), \tag{4.17}$$

причем оператор $A(x)$ определяется следующим образом: $A(x) ::= g_x - |g|^{-2} \times \times g g^* [g_x + g_x^*]$. Линейной части уравнения (19) соответствует n-мерное линейное неавтономное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = A(t)\, y \qquad (4.18)$$

с учетом условия, что вектор y перпендикулярен вектору $g(\varphi(t, p))$:

$$y^* g(\varphi(t, p)) = 0, \quad y^* = (y_1, \ldots, y_n)^*. \qquad (4.19)$$

Нелинейный член в уравнении (16) удовлетворяет условиям

$$|R(t, y)| = O(|\, y\,|^2), \qquad (4.20)$$

$$g^*(\varphi(t, p)) R(t, y(t)) \equiv 0. \qquad (4.21)$$

Равенство (21) следует из того, что нелинейное уравнение (19) и линейное уравнение (18) обладают первым интегралом вида $y^* g(\varphi(t, p)) = \mathrm{const}$.

Линейное n-мерное уравнение (18) при условии (19) наывается *уравнением в вариациях Жуковского* вдоль движения $\varphi(t, p)$ относительно репараметризации $h(t)$.

4.3. Принцип сведения. Рассмотрим дифференциальное уравнение (1) и уравнение возмущенной полутраектории (15). Сформулируем предложение, сущность которого состоит в установлении принципа сведения задачи об устойчивости по Жуковскому к задаче об устойчивости по Ляпунову.

Предложение 4.5. *Пусть* $\psi(t)$ *есть решение уравнения* (15) *с начальным условием* $\psi(t_0) = q - p$. *Если траектория* $C^+(p)$ *уравнения* (1) *устойчива* (*соответственно асимптотически устойчива неустойчива*) *по Жуковскому*, *то решение* $\psi(t)$ *уравнения* (15) *возмущенной траектории устойчиво по Ляпунову* (*соответственно асимптотически устойчиво*, *неустойчиво по Ляпунову*). *И обратно*, *если решение* $\psi(t)$ *уравнения* (15) *возмущенной траектории устойчиво* (*соответственно асимптотически устойчиво, неустойчиво*) *по Ляпунову*, *то траектория* $C^+(p)$ *уравнения* (1) *устойчива* (*соответственно асимптотически устойчива, неустойчива*) *по Жуковскому*.

Действительно, предложение 4.5 следует из определений устойчивости по Ляпунову и устойчивости по Жуковскому, а также из равенства $r_{\varphi,h}(t, p, q) = y(t)$ и предложений 4.1 и 4.2.

Следствием предложения 4.5 является

Предложение 4.6. *Пусть* 1) *состояние равновесия* $y = 0$ *нелинейного уравнения* (16) *устойчиво* (*соответственно асимптотически устойчиво, неустойчиво*) *по Ляпунову*, 2) *начальные данные удовлетворяют условию* $y^*(t_0)g(\varphi(t_0, p)) = 0$. *Тогда полутраектория* $C^+(p)$ *решения* $\varphi(t, p)$, $t \in R^+_{t_0}$, *уравнения* (1) *устойчива* (*соответственно асимптотически устойчива, неустойчива*) *по Жуковскому*.

Рассмотрим теперь другую репараметризацию $H(t)$ на возмущенной траектории $C^+(q)$ такую, что

$$(\varphi(H(t), q) - \varphi(t, p))^* f(\varphi(t, p)) \equiv 0, \tag{4.22}$$

где $f : X \to R^n$ – некоторая дважды дифференцируемая функция такая, что $f^*(x)g(x) \neq 0 \quad \forall x \in X$. По предложению 4.2 существует репараметризация $H(t)$ со свойством

$$f^*(x)g(x) \neq 0 \quad \forall x \in \bar{X}, \tag{4.23}$$

причем $H(t)$ может быть построена для всех движений $\varphi(t, q)$ с начальными точками q, достаточно близкими к точке p на любом временном отрезке $[t_0, t_0+\tau]$ длины τ. Репараметризованному возмущенному движению $\varphi(H(t), q)$ поставим в соответствие скалярную функцию $r_{\varphi,H}(t, p, q) ::= |\varphi(H(t), q) - \varphi(t, p)|$, которая соответствует расстоянию между изображающей точкой $\{\varphi(t, p)\}$ невозмущенной полутраектории $C^+(p)$ и возмущенной полутраекторией $C^+(q)$. Аналогично заменой $u = \varphi(H(t), q) - \varphi(t, p)$ получим нелинейное уравнение возмущенной траектории

$$\frac{du}{dt} = F(t, u), \tag{4.24}$$

являющееся аналогом уравнения (15). Обозначим через $\psi^*(t)$ решение уравнения (24) с начальным условием $\psi^*(t_0) = q - p$.

Предложение 4.7 (обобщение принципа сведения). *Пусть решение* $\psi^*(t)$ *уравнения* (24) *устойчиво* (*соответственно асимптотически устойчиво, неустойчиво*) *по Ляпунову. Тогда траектория решения* $\varphi(t) = \varphi(t, p)$, $t \in R^+_{t_0}$, *уравнения* (1) *устойчива* (*асимптотически устойчива, неустойчива*) *по Жуковскому. И обратно, пусть траектория решения* $\varphi(t)$ *уравнения* (1) *устойчива* (*соответственно асимптотически устойчива, неустойчива*) *по Жуковскому. Тогда ре-*

шение $\psi^*(t)$ *уравнения* (24) *устойчиво* (*соответственно асимптотически устойчиво*, *неустойчиво*) *по Ляпунову*.

Доказательство предложения 4.7 вытекает из предложения 4.5 и соотношений (22), (23).

Разлагая правую часть уравнения (24) в ряд Тейлора, получим

$$\frac{du}{dt} = B(t)u + R(t,u), \quad B(t) ::= B\big(\varphi(t,p)\big), \tag{4.25}$$

$$u^* f(\varphi(t, p)) = 0, \tag{4.26}$$

где матрица $B(x)$ имеет вид

$$B(x) ::= \frac{\partial g}{\partial x}(x) - \left[g^*(x) f(x)\right]^{-1} g(x) \times \left[f^*(x)\frac{\partial g}{\partial x}(x) + g^*(x)\frac{\partial f^*}{\partial x}(x)\right], \tag{4.27}$$

а функция R удовлетворяет условиям (20), (21).

Линейное n-мерное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{du}{dt} = B(t)u, \tag{4.28}$$

$$u^* f(\varphi(t, p)) = 0, \tag{4.29}$$

называется *уравнением в вариациях Жуковского относительно репараметризации* $H(t)$.

При $f(x) \equiv g(x)$ уравнение (28) совпадает с уравнением в вариациях (18), поскольку в этом случае $A(x) \equiv B(x)$ для любого $x \in X$.

Следствием предложения 4.7 является

Предложение 4.8. *Пусть* 1) *состояние равновесия* $u = 0$ *нелинейного уравнения* (24) *устойчиво* (*соответственно асимптотически устойчиво*, *неустойчиво*) *по Ляпунову*, 2) *начальные данные удовлетворяют условию* $u^*(t_0)\, g(\varphi(t_0, p)) = 0$. *Тогда полутраектория решения* $\varphi(t, p)$, $t \in R^+_{t_0}$, *уравнения* (1) *устойчива* (*соответственно асимптотически устойчива*, *неустойчива*) *по Жуковскому*.

Нетрудно показать, что расстояния $r_{\varphi,h}$ и $r_{\varphi,H}$ топологически эквивалентны. Действительно, расстояния $r_{\varphi,h}$ и $r_{\varphi,H}$ обладают следующим свойством:

$$\exists c > 0 \;\; r_{\varphi,h}(t, p, q) \le r_{\varphi,H}(t, p, q) \le c r_{\varphi,h}(t, p, q),$$

где c определяется равенством

$$c = \frac{\min\left(g^*(x) f(x)\right)}{\max\left(|g(x)| \cdot |f(x)|\right)},$$

где минимум и максимум вычисляются для точек $x \in \overline{X}$. Топологическая эквивалентность норм $r_{\varphi,h}$ и $r_{\varphi,H}$ показывает, что характер устойчивости по Жуковскому невозмущенной траектории не зависит от выбора нормальной репараметризации. Указанный факт дает основание называть уравнения в вариациях при различном выборе нормальной репараметризации просто *уравнением в вариациях Жуковского относительно невозмущенной траектории* (не указывая используемую репараметризацию).

4.4. Условия устойчивости по первому приближению. Рассмотрим далее вопрос о редукции n-мерного уравнения в вариациях Жуковского к эквивалентному (n–1)-мерному уравнению. В силу наличия первого интеграла $y^* g(\varphi(t, p)) = \text{const}$ порядок уравнения в вариациях Жуковского (18) можно понизить на единицу. Поэтому n-мерное линейное уравнение (18) может быть сведено к (n–1)-мерному линейному уравнению вида

$$\frac{dz}{dt} = G_{\varphi,\, h}(t)\, z, \quad z \in R^{n-1}, \tag{4.30}$$

где $G_{\varphi,h}(t)$ – некоторая матричная функция, алгоритм получения которой описан ниже.

Построим матрицу $Q(x)$ размеров $(n-1)\times(n-1)$ следующим образом. В качестве столбцов этой матрицы примем ортонормированный базис, причем координаты первого столбца совпадают с координатами вектора $g(x)/|g(x)|$ (с отбрасыванием одной координаты). Легко проверить, что $Q^*(x) = Q^{-1}(x)$ и для всех y, $y^*g(x) = 0$, имеет место $Q(x)y = (0, z)^*$, $z \in R^{n-1}$. Кроме того, имеем $Q^*(x)g(x) = (|g(x)|, 0, ..., 0)^*$.

Используем в (18) замену

$$\overline{z} = Q^*\big(\varphi(t, p)\big)\, y, \quad \overline{z} \in R^n. \tag{4.31}$$

Имеем

$$\frac{d\overline{z}}{dt} = Q^*\big(\varphi(t,\, p)\big) A\big(\varphi(t,\, p)\big) Q\big(\varphi(t,\, p)\big) - Q^*\big(\varphi(t,\, p)\big) \frac{d}{dt} Q\big(\varphi(t,\, p)\big) \overline{z}\,,$$

$$\overline{z}^* \Big[Q^*\big(\varphi(t,\, p)\big)\, g\big(\varphi(t,\, p)\big) \Big] = 0. \tag{4.32}$$

Соотношение (32) выполняется тогда и только тогда, когда вектор $\overline{z}$ представим в виде $\overline{z} = (0, z)^*$, $z \in R^{n-1}$.

Легко показать, что $(n\times n)$-матрица уравнения (18) представима следующим образом: первый столбец – вектор $a(\varphi(t, p)) = \big(a_1(\varphi(t, p)),\ a_2(\varphi(t, p)),\ ...,\ a_n(\varphi(t, p))\big)^*$, оставшаяся подматрица содержит нулевую строку и матрицу $D\big(\varphi(t, p)\big)$ размеров $(n-1)\times(n-1)$. Поэтому уравнение (18) равносильно $(n-1)$-мерному линейному уравнению (30): если $y = y(t)$ есть решение n-мерного уравнения (18), то $z = z(t)$ есть решение $(n-1)$-мерного уравнения (30). И обратно, если $z = z(t)$ – решение уравнения (30), то $y(t) = Q(\varphi(t, p))(0, z(t))^*$ есть решение уравнения (18).

Итак, $(n-1)$-мерное уравнение (30) и n-мерное уравнение (18) в вариациях Жуковского эквивалентны, причем $G_{\varphi,h}(t) \equiv D\big(\varphi(t, p)\big)$.

Аналогично можно показать, что линейное n-мерное уравнение (28) при условии (29) может быть редуцировано к эквивалентному $(n-1)$-мерному линейному уравнению

$$\frac{dz}{dt} = G_{\varphi,H}(t)\,z, \quad z \in R^{n-1}, \tag{4.33}$$

где $G_{\varphi,H}$ – некоторая непрерывная матрица размеров $(n-1)\times(n-1)$.

Для изучения устойчивости по Жуковскому по первому приближению рассматривается задача о сохранении заданного свойства при малых возмущениях. Имеются различные постановки задачи о сохранении заданного свойства (см. [21]) линейного неавтономного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = C(t)\,x. \tag{4.34}$$

Наряду с уравнением (34) рассматривается возмущенное линейное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \big(C(t) + D(t)\big)\,x. \tag{4.35}$$

Свойство P уравнения (34) называется *сохраняемым относительно возмущений* $D(t)x$, *обладающих свойством* Q, если свойством P обладает уравнение (35).

Введем аналог данного определения для нелинейных возмущений определенного типа Q. Наряду с уравнением (34) рассмотрим возмущенное нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = C(t)\,x + R(t, x). \tag{4.36}$$

Свойство P уравнения (34) называется *сохраняемым относительно нелинейных возмущений типа* T, если этим свойством обладает уравнение (36) для всякого нелинейного возмущения типа T. В частности, при возмущениях типа $R(t, x) = O(|x|^2)$ равномерно по t свойство P уравнения (39) будем называть *сохраняемым*.

Предложение 4.9. *Пусть* 1) *состояние равновесия* $z = 0$ $(n-1)$-*мерного уравнения в вариациях Жуковского* (30) *относительно ограниченного решения* $\varphi(t, p)$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову*, 2) *свойство асимптотической устойчивости состояния равновесия* $z = 0$ *уравнения* (30) *сохраняемо*. *Тогда траектория решения* $\varphi(t, p)$ *уравнения* (1) *асимптотически устойчива по Жуковскому*.

С помощью предложения 4.9 и известных результатов о сохранении свойств устойчивости (неустойчивости) по Ляпунову при нелинейных возмущениях можно получить условия устойчивости (неустойчивости) по Жуковскому по первому приближению.

В частности, если состояние равновесия $z = 0$ уравнения в вариациях Жуковского (45) относительно ограниченного решения $\varphi(t, p)$ уравнения (1) экспоненциально устойчиво по Ляпунову, то траектория решения $\varphi(t, p)$ уравнения (1) асимптотически устойчива по Жуковскому.

Относительно неустойчивости можно сформулировать следующие условия: если 1) состояние равновесия $z = 0$ уравнения в вариациях Жуковского (30) относительно ограниченного решения $\varphi(t, p)$ уравнения (1) неустойчиво по Ляпунову, 2) существует решение уравнения (30), которое примыкает $t \to -\infty$ к состоянию равновесия. Тогда полутраектория решения $\varphi(t, p)$ уравнения (1) неустойчива по Жуковскому.

В предложении 4.9 использовано расстояние $r_{\varphi,h}$. Аналогичным образом формулируются условия устойчивости, где фигурирует расстояние $r_{\varphi,H}$.

В настоящем параграфе рассмотрена устойчивость по Жуковскому для автономного уравнения (1). Результаты, полученные здесь, справедливы и для неавтономного уравнения $dx/dt = g(t, x)$, если на правую часть $g(t, x)$ наложить ряд ограничений.

4.5. Конкретизация условий устойчивости. В настоящем разделе изучаются условия устойчивости по Жуковскому траекторий нелинейной системы уравнений второго порядка на основе устойчивости по Ляпунову линейного неавтономного дифференциального уравнения. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= 2a(x_1, x_2)\dot{x}_2 + U_{x_1}(x_1, x_2), \\ \ddot{x}_2 &= -2a(x_1, x_2)\dot{x}_1 + U_{x_2}(x_1, x_2), \end{aligned} \tag{4.37}$$

где $a(x_1, x_2)$ и $U(x_1, x_2)$ – заданные функции от x_1 и x_2, U_{x_i} – частная производная от U по x_i, $i = 1, 2$.

К системам вида (37) приводят различные задачи небесной механики и космодинамики. Например, к таким задачам принадлежат: классическая задача двух сферических тел; задача двух неподвижных центров и третьей подвижной точки; ограниченная круговая задача трех тел; задача движения точки под действием нескольких материальных колец и двух точек, движущихся по кругам вокруг общего центра инерции; ограниченная круговая задача трех тел в гравитирующей среде; задача движения точки внутри гравитирующего кольца типа кольца Сатурна и другие задачи [53, 58, 91].

Пусть $x_i = \varphi_i(t)$, $i = 1, 2$, – решение системы (37), не являющееся состоянием равновесия. Уравнения системы (1) для решения $x_i = \varphi_i(t)$, определяющие возмущение $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$, имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 - 2a[t]\dot{y}_2 &= \sum_{i=1}^{2} A_i(t) y_i, \\ \ddot{y}_2 + 2a[t]\dot{y}_1 &= \sum_{i=1}^{2} B_i(t) y_i, \end{aligned} \tag{4.38}$$

где $a[t] ::= a(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, а коэффициенты $A_i(t)$ и $B_i(t)$ определяются соотношениями

$$\begin{aligned} A_1(t) &= U_{x_1 x_1}[t] + 2a_{x_1}[t]\dot{\varphi}_2, \quad A_2(t) = U_{x_1 x_2}[t] + 2a_{x_2}[t]\dot{\varphi}_2, \\ B_1(t) &= U_{x_2 x_1}[t] - 2a_{x_1}[t]\dot{\varphi}_1, \quad B_2(t) = U_{x_2 x_2}[t] - 2a_{x_2}[t]\dot{\varphi}_1, \end{aligned}$$

где аргумент $[t]$ функции означает, что эта функция вычислена при значениях $x_1 = \varphi_1(t)$, $x_2 = \varphi_2(t)$.

Система линейных уравнений (38) представляет собой систему Якоби. Эта система обладает первым интегралом вида

$$\dot{\varphi}_1(t)\dot{y}_1 + \dot{\varphi}_2(t)\dot{y}_2 - U_{x_1}[t]y_1 - U_{x_2}[t]y_2 = h = \mathrm{const}. \tag{4.39}$$

Очевидно, что

$$x_i = \varphi_i(t) + y_i \tag{4.40}$$

будут решениями системы (1) с точностью до членов второго порядка относительно y_1 и y_2 тогда и только тогда, когда функции y_i являются решениями системы уравнений (38). Поэтому $y_i = \delta x_i$ и интеграл (39) уравнений (38) может быть получен из интеграла кинетической энергии системы (37)

$$\frac{1}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2\right) - U(x_1, x_2) = c_1, \tag{4.41}$$

если положить $h = \delta c_1$.

Предположим, что

$$\dot{\varphi}_1(t)\dot{y}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)\dot{y}_2(t) - U_x[t]y_1(t) - U_y[t]y_2(t) = 0 \quad \forall t. \tag{4.42}$$

С учетом (42) постоянная интегрирования h, фигурирующая в (39), определенная начальными значениями решения $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ уравнения (38), равна нулю.

Если решение $x = \varphi(t)$ подставить в (37) и в (41) и результаты подстановки продифференцировать по t, то получим (38) и (42), где y_i представлены с через $\dot{\varphi}_i(t)$, т.е.

$$y_i = \dot{\varphi}_i(t), \quad i = 1, 2. \tag{4.43}$$

Поэтому величины $y(t)$ являются изоэнергетическими возмущениями величин $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2$. Так как решение $x_i = \varphi_i(t)$ системы (1) не является состоянием равновесия, то решение (43) уравнений Якоби (38) не равно нулю тождественно. Следовательно, всегда возможно выбрать начало $t = 0$ на t-оси так, что для изучаемого решения $x_i = \varphi_i(t)$ будем иметь

$$\varphi_i(0) \neq 0, \quad \dot{\varphi}_i(0) \neq 0, \; i = 1, 2. \tag{4.44}$$

Поскольку (39) является интегралом уравнений (38), то возмущение, определенное начальными данными

$$y_i(0), \; \dot{y}_i(0), \quad i = 1, 2, \tag{4.45}$$

является изоэнергетическим возмущением тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\dot{\varphi}_1(0)y_1(0) + \dot{\varphi}_2(0)\dot{y}_2(0) - U_{x_1}[0]y_1(0) - U_{x_2}[0]y_2(0) = 0. \tag{4.46}$$

Из (44) и (46) вытекает, что множество изоэнергетических возмущений решения $\varphi(t)$ зависит лишь от трех постоянных, фигурирующих в (45).

Проекция $z(t)$ возмущения $y(t) = (y_1(t), y_2(t))$ на ориентированную нормаль к графику решения $x_i = \varphi_i(t)$ при фиксированном значении t определяется формулой

$$z(t) = \frac{-\dot{\varphi}_2(t)}{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t)} y_1(t) + \frac{\dot{\varphi}_1(t)}{\sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t)}} y_2(t). \qquad (4.47)$$

Определение 4.2. Скалярная функция $z = z(t)$ называется *ортогональным возмущением* решения $x_i = \varphi_i(t)$ системы (37), если существует по крайней мере одно решение $y_i = y_i(t)$ системы уравнений (38) такое, что функция $z(t)$ представима в виде (47).

Рассмотрим функцию

$$u = u(t) ::= \dot{\varphi}_1(t) y_2(t) - \dot{\varphi}_2(t) y_1(t), \qquad (4.48)$$

связанную с $z = z(t)$ соотношением

$$u = \left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2\right)^{1/2} z, \quad \dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_1(t), \quad \dot{\varphi}_2 = \dot{\varphi}_2(t). \qquad (4.49)$$

Предложение 4.10. *Любое ортогональное возмущение* $z(t) = \left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2\right)^{-1/2} \times \times u(t)$ *решения* $(\varphi_1(t), \varphi_1(t))$ системы (1) *является решением линейного дифференциального уравнения второго порядка вида*

$$A(t)\ddot{u} + B(t)\dot{u} + C(t)u = 0, \qquad (4.50)$$

и обратно, любое решение $u(t)$ *уравнения* (50) *есть ортогональное возмущение решения* $(\varphi_1(t), \varphi_1(t))$ *системы* (1). *При этом коэффициенты* $A(t)$, $B(t)$ *и* $C(t)$ *уравнения* (50) *определяются формулами*

$$A(t) ::= -\frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t)\right), \qquad (4.51)$$

$$B(t) ::= \dot{\varphi}_1(t)\ddot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)\ddot{\varphi}_2(t), \qquad (4.52)$$

$$\begin{gathered} C(t) ::= 2a[t]\left(\dot{\varphi}_1(t)\ddot{\varphi}_2(t) - \dot{\varphi}_2(t)\ddot{\varphi}_1(t)\right) - \left(\ddot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t)\right) + \frac{1}{2}\left(\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t)\right) \times \\ \times \left[-4a^2[t] + U_{x_1x_1}[t] + U_{x_2x_2}[t] - \left(\dot{\varphi}_1(t)a_{x_2}[t] - \dot{\varphi}_2(t)a_{x_1}[t]\right)\right]. \end{gathered} \qquad (4.53)$$

Важно заметить, что в результате подстановки (49) в (50) получим уравнение

$$\ddot{z} + D(t)z = 0, \qquad (4.54)$$

где коэффициент $D(t)$ однозначно определен системой (1) и ее решением $x_i = \varphi_i(t)$ и определяется соотношением

$$D(t)=D_1(t)+D_2(t), \tag{4.55}$$

где

$$D_1(t)=v^{-2}(\ddot{v}v-2\dot{v}^2),\ v=\sqrt{2(U[t]+h)}, \tag{4.56}$$

$$D_2(t)=2v^{-2}\left(U_{x_1}^2[t]+U_{x_2}^2[t]\right)+4v^{-2}a[t]\left(U_{x_1}[t]\dot{\varphi}_2-U_{x_2}[t]\dot{\varphi}_1\right)-$$
$$-4a^2[t]+U_{x_1x_1}[t]+U_{x_2x_2}[t]. \tag{4.57}$$

Приведем конкретизацию определения устойчивости по Жуковскому для случая системы (37). Решение $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1,2$, системы (1) называется 1) *устойчивым по Жуковскому*, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta=\delta(\varepsilon)$ такое, что

$$|z(t_0)|<\delta\Rightarrow|z(t)|<\varepsilon,\quad \forall t\ge t_0,$$

где $z(t)$ – ортогональное возмущение решения $x_i=\varphi_i(t)$, $i=1,2$, системы (1), 2) *асимптотически устойчивым по Жуковскому*, если оно устойчиво по Жуковскому и, кроме того, имеет место

$$|z(t)|\to 0 \text{ при } t\to+\infty.$$

Отметим, что определение понятия устойчивости по Жуковскому решения $(y_1(t), y_2(t))$ с использованием ортогонального возмущения $z(t)$ равносильно понятию устойчивости по Ляпунову репараметризованного решения $(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$.

Из предложения 4.10 и определения устойчивости по Жуковскому следует, что решение $x_i = x_i(t)$, $i=1,2$, системы уравнений (1), устойчиво (асимптотически устойчиво) по Жуковскому, если решение $u(t)$ уравнения второго порядка (50) устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову.

Рассмотрим случай, когда $U(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[\omega^2(x_1^2+x_2^2)^2+h\right]$ (движение по инерции в равномерно вращающейся системе координат). Система (37) имеет вид

$$\ddot{x}_1-2\omega\dot{x}_2-\omega^2x_1=0,\ \ \ddot{x}_2+2\omega\dot{x}_1-\omega^2x_2=0. \tag{4.58}$$

Здесь $U_{x_1}=\omega^2x_1$, $U_{x_2}=\omega^2x_2$, $U_{x_1x_1}=\omega^2$, $U_{x_1x_2}=0$, $U_{x_2x_2}=\omega^2$, $D_2(t)=(\varphi_1^2+\varphi_2)\omega$. При $h>0$ все траектории уравнения (58) устойчивы по Жуковскому.

В [91] при рассмотрении уравнений кеплерова движения введена новая независимая переменная с помощью соотношения $dt/ds=r$, составлены регуляризованные дифференциальные уравнения. В [21] введены фиктивное время и обобщенная эксцентрическая аномалия как независимые переменные, записана соответствующая вариационная задача и получены условия устойчивости по Жуковскому. В рассмотренном способе исследования устойчивости по Жуковскому решений уравнений (37) не используется понятие временнóго элемента. Этот способ может быть применен не только для обычных координат, но и координат Кустаанхеймо–Штифеля (*KS*-координат) [91].

4.6. Стабилизация по Жуковскому. Пусть задана система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = g_i(x_1, \ldots, x_N), \; i = 1, \ldots, N, \tag{4.59}$$

и пусть задано решение $x_i = \varphi_i(t)$ системы (59), которое неустойчиво в смысле Ляпунова.

Произведем замену времени в системе (59)

$$dt = \mu(x_1, ..., x_N)ds, \tag{4.60}$$

где s – новая независимая переменная. Тогда система (59) примет вид

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = f_i(x_1, \ldots, x_N), \quad i = 1, \ldots, N. \tag{4.61}$$

Рассмотрим систему

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = f_i(x_1, \ldots, x_N), \; \frac{dt}{ds} = \mu(x_1, \ldots, x_N) \tag{4.62}$$

для определения функций $x(s)$ и $t(s)$.

Возникает следующий вопрос. Существует ли положительная скалярная функция $\mu(x_1,...,x_N)$, определяющая непрерывное взаимно однозначное соответствие между s и t, такая, чтобы с помощью дифференциального соотношения (60) система (59) была бы преобразована в систему (61), обладающую устойчивым в смысле Ляпунова решением

$$\psi_i(s)::= \varphi_i(t(s)), \; i = 1, ..., N.$$

Если такая скалярная функция $\mu(x_1,...,x_N)$ существует, то траектория решения $x_i = \varphi_i(t)$ системы (59) будет устойчивой в смысле Жуковского. В этом случае скалярная функция μ будет называться *стабилизирующим множителем Жуковского*, а система (62) – *стабилизированной по Жуковскому системой*.

Рассмотрим наряду с рассмотренной постановкой вторую постановку задачи о стабилизации в смысле Жуковского. Пусть задана дифференциальная система второго порядка (59) и задано решение $x_i = \varphi_i(t)$ системы (59), которое неустойчиво в смысле Ляпунова. Произведем в системе (59) как замену времени t, так и неособую замену координат

$$x_i = F_i(y_1, ..., y_N), \quad i = 1, 2, ..., N. \tag{4.63}$$

Тогда дифференциальная система (59) примет вид

$$\frac{d^2 y_i}{ds^2} = f_i(y_1, \ldots, y_N), \ i = 1, \ldots, \ N . \tag{4.64}$$

Следующий вопрос представляет интерес для приложений в задачах динамики. Существует ли положительная функция $\mu(x_1,...,x_N)$, определяющая взаимно однозначное непрерывное соответствие между s и t, такая, чтобы с помощью дифференциального соотношения (60) и замены зависимых переменных (63) система (59) была бы преобразована в систему (64), обладающую устойчивым в смысле Ляпунова решением? Если существуют скалярная неотрицательная функция $\mu(x_1, ..., x_N)$ и неособое преобразование (63), то траектория решения $x_i = \varphi_i(t)$ системы (59) будет устойчивой в смысле Жуковского. Скалярная функция $\mu(x_1,...,x_N)$ будет называться *стабилизирующим множителем,* преобразование (63) – *стабилизирующей заменой переменных*, а дифференциальная система (64) – *стабилизированной по Жуковскому системой*.

Некоторые задачи стабилизации по Жуковскому движений систем небесной механики рассмотрены в [21], с учетом взаимосвязи новых переменных с преобразованием Леви-Чивита и *KS*-преобразованием [91]. Отметим, что рассмотренный подход к стабилизации по Жуковскому наряду с *KS*-преобразованием может найти применение при численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 5. Критерии устойчивости управляемых систем

5.1. Некоторые общие понятия. В настоящем параграфе рассмотрены вопросы устойчивости по Ляпунову непрерывных систем управления. Как было отмечено в § 1 настоящего пособия, основными задачами теории управления являются задачи анализа динамических свойств автоматических систем и задачи синтеза алгоритма управления, функциональной структуры автоматической системы, реализующей этот алгоритм, а также задачи автоматического проектирования систем управления.

Автоматические системы управления применяются для решения, в частности, таких типов задач, как стабилизация, т.е. поддержание заданного режима работы, который не меняется длительное время; программное управление – управление по заранее известной программе; слежение за неизвестным задающим сигналом.

По количеству входов и выходов различают одномерные системы, у которых один вход и один выход (они рассматриваются в так называемой классической теории управления) и многомерные системы, имеющие несколько входов и/или выходов (главный предмет изучения современной теории управления).

По характеру сигналов системы могут быть а) непрерывными, в которых все сигналы – функции непрерывного времени, определенные на некотором интервале, б) дискретными, в которых используются дискретные сигналы (последовательности чисел), определенные только в отдельные моменты времени, в) непрерывно-дискретными, в которых есть как непрерывные, так и дискретные сигналы.

Для управления важно, изменяются ли характеристики объекта со временем. Системы, в которых все параметры остаются постоянными, называются стационарными, что значит «не изменяющиеся во времени». Системы, в которых параметры объекта или регулятора изменяются со временем, называются нестационарными. В §6 настоящего пособия будут рассмотрены вопросы устойчивости линейных нестационарных систем управления.

Модели реальных систем в большинстве случаев нелинейные. Методы исследования нелинейных операторов очень сложны математически, в теории нелинейных систем точные решения известны только для достаточно узкого круга задач. Поэтому сначала проводят линеаризацию нелинейной модели объекта, то есть строят приближенную линейную модель. Затем на основе этой модели проектируют закон управления, применяя точные методы теории линейных систем. Наконец, проверяют полученный регулятор с помощью компьютерного моделирования на полной нелинейной модели. Если объект или привод имеют так называемую «существенную» нелинейность, этот подход может не сработать. Тогда приходится использовать методы нелинейной теории [11, 16, 36], а также компьютерное моделирование [22].

5.2. Передаточные функции. Как отмечено выше, в теории управления при анализе и синтезе систем управления имеют дело с их математической моделью. Математическая модель представляет собой уравнения, передаточные или временные функции, которые описывают процессы, протекающие в системе управления [35].

Система уравнения и любой ее элемент производят преобразования входного сигнала $x(t)$ в выходной сигнал $y(t)$. С математической точки зрения они осуществляют отображение

$$y(t) = Ax(t),$$

согласно которому каждому элементу $x(t)$ из множества входных сигналов ставится в соответствие некоторый вполне определенный элемент $y(t)$ из множества выходных сигналов. В приведенном соотношении A называется оператором. Оператор, определяющий отображение между входным и выходным сигналами системы управления (элемента), называется оператором этой системы (элемента). Задать оператор системы – это значит задать правило определения выходного сигнала этой системы по ее входному сигналу. Далее будем рассматривать системы, операторы которых могут быть заданы с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений. Математическая модель системы управления может быть представлена в виде соединения звеньев. Звено – это математическая модель системы или любой ее части, определяемой некоторым параметром. В частном случае звено может быть математической моделью элемента.

Система или звено с одним выходом y и двумя входами u и v в общем случае описывается уравнением

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n)y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m)u + (c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l)u$$

или

$$Q(p)Y = P_1(p)u + P_2(p)u, \qquad (5.1)$$

где p обозначает оператор дифференцирования $(p^k x = x^{(k)})$,

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n,\ P_1(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m,$$
$$P_2(p) = c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l.$$

Наряду с дифференциальными уравнениями при описании линейных систем широко используются передаточные функции в операторном виде и передаточные функции в изображениях Лапласа.

Передаточной функцией в операторной форме называется отношение оператора воздействия к собственному оператору. Отметим, что дифференциальный оператор $Q(p)$ при выходной переменной называется собственным оператором, а дифференциальные операторы $P_1(p)$ и $P_2(p)$ при входных переменных u и v – операторами воздействия.

Степень полинома знаменателя передаточной функции называют порядком, а разность между ее степенями знаменателя и числителя – относительным порядком или относительной степенью передаточной функции и соответствующей ей системы.

Нулями и полюсами передаточной функции $W(p) = P(p)/Q(p)$ называют нули ее числителя и знаменателя соответственно, т.е. корни уравнения $P(p) = 0$ и $Q(p) = 0$, где p рассматривается как переменная, а не как оператор.

Система (1) определяется двумя передаточными функциями: передаточной функцией

$$W_u(p) = \frac{P_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n},$$

относительно входа u и передаточной функцией

$$W_v(p) = \frac{P_2(p)}{Q(p)} = \frac{c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}$$

относительно входа v. Порядок этих передаточных функций равен n, а относительно порядка – $(n - m)$ для передаточной функции $W_u(p)$ и $(n - l)$ для передаточной функции $W_v(p)$.

С помощью передаточной функции уравнение рассматриваемой системы управления можно записать в виде

$$y = W_u(p)u + W_v(p)v = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} u + \frac{c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} v.$$

Передаточной функцией системы (звена) в изображениях Лапласа называют имеющее наименьший порядок отношение изображений ее выходной и входной переменных, вычисленных при нулевых начальных условиях, называется. В соответствии с определением передаточная функция в изображениях Лапласа не может иметь равные между собой нули и полюса, так как в этом случае ее порядок может быть понижен путем сокращения числителя и знаменателя на общий множитель.

Передаточная функция системы управления в изображениях Лапласа $W(s)$ может быть определена по ее передаточной функции в операторной форме $W(p)$ следующим образом:

$$W(s) = W(p)|_{p=s} .$$

Если передаточная функция $W(p)$ содержит одинаковые нули и полюса, то элементарные множители, соответствующие этим корням в числителе и знаменателе, после подстановки $p = s$ должны быть сокращены.

Пример 5.1. Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнением $\dot{y} + y = u$.

В символической форме уравнение записывается в виде $p^k x = x^{(k)}$, где p – оператор дифференцирования. Тогда

$$\begin{aligned} &py + p^{\circ} y = u, \\ &(p+1)y = u, \\ &Q(p)y = P(p)u. \end{aligned}$$

Передаточная функция в операторной форме имеет вид:

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}, Q(p) = p+1, P(p) = 1.$$

Тогда $W(p) = \dfrac{1}{p+1}$. Передаточная функция в изображениях Лапласа имеет вид:

$$W(s) = W(p)|_{p=s} .$$

Тогда

$$W(s) = \frac{1}{p+1}|_{p=s} = \frac{1}{s+1} .$$

5.3. Алгебраические критерии устойчивости. Алгебраическими критериями устойчивости называются такие условия, составленные из коэффициентов характеристического уравнения, при выполнении которых система устойчива, а при невыполнении – неустойчива.

При проведения исследования устойчивости с помощью алгебраических критериев следует, прежде всего, записав характеристическое уравнение, проверить выполнение необходимого условия устойчивости, так как его проверка не требует никаких вычислений и в то же время при его невыполнении не надо проводить дальнейших исследований, поскольку становится известным, что система неустойчива.

Для того чтобы исследовать устойчивость с помощью алгебраических критериев, необходимо иметь характеристический полином. Рассмотрим, как он определяется.

Как отмечалось ранее, характеристический полином получается из собственного оператора $Q(p)$ простой заменой оператора p на комплексную переменную λ. Если дано уравнение системы управления в символической форме, то дифференциальный оператор при выходной переменной и будет собственным оператором. Если дана передаточная функция, то собственный оператор (с точностью до обозначения переменной) совпадает с ее знаменателем.

При исследовании замкнутой системы (рис. 5.1 а) нет необходимости находить ее передаточную функцию, если известна передаточная функция $W(p)=R(p)/S(p)$ разомкнутой системы (рис. 5.1 б).

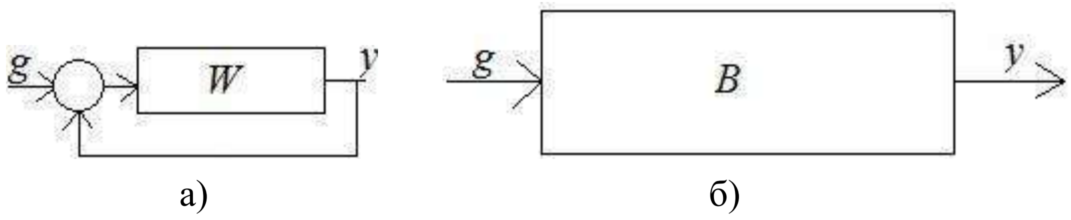

Рис. 5.1. Замкнутые и разомкнутые системы

Ее собственный оператор $Q(p)$ равен сумме операторов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы: $Q(p) = R(p) + S(p)$.

Из коэффициентов характеристического полинома

$$Q(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+...+a_n$$

составляется определитель *n-го* порядка

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & ... & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & ... & a_5 \end{vmatrix},$$

который строится следующим образом. На главной диагонали выписываются элементы $a_1, a_2, ..., a_n$. Затем, двигаясь от этих элементов вверх, помещаются коэффициенты в порядке возрастания индексов, вниз – в порядке убывания. Например, при построении *i*-го столбца, двигаясь от элемента a_i вверх, записываются коэффициенты $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$, вниз – коэффициенты $a_{i-1}, a_{i-2}, \ldots$ При этом, если индекс превышает *n* или принимает отрицательное значение, то вместо соответствующего коэффициента записывается нуль. Определитель Δ_n и его главные миноры

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},\ \ldots,$$

называются определителями Гурвица.

Согласно *критерию Гурвица* [35], для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица, составленные из коэффициентов ее характеристического уравнения, при $a_0>0$ были больше нуля:

$$a_0>0,\quad \Delta_1>0,\quad \Delta_2>0,\ \ldots,\ \Delta_n>0.$$

Как отмечалось выше, при исследовании устойчивости с помощью алгебраических критериев нужно прежде всего проверить необходимое условие устойчивости. Если необходимое условие устойчивости выполняется, то оказывается, что для определения устойчивости, нет необходимости вычислять все определители Гурвица.

Критерий Льенара–Шипара состоит в следующем: при выполнении необходимого условия $a_0>0,\quad a_1>0,\ \ldots,\ a_n>0$ для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы все ее определители Гурвица с четными индексами или все ее определители Гурвица с нечетными индексами были положительными

$$\Delta_2 > 0, \quad \Delta_4 > 0, \quad \Delta_6 > 0, \ldots \tag{5.2}$$

или

$$\Delta_3 > 0, \quad \Delta_5 > 0, \quad \Delta_7 > 0, \ldots \tag{5.3}$$

Для уменьшения вычислений целесообразно при нечетном n использовать условие (2), а при нечетном n – условие (3).

Выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости для n=1, 2, 3:

n=1: $a_1 > 0$;

n=2: $a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0$;

n=3: $a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

Пример 5.2. С помощью критерия Гурвица исследовать устойчивость систем уравнения, у которых характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 4 = 0.$$

Имеем

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 3 > 0, a_2 = 5, a_3 = 7 > 0, a_4 = 4 > 0,$$

следовательно, необходимое условие устойчивости выполняется.

Составим определитель 4-го порядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры имеют вид:

$$\Delta_1 = a_1 = 3 > 0, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 3*5 - 1*7 = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 * \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 4*20 = 80 > 0.$$

Поскольку $a_0 > 0$ и $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 > 0,$ то система по критерию Гурвица устойчива.

Пример 5.3. При каких a и b корни уравнения $\lambda^4 + 2\lambda^3 + a\lambda^2 + 3\lambda + b = 0$ имеют отрицательные вещественные части.

Условия Льенара–Шипара имеют вид:

$$a > 0, \quad b > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix} = 6a - 4b - 9 > 0, \quad \Delta_1 = 2 > 0.$$

Отсюда получаем условия $b > 0,\ 6a > 4b + 9$.

Пример 5.4. Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{p^3 + 0{,}5p^2 + 4p + 1}, k = 0{,}5;\ 2.$$

Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой системы.

Характеристический полином разомкнутой системы имеет вид:

$$\lambda^3 + 0{,}5\lambda^2 + 4\lambda + 1.$$

Все коэффициенты больше нуля:

$$a_0 = 1 > 0,\ a_1 = 0{,}5 > 0,\ a_2 = 4 > 0,\ a_3 = 1 > 0.$$

Далее, получаем, что $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 1 > 0.$ Следовательно, по необходимому и достаточному условию устойчивости при n=3 (по критерию Льенара–Шипара) разомкнутая система устойчива. Характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0{,}5\lambda^2 + 4\lambda + 1 + k.$$

При k=0,5 имеем

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0{,}5\lambda^2 + 4\lambda + 1{,}5;$$

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 0{,}5 > 0, a_2 = 4 > 0, a_3 = 1{,}5 > 0,$$

и

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0{,}5 > 0,$$

следовательно, по критерию Льенара–Шипара замкнутая система при $k=0{,}5$ устойчива.

При k=2 имеем

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 0{,}5\lambda^2 + 4\lambda + 3,$$

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 0{,}5 > 0, a_2 = 4 > 0, a_3 = 3 > 0,$$

и

$$\Delta_2 = -1 < 0,$$

следовательно, по критерию Льенара–Шипара замкнутая система неустойчива при k=2.

5.4. Частотные критерии устойчивости. Частотными критериями устойчивости называются условия устойчивости, основанные на построении частотных характеристик и так называемой кривой Михайлова.

Выражение

$$Q(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n,$$

которое получается при подстановке $\lambda = j\omega$ в характеристический полином, называется характеристическим вектором; переменная ω называется частотой.

Годограф характеристического вектора, т.е. кривую, которую описывает характеристический вектор при изменении частоты от 0 до ∞, называют кривой Михайлова. При $a_n > 0$ кривая Михайлова начинается в положительной вещественной полуоси. Если все нули характеристического полинома левые, то приращение аргумента характеристического вектора есть $\Delta \arg Q(j\omega) = n\, \pi/2$. Отсюда вытекает следующий критерий устойчивости.

Критерий Михайлова состоит в следующем: для того, чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ ее кривая Михайлова, начинаясь с положительной вещественной полуоси, последовательно обходила n квадрантов в положительном направлении (против часовой стрелки).

Кривые Михайлова устойчивых систем не пересекают начало координат и уходят в бесконечность в n-м квадранте.

Другая (эквивалентная) формулировка критерия Михайлова: для устойчивости необходимо и достаточно, чтобы $a_n a_{n-1} > 0$ и чтобы корни многочленов

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots,$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots$$

были все положительными, различными и чередующимися, начиная с корня ξ_1, т. е.

$$0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2<\ldots$$

Пример 5.5. С помощью критерия Михайлова исследовать устойчивость системы уравнения, у которой характеристическое многочлен имеет следующий вид: $f(\lambda)=\lambda^5+2\lambda^4+7\lambda^3+8\lambda^2+10\lambda+6$. Здесь $a_n=6>0$, $a_{n-1}=10>0$, а многочлены $p(\xi)=6-8\xi+2\xi^2$, $q(\eta)=10-7\eta+\eta^2$ имеют корни $\xi_1=1$, $\xi_2=3$, $\eta_1=2$, $\eta_2=5$. Значит, $0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2$. По критерию Михайлова все корни многочлена $f(\lambda)$ имеют отрицательные вещественные части.

Рассмотренные выше критерии позволяют изучать вопросы устойчивости как разомкнутых, так и замкнутых систем. Приведенный далее критерий Найквиста используется для исследования устойчивости замкнутых систем. Он позволяет по амплитудно-фазовой характеристике разомкнутой системы судить об устойчивости замкнутой системы.

Критерий Найквиста состоит в следующем: для того, чтобы замкнутая система (с отрицательной обратной связью) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы охватывала $l/2$ раз в положительном направлении точку (-1, j0), где l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Если разомкнутая система устойчива (l = 0), для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку (-1, j0).

Рассмотрим случай наличия нулевых корней. Если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет нулевые корни, т.е ее передаточная функция может быть представлена в виде

$$W(p)=\frac{k}{p^{\nu}}W_0(p),\quad W_0(0)=1,\quad \nu\geq 1,$$

то АФЧХ при $\omega\to 0$ уходит в бесконечность (рис. 5.2). В этом случае АФЧХ дополняется дугой $-\nu(\pi/2)$ окружности большого радиуса (на рис. 5.2 – пунктирная линия), и для устойчивости замкнутой системы должна охватывать $l/2$ раз или при l=0 не охватывать точку (–1, j0) дополненная АФЧХ.

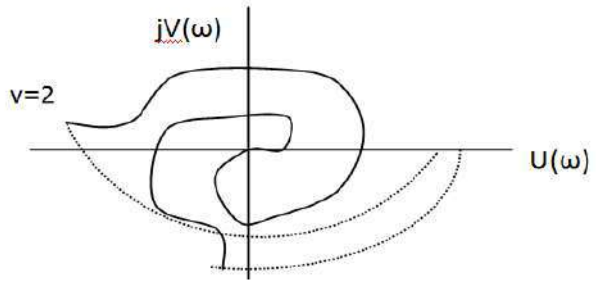

Рис. 5.2. АФЧХ разомкнутой системы

Пример 5.6. Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид: $W(p) = \dfrac{5}{p-1}$.

Частотная передаточная функция, вещественная и мнимая функции имеют вид:

$$W(j\omega) = \frac{5}{j\omega - 1} = \frac{5(-j\omega + 1)}{1+\omega^2} = U(\omega) + iV(\omega),$$

$$U(\omega) = -\frac{5}{1+\varpi^2},\ V(\omega) = -\frac{5\omega}{1+\omega^2}.$$

Для построения АФЧХ нужно определить координаты точек ее пересечения с осями координат и соединить эти точки плавной кривой. Необходимые расчетные данные приведены в табл. 5.1.

Табл. 5.1.

ω	0	0< ω<∞	∞
U(ω)	-5	<0	0
V(ω)	0	<0	0

На основе данных табл. 5.1 можно построить АФЧХ (рис. 5.:

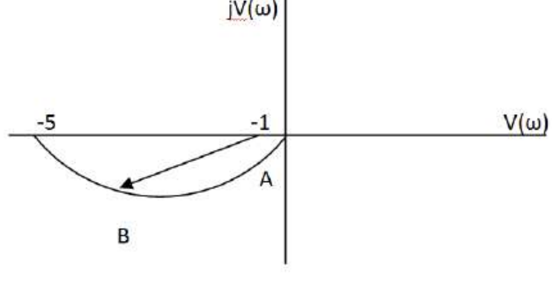

Рис. 5.3. АФЧХ для примера 5.6

В рассматриваемом примере замкнутая система устойчива, поскольку l=1 и АФЧХ охватывает точку (–1, j0) 1/2 раз в положительном направлении.

Пример 5.7. Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид: $W(p)=\dfrac{10}{(p+1)^3}$.

Имеем

$$W(j\omega)=\frac{10}{(j\omega+1)^3}=\frac{10}{-j\omega^3-3\omega^2+3j\omega+1}=\frac{10(1-3\omega^2-j(3\omega-\omega^3))}{(1-3\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2},$$

$$U(\omega)=\frac{10(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2},\quad V(\omega)=-\frac{10\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2+(3\omega-\omega^3)^2},$$

ω от 0 до +∞.

Расчетные данные приведены в табл. 5.2.

Табл. 5.2

Ω	0	0< ω<1/√3	1/√3	1/√3< ω<√3	√3	ω>√3	∞
U(ω)	10	>0	0	<0	-1,25	<0	0
V(ω)	0	<0	-6,6	<0	0	>0	0

На основе данных табл. 5.2 можно построить АФЧХ (рис. 5.4).

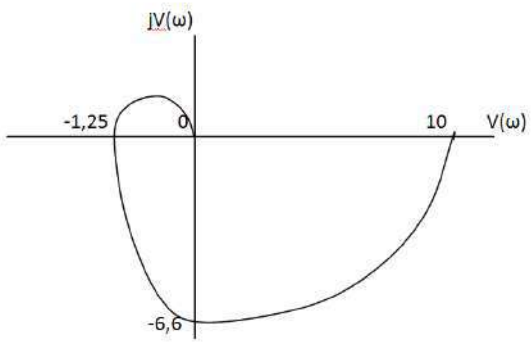

Рис. 5.4. АФЧХ для примера 5.7

В рассматриваемом примере замкнутая система неустойчива, так как разомкнутая система устойчива (l = 0), а АФЧХ охватывает точку (–1, j0).

5.5. Определение области устойчивости. Структура системы определяется составом элементов звеньев и связями между ними. Поэтому изменить структуру системы означает изменить состав ее элементов или связи между ними. При заданной структуре какие-либо параметры могут быть не фиксированными, т.е. их можно изменять. Такие параметры называются *варьируемыми*.

При наличии варьируемых параметров возникает проблема определения области устойчивости.

Областью устойчивости в пространстве параметров называют множество всех значений варьируемых параметров, при которых система устойчива. Если существует область устойчивости в пространстве параметров, т.е. такие значения варьируемых параметров, при которых система устойчива, то систему называют *структурно устойчивой относительно заданных варьируемых параметров*. В противном случае, т.е. если нет таких значений варьируемых параметров, при которых система устойчива, она называется *структурно неустойчивой относительно заданных варьируемых параметров*.

В ряде случаев области устойчивости удобно находить с помощью алгебраических критериев устойчивости.

Пример 5.8. Передаточная функция разомкнутой системы $W(p) = \dfrac{k}{(Tp+1)^3}$. Определить область устойчивости замкнутой системы на плоскости параметров (k, T).

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид

$$Q(\lambda) = T^3\lambda^3 + 3T^2\lambda^2 + 3T\lambda + 1 + k\ .$$

По критерию Льенара–Шипара имеем

$$T^3 > 0,\ 3T^2 > 0,\ 3T > 0,\ 1 + k > 0,$$

$$\Delta_2 = 3T^2 \cdot 3T - T^3 \cdot (1 + k) = T^3(8 - k) > 0.$$

Очевидно, эти неравенства будут выполняться, если

$$T > 0,\ -1 < k < 8.$$

Указанная система неравенств определяет область устойчивости.

§ 6. Линейные нестационарные системы

В случае линейных стационарных систем $\dot{x} = Ax$ устойчивость нулевого решения эквивалентна гурвицевости матрицы A, т.е. выполнению условия $\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0$ для всех $i = 1,...,n$, λ_i – собственные числа матрицы A. Если же система линейная и нестационарная, т.е. описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{6.1}$$

то ее общее решение, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0, t_0, x_0) = x_0$, имеет вид $x(t, t_0, x_0) = \Phi(t, t_0)x_0$, где $\Phi(t, t_0)$ – фундаментальная матрица решений системы. Вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения становится более сложным и не сводится к знаку вещественной части собственных чисел.

6.1. Устойчивость по Ляпунову линейных нестационарных систем. Справедливы следующие предложения.

Предложение 6.1. *Нулевое решение системы* (1) *устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда для любого* t_0 *найдется такое число* $a_0 > 0$, *что выполняется условие*

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leqslant a_0 \quad \textit{для любого} \quad t \geqslant t_0. \tag{6.2}$$

Действительно, если условие (2) выполнено, то выполняется неравенство $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \|\Phi(t, t_0)\| \|x_0\| \leqslant a_0 \|x_0\|$ и для любого ε можно выбрать $\delta(\varepsilon, t_0) = \dfrac{\varepsilon}{a_0}$.

Из $\|x_0\| \leqslant \delta(\varepsilon, t_0)$ в силу (2) будет следовать $\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \varepsilon$, что доказывает устойчивость по Ляпунову. Теперь предположим, что нулевое решение устойчиво по Ляпунову и условие (2) не выполняется. Тогда найдется такая последовательность $\{t_i\} \to \infty,\ i \to \infty$, что

$$\|\Phi(t_i, t_0)\| \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty$$

и, следовательно, на единичной сфере $\|x\| = 1$ можно выбрать такую последовательность $\{x_{0,i}\}$, что $\|\Phi(t_i, t_0)x_{0,i}\| = \|\Phi(t_i, t_0)\| \to \infty$. Выбрав из ограниченной последовательности $\{x_{0,i}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{0,i_k}\} \to x_0$, получим $\|\Phi(t_{i_k}, t_0)x_0\| \to \infty$. Тогда для любого как угодно малого δ

можно выбрать такое начальное условие $y_0 = \delta x_0$, что $x(t_{i_k}, t_0, y_0) \to \infty$. Это противоречит устойчивости нулевого решения.

Предложение 6.2. *Нулевое решение системы* (1) *асимптотически устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда для любого* t_0 *выполняется условие*

$$\lim_{t\to\infty} \|\Phi(t,t_0)\| = 0. \tag{6.3}$$

Действительно, из выполнения (3) и неравенства $\|x(t,t_0,x_0)\| \leqslant \|\Phi(t,t_0)\| \|x_0\|$ очевидно следует асимптотическая устойчивость нулевого решения. Пусть теперь (3) не выполняется. Тогда найдутся такие числа t_0, $a_0 > 0$ и неограниченно возрастающая последовательность $\{t_i\} \to \infty$, что $\|\Phi(t_i,t_0)\| \geqslant a_0$. Но тогда на единичной сфере $\|x\| = 1$ можно выбрать такую последовательность $\{x_{0,i}\}$, что $\|\Phi(t_i,t_0)x_{0,i}\| = \|\Phi(t_i,t_0)\| \geqslant a_0$. Выбрав из ограниченной последовательности $\{x_{0,i}\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_{0,i_k}\} \to x_0$, получим $\lim\limits_{k\to\infty} \|\Phi(t_{i_k},t_0)x_0\| \geqslant a_0$, что противоречит асимптотической устойчивости нулевого решения.

6.2. Параметрический резонанс в линейных нестационарных системах. Рассмотрим пример, показывающий, что гурвицевость матрицы $A(t)$ при каждом фиксированном значении t не гарантирует ее асимптотическую устойчивость. Специальным случаем системы (1) является система с переключениями. Рассмотрим уравнения линейного осциллятора

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 - u(t)x_1 \end{aligned} \tag{6.4}$$

с постоянным коэффициентом трения k и меняющимся во времени коэффициентом трения $u(t)$. В этом примере функция $u(t)$ является зависящим от времени параметром. При этом матрица $A(t)$ имеет вид

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u(t) & -k \end{pmatrix}.$$

Свойство асимптотической устойчивости, имеющее место при постоянном u, может как сохраниться, так и нарушиться. Предположим, что параметр u может принимать два значения: u_1 и u_2. Изменение параметра u во времени подчиним следующему закону. Будем считать, что всякий раз, когда точка x_1, x_2

находится в первом и третьем квадранте фазовой плоскости, выполняется условие $u(t) = u_1$, а в случае второго и четвертого квадрантов имеем $u(t) = u_2$:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{при } x_1(t)x_2(t) \geqslant 0, \\ u_2, & \text{при } x_1(t)x_2(t) < 0. \end{cases} \tag{6.5}$$

На рис. 6.1 представлена траектория системы (4). Изменение $u(t)$ подчинено правилу (5), где $u_1 = 2$, $u_2 = 2.7$ (тонкая линия). Линии переключения показаны пунктиром. Жирной линией показана траектория, исходящая из той же начальной точки, но соответствующая постоянному $u(t) \equiv u_1$. Видно, что положение равновесия $x_1 = 0, x_2 = 0$, асимптотически устойчивое при постоянном значении параметра u, становится неустойчивым при $u(t)$, меняющемся во времени. Это явление называется параметрическим резонансом. Человек, раскачивающий качели с трением в подвесе, достигает параметрического резонанса. Мы рассматриваем специальный случай скачкообразного изменения параметра. Пусть $x_u(t, t_0, x_0)$ – общее решение нестационарной системы (4), отвечающее функции времени $u(t)$, а $x(t, x_0)$ – общее решение автономной системы с переключениями, полученной подстановкой (5) в (4).

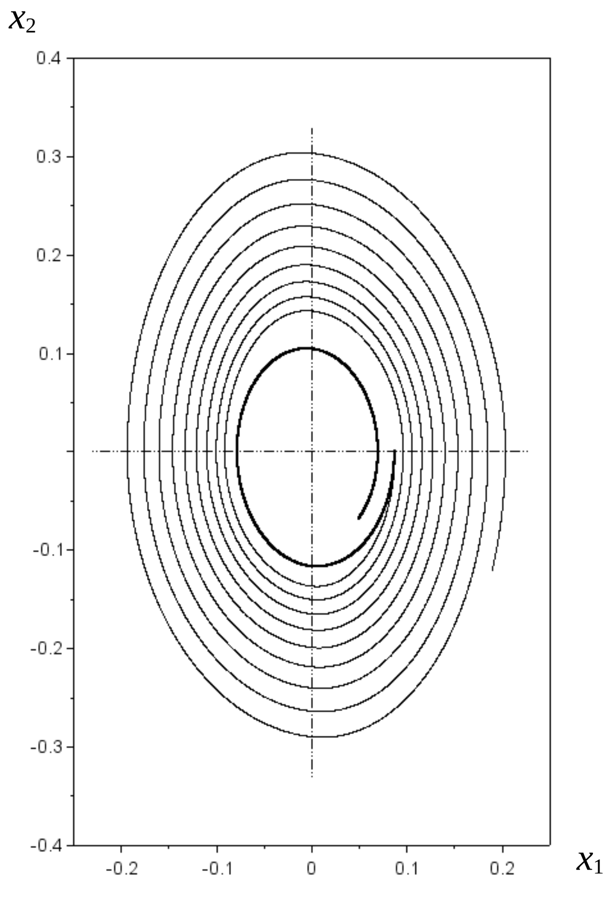

Рис. 6.1. Траектория системы (4) с законом переключения (5)

Начав движение в силу системы (5) в (4) из некоторого начального условия x_0 в момент времени $t = t_0 = 0$, получим решение $x(t, x_0)$ и некоторую реализацию параметра $u_0(t)$, подставив которую в правую часть (4), получим то же решение: $x_{u_0}(t, 0, x_0) \equiv x(t, x_0)$.

В рассмотренном выше примере при $u(t) = u_1$ или $u(t) = u_2$ имеем две линейные стационарные системы с матрицами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_1 & -k \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_2 & -k \end{pmatrix}$$

и траектория (4), (5) составлена из кусков траекторий систем

$$\dot{x} = A_1 x \quad \text{и} \quad \dot{x} = A_2 x, \tag{6.6}$$

которые будем называть для краткости системами A_1 и A_2. Обе системы имеют асимптотически устойчивое нулевое решение. При переключении между системами A_1 и A_2, отвечающем зависящему от времени параметру $u_0(t)$, как уже отмечалось, свойство устойчивости может не сохраниться. Естественно возникает вопрос о том, всегда ли можно добиться неустойчивости с помощью переключений между устойчивыми системами? Чтобы ответить на этот вопрос рассмотрим линейную нестационарную систему

$$\dot{x} = \mathcal{A}(u(t))x \tag{6.7}$$

В записи (7) предполагается, что матрица $\mathcal{A}(u(t))$ параметризована единственной скалярной функцией $u(t)$, зависящей от времени. Если бы параметризация имела вид

$$\mathcal{A}(u(t)) = u(t)A, \tag{6.8}$$

где матрица A постоянна, то общее решение такой системы имело бы вид

$$x(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau A} x_0.$$

При этом при любом выборе интегрируемой функции $u(t)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \geqslant \alpha(t - t_0), \quad \text{где} \quad \alpha > 0,$$

и гурвицевой матрице A с собственными числами λ_i, удовлетворяющими условию $Re(\lambda_i) < -\lambda_0$, выполнялась бы оценка

$$\|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \|x(t, t_0, x_0)\| \leqslant \beta e^{-\alpha\lambda_0(t-t_0)} \|x_0\|$$

при некотором $\beta > 0$ и система (7) с матрицей (8) была бы асимптотически устойчивой. Таким образом, для получения неустойчивости зависимость $\mathcal{A}(u(t))$ от $u(t)$ должна быть не линейной, как в (8), а по крайней мере аффинной, как в (4).

При рассмотрении системы (8) ограничимся кусочно-постоянными функциями $u(t)$, принимающими значения u_1 и u_2. Для двух систем (6) предположим, что обе матрицы A_1 и A_2 гурвицевы. Пусть $\Phi_u(t,t_0)$ это матрица общего решения системы (8), отвечающая функции $u(t)$. При этом $x_u(t, t_0, x_0) = = \Phi_u(t, t_0)x_0$. Предположим, что при данном $u^*(t)$ и t_0 система (7) не является асимптотически устойчивой. Тогда найдётся такая неограниченно возрастающая последовательность $\{t_i\} \to \infty,\ i \to \infty$, и такое число $a > 0$, что будем иметь

$$\lim_{i\to\infty} \|\Phi(t_i,t_0)\| \geqslant a\,. \tag{6.9}$$

Для случая, когда $u^*(t)$ кусочно-постоянно, получим

$$\Phi(t_i,t_0) = e^{\tau_1 A_1} e^{\theta_1 A_2} e^{\tau_2 A_1} e^{\theta_2 A_2} \ldots e^{\tau_{m_i} A_1} e^{\theta_{m_i} A_2}, \tag{6.10}$$

где

$$t_i = \tau_1 + \theta_1 + \tau_2 + \theta_2 + \ldots + \tau_{m_i} + \theta_{m_i}$$

и любое из чисел τ_1, ..., θ_{m_i} может быть равно нулю. Обозначим

$$T_i = \sum_{k=1}^{m_i} \tau_k, \quad \Theta_i = \sum_{k=1}^{m_i} \theta_k\,.$$

Имеем $t_i = T_i + \Theta_i$. Предположим, что матрицы A_1 и A_2 перестановочны, т.е. $A_1 A_2 = A_2 A_1$. Тогда будут перестановочны матрицы $e^{\tau A_1}$ и $e^{\theta A_2}$ и в выражении (10) можно будет переставить сомножители таким образом, что $\Phi(t_i,t_0) = e^{T_i A} e^{\Theta_i B}$, поскольку $e^{\tau_1 A_1} e^{\tau_2 A_1} \ldots e^{\tau_{m_i} A_1} = e^{T_i A_1}$ и $e^{\theta_1 A_2} e^{\theta_2 A_2} \ldots e^{\theta_{m_i} A_2} = e^{\Theta_i B}$. Но матрицы A_1 и A_2 гурвицевы и при $t_i = T_i + \Theta_i \to \infty$ будем иметь $\lim\limits_{i\to\infty} \|\Phi(t_i,t_0)\| \to 0$, что противоречит (9). Таким образом, доказано следующее предложение.

Предложение 6.3. *Пусть две гурвицевы матрицы A_1 и A_2 перестановочны. Тогда при любом кусочно-постоянном $u(t)$ нулевое решение системы* (7) *асимптотически устойчиво*.

Рассмотрим вопрос о коммутативности A_1 и A_2 более подробно. Из начального условия x_0 начнем движение системы A_1 и продолжим его в течение времени τ. После достижения точки $e^{\tau A_1}x_0$, продолжим из нее, как из начального условия, движение системы A_2 в течение времени θ. Придем в точку $x_{A_1A_2} = e^{\theta A_2}e^{\tau A_1}x_0$. Если же из точки x_0 будем двигаться сначала θ единиц времени в силу системы A_2, а затем τ единиц времени в силу системы A_1, то придем в точку $x_{A_2A_1} = e^{\tau A_1}e^{\theta A_2}x_0$. Если матрицы A_1 A_2 перестановочны, то $x_{A_1A_2} = x_{A_2A_1}$ и будет справедлива диаграмма, изображенная на левой части рис. 6.2. В противном случае, если $A_1A_2 \neq A_2A_1$, то $e^{\tau A_1}e^{\theta A_2} \neq e^{\theta A_2}e^{\tau A_1}$ и $x_{A_1A_2} \neq x_{A_2A_1}$. Правая часть рис. 6.2 иллюстрирует этот случай. Горизонтальная линия на каждой из двух диаграмм соответствует движению в силу системы A_1, вертикальная линия соответствует движению в силу системы A_2.

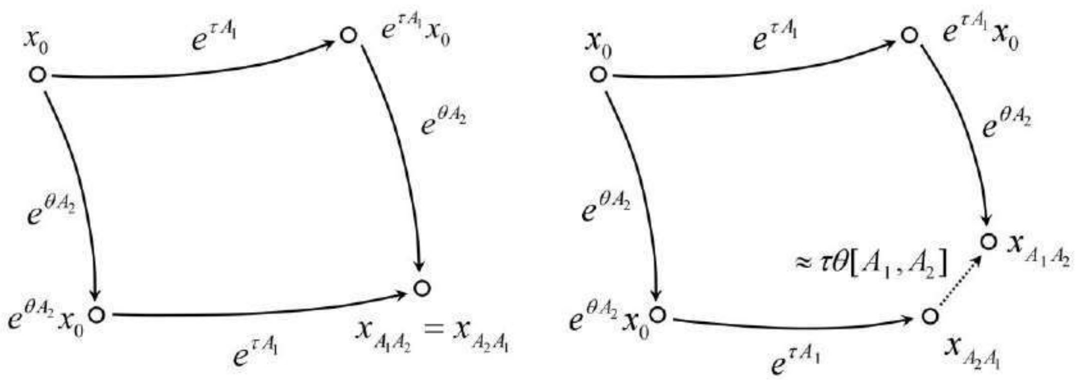

Рис. 6.2. Диаграммы, иллюстрирующие две траектории движения системы

Оценим величину $x_{A_1A_2} - x_{A_2A_1}$. Имеем

$$\begin{aligned}
&e^{\tau A_1}e^{\theta A_2} - e^{\theta A_2}e^{\tau A_1} = \\
&= \left(I + \tau A_1 + \frac{1}{2}\tau^2 A_1^2 + \cdots \right)\left(I + \theta A_2 + \frac{1}{2}\theta^2 A_2^2 + \cdots \right) - \\
&\quad - \left(I + \theta A_2 + \frac{1}{2}\theta^2 A_2^2 + \cdots \right)\left(I + \tau A_1 + \frac{1}{2}\tau^2 A_1^2 + \cdots \right) = \\
&= \left(I + \tau A_1 + \theta A_2 + \frac{1}{2}\tau^2 A_1^2 + \tau\theta A_1 A_2 + \frac{1}{2}\theta^2 A_2^2 + \cdots \right) - \\
&\quad - \left(I + \theta A_2 + \tau A_1 + \frac{1}{2}\theta^2 A_2^2 + \tau\theta A_2 A_1 + \frac{1}{2}\tau^2 A_1^2 + \cdots \right) = \\
&= \tau\theta\left(A_1A_2 - A_2A_1 \right) + \cdots
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Это означает, что отличие $e^{\tau A_1}e^{\theta A_2}$ от $e^{\theta A_2}e^{\tau A_1}$ начинается с членов порядка $\tau\theta$. Следовательно, $\left\| x_{A_1A_2} - x_{A_2A_1} \right\|$ имеет порядок малости $\tau\theta$. Матрица $[A_1, A_2] \equiv A_1A_2 - A_2A_1$ называется *коммутатором* матриц A_1 и A_2 или *скобкой Ли*. Если матрицы A_1 и A_2 перестановочны, то их коммутатор равен нулю. В этом случае матрицы $e^{\tau A_1}$ и $e^{\theta A_2}$ также перестановочны и выражение (11) равно нулю тождественно по τ и θ. Предложение 6.3 утверждает, что при этом параметрического резонанса достичь невозможно.

6.3. Алгебры Ли и группы Ли. Рассмотрим произвольную линейную нестационарную систему

$$\dot{x} = A(t)x,\ x \in R^n. \qquad (6.12)$$

Теперь в записи системы (12) не предполагается специального вида зависимости от t, как это было сделано в (7). Очевидно, что систему (12) можно переписать в виде

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i(t) A_i x \qquad (6.13)$$

при надлежащем выборе скалярных функций времени $u_i(t)$ и постоянных матриц A_i. Эти функции вносят нестационарность в запись системы. Относительно них будем предполагать лишь, что они удовлетворяют условиям Каратеодори существования решения уравнения (13). Ограничившись выбором $t_0 = 0$, общее решение (13) обозначим $x(t, x_0)$.

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях общее решение системы (13) можно представить в виде

$$x(t, x_0) = \prod_{i=1}^{m} e^{g_i(t)A_i} x_0 \qquad (6.14)$$

при надлежащем выборе функций $g_i(t)$. Речь идет именно о представлении в виде произведения ровно m экспонент, по одной экспоненте на каждую матрицу A_i, а не в виде произведения произвольного количества экспонент.

Определение 6.1. Множество матриц $A_1, \ldots, A_m$ называется *инволютивным*, если скобка Ли любых двух матриц линейно выражается через эти матрицы

$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^{m} \gamma_{ijk} A_k \,.$$

Линейное инволютивное пространство матриц называется *матричной алгеброй Ли*.

Имеет место следующее предложение.

Предложение 6.4 (теорема Фробениуса). *Пусть множество матриц* $A_1, \ldots, A_m$ *инволютивно. Тогда решение системы* (13) *может быть представлено в виде* (14).

При этом множество матриц, представимых в виде

$$\prod_{i=1}^{m} e^{\alpha_i A_i}$$

при некоторых вещественных α_i замкнуто относительно операции умножения. Обратная к каждой такой матрице также представима в таком виде. Таким образом, такие матрицы образуют группу, называемую группой Ли, отвечающей алгебре Ли. Единицей группы является единичная матрица I. Если рассматривать группу Ли как гладкое многообразие, то соответствующая алгебра Ли образует линейное пространство, касательное к многообразию в точке I.

В записи (13) предположим, что функции $u_i(t)$ ограничены условием

$$\sum_{i=1}^{m} u_i(t) = 1, \quad u_i(t) \geqslant 0 \,. \tag{6.15}$$

Это означает, что матрица $A(t)$ в (12) принадлежит выпуклой оболочке матриц $A_1, \ldots, A_m$. Это свойство записываем следующим образом: $A(t) \in \mathrm{co}\{A_1, \ldots, A_m\}$. Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого решения системы (13), (15).

Определение 6.2. Матричная алгебра Ли называется *разрешимой*, если найдется линейное преобразование, приводящее все ее элементы к верхнетреугольному виду.

Имеет место следующее предложение.

Предложение 6.5. *Пусть множество матриц* $A_1, \ldots, A_m$ *порождает разрешимую алгебру Ли. Тогда нулевое решение системы* (13), (15) *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда все матрицы* $A \in \mathrm{co}\{A_1, \ldots, A_m\}$ *гурвицевы*.

Таким образом, если множество $A_1, \dots, A_m$ инволютивно, одновременно приводится к верхнетреугольному виду, и все матрицы $A \in \mathrm{co}\{A_1, \dots, A_m\}$ гурвицевы, то параметрический резонанс невозможен.

Существуют и другие классы алгебр Ли (не только разрешимые), которые совместно с гурвицевостью всех $A \in \mathrm{co}\{A_1, \dots, A_m\}$ гарантируют асимптотическую устойчивость.

Результаты предложения 6.5 важны, но имеют ограниченную ценность для практики и приведены скорее для полноты понимания проблемы, чем для практического применения. Конструктивные достаточные условия, сводящиеся к проверке разрешимости линейных матричных неравенств, приведены в следующем разделе.

6.4. Квадратичная устойчивость и квадратичная стабилизация. В предыдущих разделах 6.1 – 6.3 были рассмотрены общие вопросы теории устойчивости линейных нестационарных систем. Сформулированные теоремы дают необходимые и достаточные, но труднопроверяемые условия асимптотической устойчивости нулевого решения.

Более конструктивные и практические достаточные условия асимптотической устойчивости системы (13), (15) получаются применением квадратичной функции Ляпунова. Выберем $v(x) = x^T P x$. Производная в силу системы (13) при произвольном выборе значений u_i, стесненном ограничениями (15), принимает вид

$$\dot{v}(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i x\right)^T P x + x^T P \left(\sum_{i=1}^{m} u_i A_i x\right). \tag{6.16}$$

Отрицательная определенность (16) с учетом ограничений (15) эквивалентна следующему утверждению.

Предложение 6.6. *Отрицательная определенность производной квадратичной функции Ляпунова в силу системы* (13), (15) *эквивалентна следующей совокупности линейных матричных неравенств* (*ЛМН*)

$$\left.\begin{array}{c} PA_1 + A_1^T P < 0, \\ PA_2 + A_2^T P < 0, \\ \dots \\ PA_m + A_m^T P < 0. \end{array}\right\}. \tag{6.17}$$

В системе неравенств (17) знак $<$, примененный к квадратной симметричной матрице, означает ее отрицательную определенность. Для двух матриц Q и P неравенство $Q<P$ означает отрицательную определенность их разницы: $Q-P<0$. Система неравенств (17) представляет собой систему линейных матричных неравенств (ЛМН). Для проверки разрешимости ЛМН разработаны эффективные вычислительные методы, сводящиеся к выпуклой оптимизации [99].

Условия (17) гарантируют асимптотическую устойчивость линейной нестационарной системы (13) при произвольном выборе функций $u_i(t)$, удовлетворяющих условию (15). Если трактовать запись (13), (15) как линейную стационарную систему $\dot{x}=Ax$, правая часть которой возмущена параметрическим возмущением

$$\Delta A(t)\in \mathrm{co}\{A_1-A,\ldots,A_m-A\},$$

то предложение 6.6 гарантирует робастную устойчивость линейной стационарной системы в присутствии нестационарных возмущений, ограниченных выпуклым многогранником. Функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям (17), называется общей функцией Ляпунова, поскольку она является функцией Ляпунова одновременно для m линейных стационарных систем. Последнее свойство более сильное, чем просто гурвицевость m матриц A_i, которая, как мы знаем не гарантирует асимптотической устойчивости нестационарной системы. Предложение 6.6 дает лишь достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (13), (15). Это значит, что существуют асимптотически устойчивые системы, для которых не существует общей квадратичной функции Ляпунова.

Рассмотрим вопрос о стабилизации управляемой системы системы

$$\dot{x}=A(t)x+BU(t),\quad x\in R^n,\quad U\in R^k \tag{6.18}$$

стационарной обратной связью $U(t)=Kx$, где $A(t)=\sum_{i=1}^{m}u_i(t)A_i$, и произвольно меняющиеся во времени функции $u_i(t)$ удовлетворяют условиям (15). Матричный коэффициент усиления K, подлежащий определению, имеет размерность $n\times k$. Вопрос об одновременном выборе «стабилизирующей пары» – квадратичной функции Ляпунова $v(x)=x^TPx$ и матрицы K сводится к решению системы ЛМН

$$\left.\begin{array}{c} P\left(A_1 + BK\right) + \left(A_1 + BK\right)^T P < 0, \\ P\left(A_2 + BK\right) + \left(A_2 + BK\right)^T P < 0, \\ \ldots \\ P\left(A_m + BK\right) + \left(A_m + BK\right)^T P < 0. \end{array}\right\}. \qquad (6.19)$$

После умножении каждого неравенства в (19) слева и справа на P^{-1} (требуется положительная определенность и, следовательно, невырожденность P) и замены переменных $Y = P^{-1}$, $W = KP^{-1}$ приводится к виду

$$\left.\begin{array}{c} A_1 Y + BW + Y A_1^T + W^T B^T < 0, \\ A_2 Y + BW + Y A_2^T + W^T B^T < 0, \\ \ldots \\ A_m Y + BW + Y A_m^T + W^T B^T < 0. \end{array}\right\} \qquad (6.20)$$

После решения последней системы ЛМН (или, что эквивалентно, одного ЛМН блочно-диагонального вида) относительно матриц Y и W, получаем искомый матричный коэффициент линейной обратной связи $K = WY^{-1}$.

Вопросы одновременной стабилизации нескольких линейных управляемых систем рассматривались в [7] и в других работах.

§ 7. Абсолютная устойчивость систем управления

При анализе управляемых систем полезно выделять, если это возможно, линейную и нелинейную части. Часто предполагается, что линейная часть возмущена нелинейной нестационарной добавкой, которая является непрерывной по совокупности переменных.

7.1. Абсолютная устойчивость управляемых систем с одним нелинейным элементом в обратной связи. Рассмотрим управляемые системы, в которых добавка к линейной части играет роль закона управления и, кроме того, требование непрерывности этой добавки не требуется. Предполагается, что объект управления линеен, а контроллер, реализующий закон управления, нелинеен и нестационарен. Объект управления задается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{7.1}$$

где $x \in R^n$ – вектор пространства состояний, вещественная матрица A имеет размер $n \times n$, вектор $b \in R^n$, u – скалярное управление. Зависимость x и u от времени для краткости опускается, если это не приводит к недоразумениям. Уравнение (1) определяет линейную часть системы со скалярным входом u. Скалярный выход определим уравнением

$$y = c^T x, \tag{7.2}$$

где $c \in R^n$ – вектор. Обратная связь, устанавливающая зависимость входа линейной части от ее выхода, определяется уравнением

$$u(t) = \varphi(t, y). \tag{7.3}$$

Схематично замкнутая система изображена на рис. 7.1. Ее уравнение записывается следующим образом

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(t, c^T x). \tag{7.4}$$

Рис. 7.1. Линейная часть системы, замкнутая нелинейным контроллером

Система, изображенная на рисунке, состоит из двух последовательно соединенных частей, линейной и нелинейной, замкнутых обратной связью. Итак, система (4) является нелинейной и нестационарной. Для ее описания нужно задать начальное состояние x_0, в котором система находится в начальный момент времени $t = t_0$ и из которого начнется управляемое движение.

Относительно нелинейной части, определяемой уравнением (3) сделаем следующие предположения. Предположим, что при каждом фиксированном значении t график зависимости $\varphi(t, y)$ от y заключен в сектор, ограниченный прямыми $k_1 y$ и $k_2 y$, где k_1 и k_2 – некоторые константы (см. рис. 7.2). Более точно, предполагается, что $\varphi(t, y)$ удовлетворяет ограничениям

$$\varphi(t, 0) = 0, \quad k_1 \leqslant \frac{\varphi(t, y)}{y} \leqslant k_2, \; y \neq 0. \tag{7.5}$$

Это ограничение называется *секторным*.

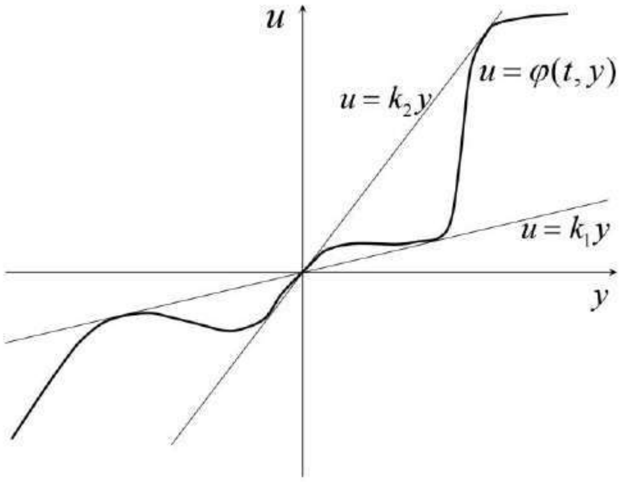

Рис. 7.2. График нелинейной функции $u(t) = \varphi(t, y)$, удовлетворяющей секторному ограничению

Случай $k_2 = \infty$ в (5) не исключается. Например, при $k_1 = 0$ и $k_2 = \infty$ график функции $\varphi(t, y)$ занимает первый и третий квадранты плоскости y, u. Такой сектор вмещает в себя, например, график функции $\operatorname{sign}(y)$. Мы сейчас не касаемся вопроса о существовании решения систем с разрывной правой частью. Разумеется, что в дополнение к секторным ограничениям необходимо добавить условия на нелинейную функцию, гарантирующие существования решения замкнутой системы (4) в смысле того или иного определения. Обычно график разрывной однозначной функции дополняется до графика выпуклозначного полунепрерывного сверху точечно-множественного отображения. При этом дифференциальное уравнение заменяется дифференциальным включением, под решением которого понимается абсолютно непрерывная функция времени t, удовлетворяющая дифференциальному включению для почти всех значений t.

В такой постановке задачи от нелинейной функции $\varphi(t, y)$ требуется лишь принадлежность ее графика сектору (5). Размер сектора задается константами k_1 и k_2, не зависящими от начального момента времени. Поэтому, не ограничивая общности, можно взять $t_0 = 0$. Из первого условия (5) следует, что точка $x = 0$ является сотоянием равновесия замкнутой системы (4) при любой нелинейной функции, удовлетворяющей секторному ограничению.

Исследуем устойчивость системы (4) при ограничении (5). Начнем со случая асимптотически устойчивой линейной части, т.е. со случая гурвицевости матрицы A. Поставим вопрос о том, при каких условиях на матрицу A, векторы b, c и числа k_1, k_2 нулевое решение замкнутой системы (4) асимптотически устойчиво. Поскольку выполнение секторного условия (5) не гарантирует выполнения условий теоремы об анализе устойчивости по линейному приближению, то потребуется другая теория. Круг вопросов, к рассмотрению которых мы приступаем, исторически связывается с теорией абсолютной устойчивости. Нас будет интересовать устойчивость нулевого решения не одной единственной нелинейной системы (4), а целого класса таких систем, соответствующих всевозможным функциям $\varphi(t, y)$, удовлетворяющим секторному условию.

Определение 7.1. Система, заданная уравнениями (1)–(3) называется *абсолютно устойчивой* в секторе (5), если ее нулевое решение асимптотически устойчиво по Ляпунову в целом при любом выборе нелинейной функции $\varphi(t, y)$ из сектора (5).

Для того, чтобы воспользоваться теоремой Барбашина–Красовского об асимптотической устойчивости в целом, попробуем выбрать функцию Ляпунова из класса квадратичных форм $v(x) = x^T P x$. Имеем $v(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$. Производная $v(x)$ в силу системы (1) имеет вид

$$\dot{v}(x, u) = 2x^T P(Ax + bu). \tag{7.6}$$

Производная $\dot{v}(x, u)$ должна быть отрицательна для любых $x \neq 0$ и u, удовлетворяющих условиям (2), (3) и (5). Секторное условие (5) с учетом (3) представим в виде

$$k_1 \leqslant \frac{u}{y} \leqslant k_2, \ \ y \neq 0. \tag{7.7}$$

При анализе знакоопределенности $\dot{v}(x,u)$ при условии (7) факт зависимости (3) можно не принимать во внимание. Это справедлио, поскольку для любой точки y,u, удовлетворяющей условию (7), можно подобрать такой график функции $\varphi(t, y)$ который удовлетворит условию $u=\varphi(t,y)$ для некоторого t и лежит в секторе (5). Условие (7) перепишем с учетом (2) в эквивалентном виде

$$(u-k_1c^Tx)(k_2c^Tx-u) \geqslant 0. \tag{7.8}$$

Приходим к следующей алгебраической задаче. Для заданных A, b, c, k_1 и k_2 необходимо проверить, существует ли такая положительно определенная квадратная матрица $P>0$, что квадратичная форма $\dot{v}(x,u)$ переменных x, u, заданная выражением (6), отрицательно определена в области пространства R^{n+1}, заданной квадратичным ограничением (8). Составим $(n+1)$-мерный вектор z из вектора x и переменной u соотношением $z^T=(x^T, u)$. Тогда квадратичная форма (6) может быть записана в виде

$$\dot{v}(z)= z^T D(P)z, \quad D(P)=\begin{pmatrix} PA+ A^TP & Pb \\ b^TP & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.9}$$

Отрицательная определенность матрицы $D(P)$ невозможна без учета условия (8) ни при каком выборе матрицы P. Действительно, если бы она была отрицательно определена, то матрица $-D(P)$ была бы положительно определена и по лемме Шура выполнялись бы два условия: $PA+A^TP<0$ и $b^TP(PA+A^TP)^{-1}Pb>0$. Но второе условие невозможно, поскольку из первого условия следует невырожденность матрицы P и, следовательно, $y=Pb\neq 0$ (предполагается $b\neq 0$). Тогда из отрицательной определенности $PA+A^TP$ следует $y^TP(PA+A^TP)^{-1}y<0$. Противоречие доказывает, что матрица $D(P)$ является отрицательно определенной ни при каком выборе P. Поэтому квадратичная форма $\dot{v}(z)$, определенная условием (9), не может быть отрицательно определена на всем пространстве R^{n+1}, не стесненном ограничением (8). Чтобы проверить выполнение условия $\dot{v}(z)<0$ при $z\neq 0$ и ограничении (8), воспользуемся S-процедурой [15]. Составим квадратичную форму

$$s_\tau(z) = \dot{v}(x,u) + \tau(u - k_1 c^T x)(k_2 c^T x - u) = \\ = 2x^T P(Ax + bu) + \tau(u - k_1 c^T x)(k_2 c^T x - u), \tag{7.10}$$

где $\tau \geqslant 0$ – параметр, подлежащий определению наряду с матрицей P. Если удастся найти такие $\tau \geqslant 0$ и $P > 0$, что выполняется условие $s_\tau(z) = s_\tau(x,u) < 0$ для $(x,u) \neq 0$, то выполняется условие $\dot{v}(x,u) < 0$ при ограничении (8). При этом достаточно ограничиться случаем $\tau > 0$. Действительно, если бы удалось найти такое $P > 0$, что $s_0(x,u) = \dot{v}(x,u) < 0$ при $(x,u) \neq 0$, то матрица $D(P)$ в (9) оказалась бы отрицательно определенной, что невозможно. Итак, заметив, что искомая матрица P входит в выражение для $s_\tau(z)$ линейно и разделив оба слагаемых этого выражения на $\tau > 0$, приходим к задаче о поиске матрицы P, удовлетворяющей неравенству $s_1(x,u) < 0$ при $(x,u) \neq 0$ или, другими словами, о решении линейного матричного неравенства (ЛМН)

$$S(P) = \begin{pmatrix} PA + A^T P - k_1 k_2 c c^T & Pb + \dfrac{k_1 + k_2}{2} c \\ b^T P + \dfrac{k_1 + k_2}{2} c^T & -1 \end{pmatrix} < 0. \tag{7.11}$$

Случай, когда функция φ в выражении (3) зависит только от y и не зависит от t, называется случаем стационарной нелинейности $\varphi(y)$. На рис. 7.3 приведены графики двух стационарных нелинейностей, часто встречающихся в теории управления.

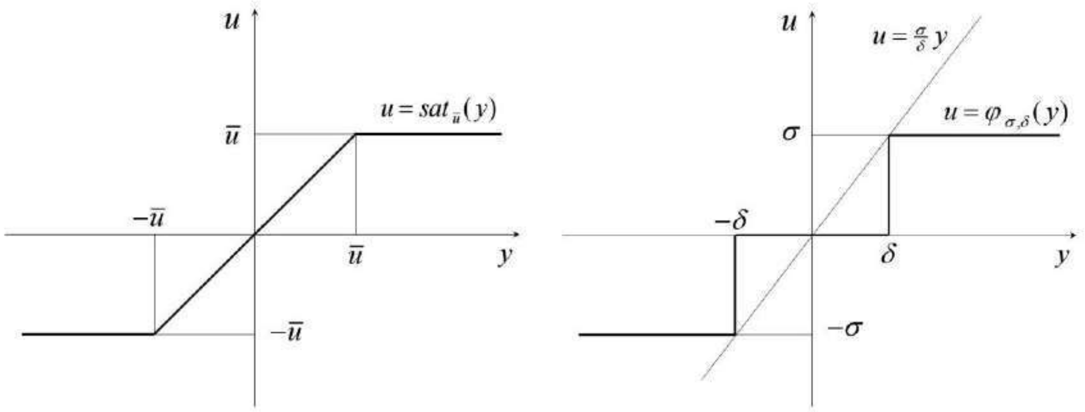

Рис. 7.3. Графики стационарных нелинейностей

В левой части рис. 7.3 изображен график линейного элемента с насыщением, определенным условием

$$\operatorname{sat}_{\bar{u}}(y)=\begin{cases}-\bar{u} & \text{при} \quad y\leqslant\bar{u},\\ y & \text{при} \quad -\bar{u}<y<\bar{u},\\ \bar{u} & \text{при} \quad y\geqslant\bar{u}.\end{cases}$$

Сектор, которому принадлежит функция $\operatorname{sat}_{\bar{u}}(y)$, описывается константами $k_1=0,\ k_2=1$. В правой части рис. 7.3 изображен релейный элемент с «мертвой» зоной $[-\delta,\delta]$, внутри которой выход элемента равен нулю. Вне мертвой зоны выход равен $\pm\sigma$ в зависимости от знака y. Такие элементы позволяют избежать частых переключений управления в окрестности нулевого значения y. При этом сектор определяется константами $k_1=0,\ k_2=\dfrac{\sigma}{\delta}$.

Хотя функции $\operatorname{sat}_{\bar{u}}(y)$ и $\varphi_{\sigma,\delta}(y)$ вполне определенные, удобно рассматривать целый класс функций, удовлетворяющих секторному условию. Абсолютная устойчивость в секторе (5) гарантирует асимптотическую стойчивость нулевого состояния равновесия каждой системы с нелинейностью, удовлетворяющей секторному условию и, в частности, с данной конкретной нелинейностью. При этом условия устойчивости могут оказаться слишком консервативными, однако это часто окупается простотой анализа.

В случае стационарной нелинейности для анализа абсолютной устойчивости можно использовать функцию Ляпунова из более широкого класса

$$v_{LP}(x)=x^TPx+\theta\int_0^{c^Tx}\varphi(y)dy. \tag{7.12}$$

Функция вида (12) называется функцией Лурье–Постникова. Ее производная в силу системы (1) имеет вид

$$\dot{v}_{LP}(x,u)=(2x^TP+\theta uc^T)(Ax+bu). \tag{7.13}$$

Для проверки условия $\dot{v}_{LP}(z)<0$ при $z\neq 0$ и ограничении (8) воспользуемся S-процедурой. С этой целью составим квадратичную форму

$$\begin{aligned}s_{\tau,LP}(z)&=\dot{v}_{LP}(x,u)+\tau(u-k_1c^Tx)(k_2c^Tx-u)=\\&=(2x^TP+\theta uc^T)(Ax+bu)+\tau(u-k_1c^Tx)(k_2c^Tx-u).\end{aligned} \tag{7.14}$$

Параметрами, подлежащими определению, являются $P>0$, $\tau>0$, θ. Применяя рассуждения, подобные тем, которые мы проводили при анализе знакоопределенности $s_\tau(z)$ в случае квадратичных функций Ляпунова, получаем, что можно ограничиться случаем $\tau=1$. Таким образом, приходим к задаче о поиске матрицы P и вещественного числа θ, удовлетворяющих неравенству $s_{1,LP}(x,u)<0$ при $(x,u)\neq 0$ или, другими словами, о решении ЛМН

$$S_{LP}(P,\theta)=\begin{pmatrix} PA+A^TP-k_1k_2cc^T & Pb+\dfrac{\theta}{2}A^Tc+\dfrac{k_1+k_2}{2}c \\ b^TP+\dfrac{\theta}{2}c^TA+\dfrac{k_1+k_2}{2}c^T & \dfrac{\theta}{2}(b^Tc+c^Tb)-1 \end{pmatrix}<0 \quad (7.15)$$

относительно матрицы P и числа θ. Заметим, что если в (15) положить $\theta=0$, то получится ЛМН (11). Таким образом, если нелинейная характеристика $\varphi(y)$ стационарна, то к анализу абсолютной устойчивости можно применить более общий по сравнению с квадратичными формами класс функций Ляпунова и, следовательно, получить менее ограничительные или, как говорят, менее консервативные условия абсолютной устойчивости.

Таким образом, рассмотрены условия, обеспечивающие отрицательную определенность производной $\dot{v}_{LP}(x,u)$, однако требуется рассмотреть также положительную определенность самой функции $v_{LP}(x)$. В связи с этим возникают следующие два вопроса:

а) нужно ли для обеспечения положительной определенности $v_{LP}(x)$ наряду с (15) дополнительно требовать выполнения условия $P>0$?

б) нужно ли требовать выполнения условия $\theta\geqslant 0$?

Поскольку абсолютная устойчивость системы (1) – (3) в секторе (5) предполагает, в частности, асимптотическую устойчивость системы (4) при любой линейной характеристике из сектора (5), то необходимым условием абсолютной устойчивости является гурвицевость матриц

$$A_1=A+k_1bc^T,\ A_2=A+k_2bc^T\ ,$$

соответствующих линейным характеристикам $u=k_1c^Tx$ и $u=k_2c^Tx$, ограничивающим сектор. Далее, поскольку отрицательная определенность (14) должна выполняться при любых значениях x, u, то она выполняется, в частности, при $u=k_1c^Tx$ и $u=k_2c^Tx$. После подстановки в (14) получаем

$$(P+\frac{\theta}{2}k_1cc^T)A_1+A_1(P+\frac{\theta}{2}k_1cc^T)<0,\ (P+\frac{\theta}{2}k_2cc^T)A_2+A_2(P+\frac{\theta}{2}k_2cc^T)<0\,.$$

В силу гурвицевости матриц A_1, A_2 получаем положительную определенность

$$(P+\frac{\theta}{2}k_1cc^T)>0,\ (P+\frac{\theta}{2}k_2cc^T)>0. \qquad (7.16)$$

Из (12) с учетом (5) следует

$$\frac{k_1}{2}(c^Tx)^2 \leqslant \int_0^{c^Tx}\varphi(y)dy \leqslant \frac{k_2}{2}(c^Tx)^2 .$$

Тогда при $\theta \geqslant 0$ имеем

$$x^TPx+\frac{\theta}{2}k_1(cx^Tx)^2 \leqslant x^TPx+\theta\int_0^{c^Tx}\varphi(y)dy \leqslant x^TPx+\frac{\theta}{2}k_2(c^Tx)^2,$$

и при $\theta<0$ имеем

$$x^TPx+\frac{\theta}{2}k_2(c^Tx)^2 \leqslant x^TPx+\theta\int_0^{c^Tx}\varphi(y)dy \leqslant x^TPx+\frac{\theta}{2}k_1(c^Tx)^2.$$

Из последних двух неравенств с учетом неравенств (16) следуют неравенства

$$v_{LP}(x) \geqslant x^T(P+\frac{\theta}{2}k_1cc^T)x>0,\ \ x\neq 0,\ \theta\geqslant 0,$$

$$v_{LP}(x) \geqslant x^T(P+\frac{\theta}{2}k_2cc^T)x>0,\ x\neq 0, \theta<0.$$

Окончательно, приходим к следующему утверждению

Предложение 7.1. *Если* P *и* θ *удовлетворяют ЛМН* (15) *и матрицы* A_1 *и* A_2 *гурвицевы, то функция* $v_{LP}(x)$ *положительно определена.*

Заметим, что в силу «неущербности» S-процедуры с одной связью, разрешимость (15) устанавливает необходимые и достаточные условия существования функции Лурье–Постникова с отрицательно определенной производной в области, определенной одним квадратичным секторным ограничением.

7.2. Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями. Достаточные условия существования функций Лурье-Постникова. Рассмотрим обобщение задачи абсолютной устойчивости, рассмотренной в предыдущем разделе. Пусть теперь система, изображенная на рис. 7.1, состоит из линейной части и нескольких нелинейных элементов, каждый из которых удовлетворяет секторному условию. Объект управления задается уравнением

$$\dot{x}=Ax+Bu, \qquad (7.17)$$

где теперь B – матрица размера $n \times m$, u – векторное управление размерности m. Зависимость x и u от времени для краткости опущена. Уравнение (17) определяет линейную часть системы со многими входами. Выход системы также векторный и имеет ту же размерность

$$Y = C^T x, \tag{7.18}$$

где C – матрица размера $n \times m$, Y – m-мерный векторный выход системы. Каждый из выходов системы соединен с одним входом:

$$u_i(t) = \varphi_i(t, y_i), i = 1, \ldots, m,$$

где u_i и y_i – i-е компоненты векторов U и Y соответственно. Относительно нелинейных характеристик $\varphi_i(t, y_i)$ будем, как и раньше, предполагать принадлежность их графиков секорам для любого момента времени. Однако, для простоты изложения ограничимся случаем секторов, ограниченных осью абсцисс и прямой $u_i = k_i y_i$. Итак, предполагаем, что выполняются условия

$$\varphi_i(t, 0) = 0 \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \frac{\varphi_i(t, y_i)}{y_i} \leqslant k_i \quad \text{для} \quad y_i \neq 0, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{7.19}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая стационарных нелинейных элементов $\varphi_i(y_i)$ и функций Ляпунова типа Лурье–Постникова, т.е. квадратичных форм с добавлением интегралов от нелинейностей

$$v_{LP}(x) = x^T P x + \sum_{i=1}^{m} \theta_i \int_0^{c_i^T x} \varphi_i(y) dy. \tag{7.20}$$

Случай нестационарных нелинейных элементов $\varphi_i(t, y_i)$ и квадратичных функций Ляпунова получится как частный случай при $\theta_i = 0$.

Обозначим $\Theta = \mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_m)$ диагональную матрицу, составленную из чисел θ_i. Производная функции (20) в силу системы (17) имеет вид

$$\dot{v}_{LP}(x, u) = (2x^T P + u^T \Theta C^T)(Ax + Bu). \tag{7.21}$$

Составим $(n+m)$-мерный вектор z из вектора x и вектора u. Получим $z^T = (x^T, u^T)$. Для проверки отрицательной определенности $\dot{v}_{LP}(z)$ при m квадратичных ограничениях

$$q_i(z) = q_i(x, u) = u_i(k_i c^T{}_i x - u_i) \geqslant 0, \quad i = 1, \ldots, m \tag{7.22}$$

воспользуемся S -процедурой. Составим квадратичную форму

$$
\begin{aligned}
s_{\tau,LP}(z) &= \dot v_{LP}(x,u) + \sum_{i=1}^{m} \tau_i u_i (k_i c_i^T x - u_i) = \\
&= (2x^T P + u^T \Theta C^T)(Ax + Bu) + \sum_{i=1}^{m} \tau_i u_i (k_i c_i^T x - u_i),
\end{aligned} \tag{7.23}
$$

где параметры $\tau_i \geqslant 0$ подлежат определению наряду с матрицами P и Θ. Обозначим $T = \mathrm{diag}(\tau_1,\ldots,\tau_m)$ и $K = \mathrm{diag}(k_1,\ldots,k_m)$.

С учетом требования отрицательной определенности функции $s_{\tau,LP}(z)$, определенной выражением (23), приходим к задаче о поиске симметричной матрицы P и диагональных матриц Θ и $T \geqslant 0$, удовлетворяющих ЛМН

$$
S_{LP}(P) = \begin{pmatrix} PA + A^T P & PB + \frac{1}{2} A^T C \Theta + \frac{1}{2} CKT \\ B^T P + \frac{1}{2} \Theta C^T A + \frac{1}{2} TKC^T & \frac{1}{2}(B^T C \Theta + \Theta C^T B) - T \end{pmatrix} < 0 . \tag{7.24}
$$

Поскольку *S*-процедура с несколькими связями ущербна [15], то разрешимость (24) устанавливает только достаточные условия существования функции Лурье–Постникова с отрицательно определенной производной в области, определенной несколькими квадратичными секторными ограничениями. Заметим. что термин «ущербность *S*-процедуры» введен в работах В.А. Якубовича, ссылки на которые содержатся в [15].

7.3. Абсолютная устойчивость систем со многими нелинейностями. Необходимые и достаточные условия существования функций Лурье-Постникова. В предыдущем разделе для получения достаточных условий знакоопределенности производной функции Лурье–Постникова в силу системы управления с несколькими нелинейными элементами, подчиненными секторным ограничениям, использовалась S-процедура, которая не учитывала специальный вид этих ограничений. Квадратичные формы, задающие ограничения (22), представляют собой произведение двух линейных форм u_i и $k_i c_i^T x - u_i$. Учет этого свойства позволяет получить необходимые и достаточные условия знакоопределенности квадратичной формы (21) в области, определенной ограничениями (22). Решению этой алгебраической задачи посвящены, например, работы [69–71].

Сначала предположм, что матрицы B и C имеют полный ранг: $\operatorname{rank} B = m$, $\operatorname{rank} C = m$. Это предположение в дальнейшем будет снято.

Как и ранее, считаем, что $(n+m)$-мерный вектор z составлен из векторов x и u. Обозначим через $M = \{1, \cdots, m\}$ множество индексов. Для любого подмножества $M' \subseteq M$ обозначим

$$A(M') = A + \sum_{i \in M'} k_i b_i c_i^T, \; P(M') = P + \frac{1}{2} \sum_{i \in M'} k_i \theta_i c_i c_i^T . \qquad (7.25)$$

Из абсолютной устойчивости системы (17), (18) при секторных ограничениях (19) следует устойчивость при любой комбинации линейных характеристик, ограничивающих секторы. Следовательно, любая из матриц $A(M')$ (всего таких матриц 2^m – по числу подмножеств M') должна быть гурвицевой. Это необходимое условие абсолютной устойчивости.

Пусть $m \geq 2$. Выберем два индекса $i_1, i_2 \in M$. Не ограничивая общности, считаем $i_1 = 1$, $i_2 = 2$. Из предположения о полноте ранга B следует, что векторы b_1 и b_2 неколлинеарны. Определим два вектора $z^{(1)}, z^{(2)} \in R^{n+m}$ соотношениями

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} -A^{-1}b_1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; z^{(2)} = \begin{pmatrix} -A^{-1}b_2 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку матрица A гурвицева, то обратная A^{-1} существует. Из (17) видно, что $\dot{v}_{LP}(z^{(1)}) = \dot{v}_{LP}(z^{(2)}) = 0$ и, более того, для любого вещественного числа α имеет место

$$\dot{v}_{LP}(z(\alpha)) = 0 \quad \text{где} \quad z(\alpha) = \alpha z^{(1)} + (1-\alpha) z^{(2)} = \begin{pmatrix} y + \alpha w \\ \alpha \\ 1-\alpha \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (7.26)$$

где $y = -A^{-1}b_2$, $w = A^{-1}(b_2 - b_1)$.

Обозначим через Ω множество векторов z, удовлетворяющих ограничениям (22). Для двух непересекающихся подмножеств индексов $M' \subseteq M$ и

$M'' \subseteq M$, $M' \cap M'' = \varnothing$ через $\Omega(M', M'')$ обозначим подмножество множества Ω, определенное следующим выражением

$$\Omega(M', M'') = \left\{ z = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} : u_i = 0 \text{ при } i \in M' \text{ и } u_i = k_i c_i^T x \text{ при } i \in M'' \right\},$$

т.е. для индексов секторных ограничений из множества M' переменная u_i принимает значение, отвечающее нижней границе сектора, а для индексов ограничений из множества M'' эта переменная принимает значения, отвечающие верхней границе сектора.

Если множество M' или M'' состоит из единственного индекса, то получим множества

$$\Omega(\{i\}, \varnothing) = \left\{ z \in \Omega : u_i = 0 \right\}, \ \Omega(\varnothing, \{i\}) = \left\{ z \in \Omega : u_i = k_i c_i^T x \right\},$$

которые назовем *гранями* множества Ω. Поскольку грани принадлежат самому множеству Ω, то отрицательная определенность на гранях необходима для отрицательной определенности $\dot{v}_{LP}(z)$ на всем Ω. Оказывается, что при $m \geq 2$ этого также и достаточно. Действительно, предположим, что $\dot{v}_{LP}(z)$ отрицательно определена на гранях, но не является отрицательно определенной на самом множестве. Тогда найдется такой вектор $z^* \in \Omega$, $z^* \notin \Omega(\{i\}, \varnothing)$, $z^* \notin \Omega(\varnothing, \{i\})$, $i = 1, \cdots, m$, что $\dot{v}_{LP}(z^*) \geq 0$. Итак, имеем вектор z^*, принадлежащий внутренности (без граней) множества Ω, на котором $\dot{v}_{LP}(z)$ неотрицательна, и однопараметрическое семейство векторов $z(\alpha)$, определенных (26), на которых $\dot{v}_{LP}(z)$ тождественно (для всех α) равна нулю. Выясним, какие значения принимают квадратичная форма $q_1(z)$, определенная (22), на векторе $z(\alpha)$. Имеем

$$q_1(z(\alpha)) = \alpha(k_1 c_1^T y + \alpha k_1 c_1^T w - \alpha),$$
$$q_2(z(\alpha)) = (1-\alpha)(k_2 c_2^T y + \alpha k_2 c_2^T w - (1-\alpha)).$$

Если предположить, что $k_1 c_1^T y + \alpha k_1 c_1^T w - \alpha \equiv 0$ при всех значениях α, то $z(\alpha) \in \Omega(\varnothing, \{1\})$, что противоречит $\dot{v}_{LP}(z(\alpha)) = 0$ и отрицательной определенности $\dot{v}_{LP}(z)$ на $\Omega(\varnothing, \{1\}$. Следовательно $k_1 c_1^T y + \alpha k_1 c_1^T w - \alpha$ не равно тождественно нулю и принимает положительные и отрицательные значения. Поэтому найдется такое α', что $q_1(z(\alpha')) < 0$ и, следовательно, $z' = z(\alpha') \notin \Omega$.

Итак, имеем два вектора, z^*и z', на которых квадратичная форма $\dot{v}_{LP}(z)$ принимает неотрицательные значения. Первый из них принадлежит внутренней части множества Ω за исключением граней. Второй не принадлежит Ω. Соединим эти два вектора отрезком:

$$y(\lambda) = \lambda z^* + (1-\lambda)z',\ 0 \le \lambda \le 1.$$

При этом найдется такое значение $\bar{\lambda}$, что $y(\bar{\lambda})$ принадлежит какой-нибудь грани. Поскольку $\dot{v}_{LP}(z) = z^T Dz$ для некоторой матрицы D, то $\dot{v}_{LP}(y(\bar{\lambda})) = \bar{\lambda}^2 \dot{v}_{LP}(z^*) + 2\bar{\lambda}(1-\bar{\lambda}) z^{*T} Dz' + (1-\bar{\lambda})^2 \dot{v}_{LP}(z')$. Заменив, если нужно, z^* на $-z^*$, получим $z^{*T} Dz' \ge 0$ и, следовательно, $\dot{v}_{LP}(y(\bar{\lambda})) \ge 0$, что противоречит отрицательной определенности $\dot{v}_{LP}(z)$ на гранях множества Ω. Итак, доказано следующее предложение.

Предложение 7.2. *Если* $m \ge 2$, *то для отрицательной определенности квадратичной формы* $\dot{v}_{LP}(z)$ *на множестве* Ω *необходима и достаточна ее отрицательная определенность на его гранях*.

Требуя отрицательную определенность $\dot{v}_{LP}(z)$ на грани $\Omega(\{i\},\varnothing)$ приходим к задаче, аналогичной исходной задаче о знакоопределенности (21) при ограничениях (22), но имеющей на одну переменную u_i меньше:

$$\left(2x^T P + \sum_{j \in M \setminus \{i\}} u_j \theta_j c_j{}^T\right)\left(Ax + \sum_{j \in M \setminus \{i\}} u_j b_j\right) < 0$$

при $m-1$ квадратичных ограничениях

$$u_j(k_j c_j{}^T x - u_j) \ge 0, \quad j \in M \setminus \{i\}. \tag{7.27}$$

Аналогично, требуя отрицательную определенность $\dot{v}_{LP}(z)$ на грани $\Omega(\varnothing,\{i\})$, приходим к задаче

$$\left(2x^T P(\{i\}) + \sum_{j \in M \setminus \{i\}} u_j \theta_j c_j{}^T\right)\left(A(\{i\})x + \sum_{j \in M \setminus \{i\}} u_j b_j\right) < 0.$$

при $m-1$ квадратичных ограничениях (27). Матрицы $A(\{i\})$ и $P(\{i\})$ опрелелены выражением (25) при $M' = \{i\}$. Применяя предложение 7.1 по индукции и последовательно сокращая количество переменных u_i и, следовательно, количество квадратичных ограничений, придем к последовательности задач об отрицательной определенности квадратичных форм при единственном квадратичном ограничении, для которых предложение 7.2 неприменимо. Для каждого индекса i должны быть отрицательно определены 2^{m-1} квадратичных форм

$$\left(2x^T P(M') + u_i \theta_i c_i^T\right)\left(A(M')x + u_i b_i\right) \tag{7.28}$$

для всевозможных подмножеств $M' \subseteq M \setminus \{i\}$ при единственном секторном квадратичном ограничении

$$u_i(k_i c_i^T x - u_i) \geq 0.$$

Для задачи о знакоопределенности при единственном квадратичном ограничении можно применить *S*-процедуру, неущербную при одном ограничении. Поступим по-другому, используя специфику секторного ограничения. Для отрицательной определенности квадратичной формы (13) при одном ограничении

$$u(kc^T x - u) \geq 0 \tag{7.29}$$

необходимым условием явлется ее отрицательная определенность при $u = 0$ и $u = kc^T x$, или, другими словами,

$$PA + A^T P < 0,\ P_1 A_1 + A_1^T P_1 < 0, \tag{7.30}$$

где $P_1 = \left(P + \frac{1}{2}\theta kcc^T\right)$, $A_1 = \left(A + kbc^T\right)$. Имеет место

Предложение 7.3. *Для отрицательной определенности квадратичной формы* (13) *при ограничении* (29) *необходимо и достаточно выполнения условий* (30) *и условия*

$$kc^T A^{-1} + 1 > 0. \tag{7.31}$$

Действительно, обозначим

$$z^{(1)} = \begin{pmatrix} -A^{-1}b_1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем $\dot{v}_{LP}(z^{(1)}) = 0$. Условие (31) означает, что вектор $z^{(1)}$ не удовлетворяет ограничению (29) что, очевидно, необходимо для утверждения предложения 7.2. Пусть теперь условия (30) и (31) выполняются. Предположим, что найдется такой вектор z^*, удовлетворяющий ограничению (29), что $\dot{v}_{LP}(z^*) \geq 0$. Из (30) следует, что $\dot{v}_{LP}(z^*) < 0$ на границе области (29). Поэтому $z^{(1)}$ принадлежит внутренней части этой области. Пусть

$$y(\lambda) = \lambda z^* + (1-\lambda)z^{(1)},\ 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось при доказательстве предложения 7.2, получим, что найдется такое λ', что $y' = y(\lambda')$ принадлежит границе области (29) и $\dot{v}_{LP}(y') \geq 0$, а этого не может быть в силу (30). Противоречие доказывает утверждение предложения 7.2.

Поскольку по лемме Шура $\det(A_1) = \det(A)(kc^T A^{-1} + 1)$, то условие (31) эквивалентно условию

$$\operatorname{sign}\left(\det(A_1)\right) = \operatorname{sign}\left(\det(A)\right). \tag{7.32}$$

Применяя предложение 7.3 и условие (32) к квадратичным формам (28), получим

Предложение 7.4. *Для отрицательной определенности квадратичной формы* (21) *при ограничениях* (22) *необходимо и достаточно выполнения условий*

$$P(M')A(M') + A^T(M')P(M') \prec 0, \tag{7.33}$$

$$\operatorname{sign}\left(\det(A(M'))\right) = \operatorname{sign}\left(\det(A)\right) \tag{7.34}$$

для всех подмножеств $M' \subseteq M$.

Условия (33) представляют собой систему из 2^m ЛМН относительно матрицы P и чисел θ_i, $i = 1, \ldots, m$.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий, насколько необходимые и достаточные условия, которые дает предложение 7.4, могут быть менее ограничительными, чем только достаточные условия, которые дает решение ЛМН (24). Пусть $n = 3,\ m = 2$ и

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}. \tag{7.35}$$

Нас интересует множество значений $k_1, k_2 \geq 0$, ограничивающих секторы (22), при которых существует функция Лурье–Постникова (20) с отрицательно определенной в этих секторах производной (21). На рис. 7.4 приводится сравнение областей абсолютной устойчивости системы (35).

Множество значений (k_1, k_2), для которых разрешимо ЛМН (24), обозначим через Γ^s. Видно, что вместе с любой точкой (k_1, k_2) это множество содержит целый прямоугольник $\Pi_{k_1 k_2} = \{(k_1', k_2') : 0 \leq k_1' \leq k_1,\ 0 \leq k_2' \leq k_2\}$. Поэтому достаточно найти границу множества K^s, которую определим как множество таких точек (k_1^*, k_2^*), которые не содержатся ни в каком другом прямоугольнике, содержащемся в Γ^s, кроме $\Pi_{k_1^* k_2^*}$.

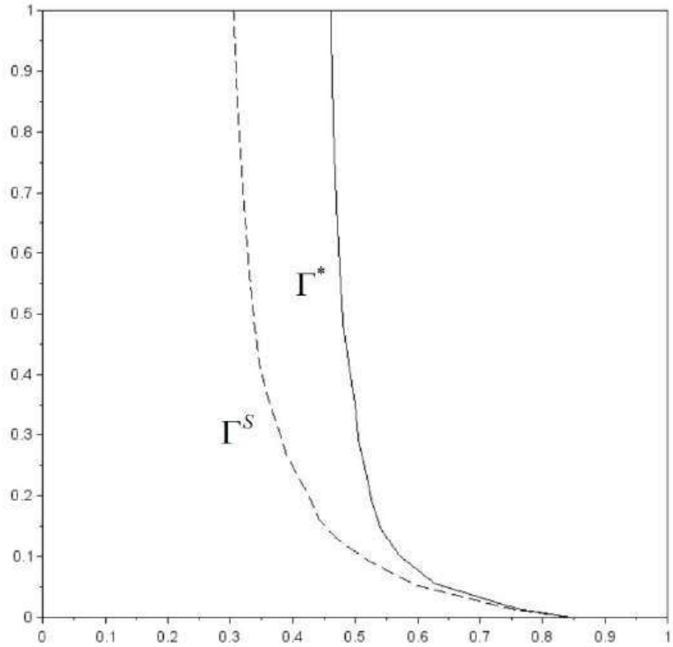

Рис. 7.4. Сравнение областей абсолютной устойчивости системы (35) на плоскости k_1 (ось абсцисс) k_2 (ось ординат)

Границу области (k_1, k_2), для которых выполняются условия предложения 7.4, обозначим через Γ^s. Для ее построения можно воспользоваться следующим приемом. Определим семейство единичных векторов $e_i = (\sin\varphi_i, \cos\varphi_i)^T$, где $\varphi_i = \dfrac{i\pi}{2M}$, $i = 0, \ldots, M$ углы из отрезка $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Векторы e_i заполняют первый квадрант плоскости k_1, k_2. Для каждого такого вектора определяется γ_i^* как точная верхняя грань таких γ, при которых ЛМН (24) разрешимо при $k_1 \gamma \sin\varphi_i$, $k_2 = \gamma \cos\varphi_i$. Последовательно решается ЛМН (24) для увеличивающихся с некоторым шагом значений γ до тех пор, пока его удается решить. Множество векторов $\gamma_i^* e_i$ служит приближением границы $\gamma_i^* e_i$, которая изображена на рисунке 7.4 пунктирной линией. Аналогично строится граница области разрешимости системы ЛМН (33) и выполнения условий (34). Эта граница, обозначенная Γ^*, изображена сплошной линией. Полные области Γ^s и Γ^* ограничены первым квадрантом плоскости и своими границами. Видно, что обе области содержат целую полуось ординат, поскольку система (35) оказалась абсолютно устойчивой при как угодно больших значениях k_2, если $k_1 = 0$.

Как следует из рис. 7.4, область, определенная необходимыми и достаточными условиями, шире области, полученной с помощью *S*-процедуры. Для проверки разрешимости ЛМН был использован пакет YALMIP в среде математических вычислений MATLAB.

Условия абсолютной устойчивости часто применяются в тех случаях, когда объект управления нелинеен и точно определен. Пусть требуется построить стабилизирующий закон управления. Наряду с данной конкретной нелинейностью можно рассмотреть класс нелинейностей (19), которому принадлежит данная конкретная нелинейность. Задача стабилизации нелинейной системы заменяется на задачу поиска обратной связи, обеспечивающей абсолютную устойчивость системы в смысле определения 7.1. Таким образом, данная конкретная нелинейная система погружается в класс систем с нелинейностями, подчиненными секторным ограничениям.

§ 8. Примеры исследования устойчивости

Пример 8.1. С помощью определения устойчивости в смысле Ляпунова показать, что каждое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}=0 \tag{8.1}$$

устойчиво.

Решение. Запишем решение $x_1(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $x_1(t_0)=x_1^0$, в виде $x_1(t_0)\equiv x_1^0=\text{const}$.

Рассмотрим другое решение $x_2(t)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$x_2(t_0)=x_2^0.$$

Для указанных решений имеем $\left|x_2(t)-x_1(t)\right|=\left|x_2^0-x_1^0\right|$ для всех *t*. Поэтому для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$, например, $\delta=\varepsilon$ такое, что как только $\left|x_2^0-x_1^0\right|<\delta$, то для решений $x_2(t)$ и $x_1(t)$ будет выполняться неравенство

$$\left|x_2(t)-x_1(t)\right|=\left|x_2^0-x_1^0\right|<\varepsilon \text{ при всех } t\geq t_0.$$

Следовательно, любое решение уравнения (1) устойчиво. Однако устойчивость является неасимптотической, поскольку не выполнено условие:

$$\left|x_2(t)-x_1(t)\right|=\left|x_2^0-x_1^0\right|\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

Пример 8.2. Показать, что каждое решение уравнения

$$\frac{dx}{dt}+x=0 \tag{8.2}$$

асимптотически устойчиво.

Решение. Запишем общее решение уравнения:

$$x(t)=Ce^{-t},$$

где $C=\text{const}$. Решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ уравнения (2), удовлетворяющие начальным условиям $x_1(t_0)=x_1^0$, $x_2(t_0)=x_2^0$, имеют вид $x_1(t_0)=x_1^0e^{-(t-t_0)}$, $x_2(t_0)=x_2^0e^{-(t-t_0)}$. Имеем $\left|x_2(t)-x_1(t)\right|=\left|x_2^0-x_1^0\right|e^{-(t-t_0)}\to 0$ при всех $t\to+\infty$, откуда следует асимптотическая устойчивость любого решения уравнения (2).

Пример 8.3. Пусть семейство траекторий системы двух нелинейных дифференциальных уравнений состоит из прямых x_2 = const в четвертом квадранте, а в остальных квадрантах описывается уравнением $\rho = \rho(\varphi, C)$, где ρ монотонно убывает при изменении φ от $\frac{3}{2}\pi$ до 0 (рис. 8.1). Стрелками обозначено направление возрастания t. При $t \to \infty$ все траектории стремятся к точке (0, 0). Исследовать нулевое решение на устойчивость.

Решение. Нулевое решение устойчиво, так как всякая траектория, начинающаяся внутри круга ω_ε радиуса ε, будет с ростом t продолжать оставаться в этом круге, здесь $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Пример 8.4. Пусть семейство траекторий системы двух нелинейных дифференциальных уравнений состоит из прямых x_2 = const в четвертом квадранте, а в остальных квадрантах описывается уравнением $\rho = \rho(\varphi, C)$, где ρ монотонно убывает при изменении φ от $\frac{3}{2}\pi$ до 0 (рис. 8.1). При $t \to \infty$ все траектории стремятся к точке (0, 0). Исследовать нулевое решение на устойчивость.

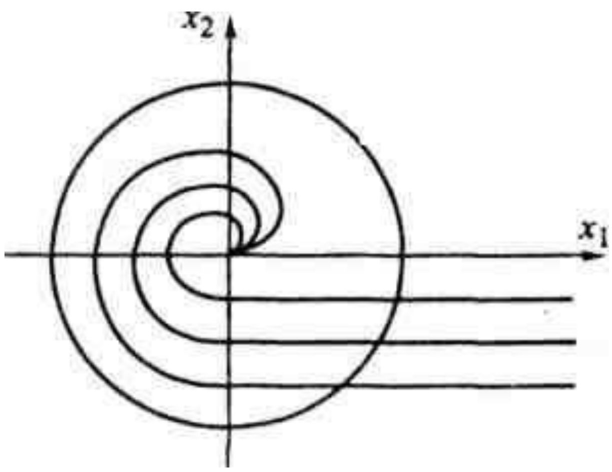

Рис. 8.1. Семейство траекторий в плоскости (x_1, x_2)

Решение. Нулевое решение устойчиво, так как всякая траектория, начинающаяся внутри круга ω_ε радиуса ε, будет с ростом t продолжать оставаться в этом круге, здесь $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$.

Пример 8.5. Исследовать на устойчивость и асимптотическую устойчивость нулевое решение системы, общее решение которой имеет вид:

$$x_1 = C_1 \cos^2 t - C_2 e^{-t},\qquad x_2 = -2C_1 \cos t \sin t + C_2 e^{-t}. \tag{8.4}$$

Решение. В соответствии с (4) имеем

$$x_1 = \left[x_1(0) + x_2(0)\right] \cos^2 t - x_2(0) e^{-t},$$
$$x_2 = -2\left[x_1(0) + x_2(0)\right] + x_2(0)\, e^{-t}.$$

Следовательно, $\left|x_1(t)\right| < \left|x_1(0)\right| + 2\left|x_2(0)\right| < \varepsilon$, $\left|x_2(t)\right| < 2\left|x_1(0)\right| + 3\left|x_2(0)\right| < \varepsilon$ при $\left|x_1(0)\right| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon)$, $\left|x_2(0)\right| < \frac{\varepsilon}{5} = \delta(\varepsilon)$, а это означает, что тривиальное решение устойчиво. Но устойчивость является неасимптотической, поскольку x_1 и x_2 не стремятся к нулю при $t \to \infty$ ни при каких начальных значениях, отличных от нуля.

Пример 8.6. В плоскости параметров α и β найти области, в которых устойчиво нулевое решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + (\beta - 2\alpha\beta - 1)\, y, \\ \dot{y} = x - \beta y. \end{cases}$$

Решение. Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$\begin{vmatrix} \alpha - k & \beta - 2\alpha\beta - 1 \\ 1 & -\beta - k \end{vmatrix} = 0,$$

или $k^2 + (\beta - \alpha)k + 1 + \alpha\beta - \beta = 0$. Здесь $b = \beta - \alpha$, $c = 1 + \alpha\beta - \beta$. Величины b, c непрерывно зависят от α и β, поэтому знаки будут меняться там, где $b = c = 0$, то есть на прямой β – α = 0 и на гиперболе 1 + αβ – β = 0. Эти линии разбивают

плоскость параметров α и β на четыре области I, II, III, IV (рис. 8.2), в каждой из которых знаки b, c постоянны. Возьмем по одной произвольной точке в каждой области и определим в этих точках знаки коэффициентов b, c.

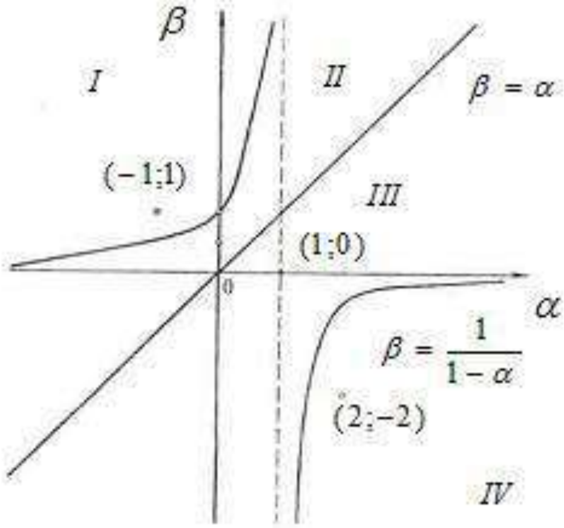

Рис. 8.2. Плоскость параметров (α, β)

Область I: в точке (–1; 1) имеем $b = 2 > 0$, $c = -1 < 0$. Нулевое решение системы в этой области неустойчиво.

Область II: в точке (0; 1/2) имеем $b = 1/2 > 0$, $c = 1/2 > 0$. Нулевое решение системы в этой области асимптотически устойчиво.

Область III: в точке (1; 0) имеем $b = -1 < 0$, $c = 1 > 0$. Нулевое решение системы в этой области неустойчиво.

Область IV: в точке (2; –2) имеем $b = -4 < 0$, $c = -1 < 0$. Нулевое решение системы в этой области неустойчиво.

Исследуем на устойчивость нулевое решение на границах рассмотренных выше областей:

а) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha < 1$ (граница между областями I и II). На этой границе $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 = 0$, так что нулевое решение на ней устойчиво, но не асимптотически;

б) $\beta = \alpha$ (граница между областями II и III). На этой границе $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 > 0$, так что нулевое решение на ней устойчиво, но не асимптотически;

в) $\beta = \dfrac{1}{1-\alpha}$, $\alpha > 1$ (граница между областями III и IV). На этой границе $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 = 0$, так что нулевое решение на ней неустойчиво.

Таким образом, нулевое решение асимптотически устойчиво в области II и устойчиво, но не асимптотически, на границе II.

Пример 8 .7. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -(x-2y)(1-x^2-3y^2), \\ \dfrac{dy}{dt} = -(y+x)(1-x^3-3y^2). \end{cases}$$

(8.5)

Решение. Выберем для системы (5) в качестве функции Ляпунова функцию $V = x^2 + y^2$. Она является, во-первых, положительно определенной, а, во-вторых, для ее производной, найденной в силу системы, имеем

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} =$$

$$= 2x(2y-x)(1-x^2-3y^2) - 4y(x+y)(1-x^2-3y^2) =$$

$$= -2(1-x^2-3y^2)(x^2+2y^2) \le 0$$

при достаточно малых x и y. Выполнены все условия теоремы А.М. Ляпунова об устойчивости. Следовательно, нулевое решение $x_i = 0,\ y = 0$ системы (5) устойчиво.

Пример 8.8. Исследовать на устойчивость нулевое решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -5y - 2x^3, \\ \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y^3. \end{cases}$$

(8.6)

Решение. Функция $V = x^2 + y^2$, выбранная для системы (6), удовлетворяет условиям теоремы А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости:

1) $V(x, y) \ge 0$, $V(0, 0) = 0$;

2) $\dfrac{dV}{dt} = 2x(-5y-2x^3) + 2y(5x-3y^3) = -(4x^4+6y^4) \le 0$, т.е. $\dfrac{dV}{dt} < 0$ и $\dfrac{dV}{dt} = 0$

только при $x = 0,\ y = 0$, и значит, $\dfrac{dV}{dt}$ является отрицательно определенной функцией. Следовательно, решение $x = 0,\ y = 0$ системы (6) асимптотически устойчиво.

Пример 8.9. Дана система уравнений

$$\begin{cases} x = ax^3 + by, \\ y = -cx + dy^3. \end{cases} \tag{8.7}$$

Найти для системы (7) функцию Ляпунова в виде $V(x, y) = F_1(x) + F_2(y)$, где $F_1(x)$, $F_2(x)$ – дифференцируемые функции.

Решение. Производная $\frac{dV}{dt}$ в силу системы (7) равна:

$$\dot{V} = F_1'(x)\,\dot{x} + F_2'(y)\,\dot{y} = F_1'(x)(ax^3 + by) - F_2'(y)(cx - dy^3).$$

Потребуем, чтобы функция $\dot{V}$ имела тот же тип, что и функция $V(x, y)$, т.е. чтобы и она представлялась в виде суммы двух функций – одной, зависящей только от x, другой – только от y. Для этого необходимо, чтобы имело место тождество

$$F_1'(x)\,by - F_2'(y)\,cx \equiv 0.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{by}{F_2'(y)},$$

и, следовательно, каждая из дробей должна быть постоянной величиной, например, равной 1/2. Тогда будем иметь $\frac{cx}{F_1'(x)} = \frac{1}{2}$, $\frac{by}{F_2'(y)} = \frac{1}{2}$, откуда $F_1(x) = cx^2$, $F_2(y) = by^2$, так что $V(x, y) = cx^2 + by^2$.

Пример 8.10. Исследовать устойчивость нулевого решения системы Лоренца

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \tag{8.8}$$

где $b, r, \sigma > 0$.

Решение. Нетрудно проверить, что положениями равновесия системы Лоренца (8) являются следующие точки: $(0, 0, 0)$, $\left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$ и $\left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1\right)$. Условие существования ненулевых положений равновесия задается неравенством $r > 1$. При некоторых значениях параметров в системе (8) возникают хаотические движения. Известно, что при значениях параметров $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ аттрактор системы Лоренца имеет так называемую фрактальную структуру [65].

Исследуем устойчивость по Ляпунову нулевого положения равновесия системы (8). Выпишем для этого линейную часть системы Лоренца с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial m_1}{\partial x} & \frac{\partial m_1}{\partial y} & \frac{\partial m_1}{\partial z} \\ \frac{\partial m_2}{\partial x} & \frac{\partial m_2}{\partial y} & \frac{\partial m_2}{\partial z} \\ \frac{\partial m_3}{\partial x} & \frac{\partial m_3}{\partial y} & \frac{\partial m_3}{\partial z} \end{pmatrix},$$

где $m_1(x, y, z)$, $m_2(x, y, z)$, $m_3(x, y, z)$ – правые части системы Лоренца.

Вдоль нулевого решения получаем следующую постоянную матрицу

$$M = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Следовательно, линейная часть системы Лоренца в окрестности положения равновесия $O = (0, 0, 0)$ имеет вид

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y,$$
$$\dot{y} = rz - y,$$
$$\dot{z} = -bz.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(b+\lambda)\left[(\sigma-\lambda)\cdot(1+\lambda)-\sigma r\right]=0.$$

Критическое значение r=1 в задаче об устойчивости нулевого решения легко определяется при условии положительности параметров b и σ. Если r меньше этой величины, то реализуется случай асимптотической устойчивости, иначе – случай неустойчивости.

Утверждение о локальной устойчивости нулевого решения при условиях $0 < r < 1$ и $b, \sigma > 0$ можно усилить. Именно, при этих условиях нулевое решение системы (8) глобально асимптотически устойчиво, являясь единственным аттрактором. Попытаемся доказать асимптотическую устойчивость нулевого решения, подбирая параметры функции Ляпунова вида $V(x) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2$. Имеем

$$\dot{V}(x) = 2c_1 x\sigma(y-x) + 2c_2 y(rx - y - xz) + 2c_3 z(xy - bz)\,. \qquad (8.10)$$

Выберем $c_1 = \dfrac{1}{2\sigma}, c_2 = c_3 = \dfrac{1}{2}$. Тогда

$$\dot{V}(x) = x(y-x) + y(rx - y - xz) + z(xy - bz) = -x^2 + (1+r)xy - y^2 - bz^2 = -(x-ay)^2 - \\ -(1-a^2)y^2 - bz^2 < 0\,,$$

где $a = \dfrac{1+r}{2} < 1$ при $0 < r < 1$. Итак, положительно определенная функция Ляпунова имеет отрицательно определенную производную. Знакоопределенность обеих функций имеет место во всем пространстве R^3. Глобальная асимптотическая устойчивость нулевого решения доказана. Таким образом, хаотическое поведение системы Лоренца при $r < 1$ невозможно. Отметим, что функция Ляпунова вида (10) для анализа устойчивости нулевого решения системы Лоренца рассмотрена в [65].

Пример 8.11. Выяснить условия устойчивости вращения твердого тела относительно угловой скорости, если уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$A\frac{dx_1}{dt} = (B-C)x_2x_3,\; B\frac{dx_2}{dt} = (C-A)(x_1 + p_0)x_3,\; C\frac{dx_3}{dt} = (A-B)(x_1 + p_0)x_2\,.$$

Решение. Уравнения линейного приближения имеют вид

$$A\frac{dx_1}{dt} = 0, \quad B\frac{dx_2}{dt} = (C-A)\,p_0x_3, \quad C\frac{dx_3}{dt} = (A-B)\,p_0x_2\,.$$

Запишем характеристическое уравнение для системы двух последних уравнений:

$$AB\lambda^2 = (A-C)(B-A)\,p_0^2 = 0\,.$$

Корни этого уравнения имеют вид

$$\lambda_{1,2} = \pm p_0\sqrt{(A-C)(B-A)}\Big/\sqrt{AB}\,.$$

При условии $B > A > C$ или $C > A > B$ корни $\lambda_{1,2}$ вещественны и один из корней положителен, следовательно, вращение вокруг средней оси неустойчиво.

Пусть вдоль оси вращения расположена малая или большая ось эллипсоида инерции. Это означает, что $A < B$, С или $A > B$, C. В этом случае оба корня являются мнимыми, следовательно, судить об устойчивости по уравнениям первого приближения нельзя.

Применим второй метод Ляпунова. В качестве функции Ляпунова возьмем функцию

$$V = \left(Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + 2Ap_0 x_1 \right)^2 \pm \left[B(B-C)x_2^2 + C(C-A)x_3^2 \right],$$

где знак плюс берется при $A < B, C$, а знак минус – при $A > B, C$.

Функция V обращается в нуль при $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ и положительна в окрестности нуля; dV/dt обращается в нуль в силу уравнений движения. Следовательно, перманентное вращение относительно большой или малой оси устойчиво.

Пример 8.12. Исследовать устойчивость одноосного гиростабилизатора, в котором с внутренней рамкой карданова подвеса связан датчик угла, измеряющий угол β поворота внутренней рамки относительно внешней.

Решение. Обозначим через α малый угол поворота внешней рамки от некоторого установившегося значения. Двигатель стабилизации создает прикладываемый к наружной рамке момент $M = -k\beta - \mu\alpha$, где k, μ – положительные константы. Пусть A – момент инерции всей системы относительно оси наружной рамки, B – момент инерции внутренней рамки вместе с ротором относительно оси внутренней рамки, углы α, β – малые величины. Линеаризованные уравнения движения гиростабилизатора будут иметь вид

$$\begin{gathered} A\dot{\alpha} + \mu\dot{\alpha} + H\dot{\beta} + k\beta = 0, \\ B\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = 0, \end{gathered} \tag{8.11}$$

где H – кинетический момент ротора.

Частное решение системы (11) определяется при $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Следовательно, уравнения (11) являются уравнениями возмущенного движения. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} A\lambda^2 + \mu\lambda & H\lambda + k \\ -H\lambda & B\lambda^2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left(AB\lambda^3 + B\mu\lambda^2 + H^2\lambda + Hk \right)\lambda = 0.$$

Наличие корня $\lambda = 0$ свидетельствует о том, что система (11) допускает нулевое частное решение.

Рассмотрим уравнение

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0,$$

где

$$a_0 = AB, \quad a_1 = B\mu, \quad a_2 = H^2, \quad a_3 = Hk.$$

Применим критерий Гурвица. Условия устойчивости имеют вид

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0,$$

откуда следуют ограничения на параметры системы. Условия $a_1 > 0$, $a_3 > 0$ выполняются. Условие $\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3$, приводящее к неравенству

$$B\mu H^2 - ABHk > 0,$$

будет выполнено, если

$$\mu H/A > k.$$

При выполнении этого условия нулевое решение уравнений возмущенного движения гиростабилизатора будет асимптотически устойчиво.

Пример 8.13. С помощью критерия Гурвица исследовать устойчивость системы уравнения, у которой характеристическое уравнение имеет следующий вид: $\lambda^4 + 4\lambda^3 + 3\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$.

Решение. В данном случае имеем

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 4 > 0, a_2 = 3 > 0, a_3 = 5 > 0, a_4 = 4 > 0,$$

следовательно, необходимое условие устойчивости выполняется.

Составим определитель 4-го порядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры имеют вид:

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -29 < 0,$$

следовательно, по критерию Гурвица система неустойчива.

Пример 8.14. Определить передаточные функции звена, описываемого уравнением $\ddot{y}-y=\dot{u}-u$.

Решение. В символической форме уравнение записывается в виде:

$$(p^2-1)y=(p-1)u\,.$$

Передаточная функция в операторной форме имеет вид:

$$W(p)=\frac{p-1}{p^2-1}=\frac{p-1}{(p-1)(p+1)}=\frac{1}{p+1}.$$

Передаточная функция в изображениях Лапласа имеет вид:

$$W(s)=W(p)|_{p=s}=\frac{1}{s+1}.$$

Пример 8.15. Исследовать на устойчивость систему управления, которая описывается следующим уравнением (y – выход, u – вход):

$$\frac{d^4y}{dt^4}+\frac{3d^3y}{dt^3}+\frac{3d^2y}{dt^2}+\frac{3dy}{dt}+2y=\frac{du}{dt}+3u.$$

Оператор дифференцирования p имеет вид: $p^kx = x^k$. Тогда

$$p^4y+3p^3y+3p^2y+3p+2y=pu+3u,$$

$$(p^4+3p^3+3p^2+3p+2)y=(p+3)u\,.$$

Передаточная функция имеет вид:

$$W(p)=\frac{p+3}{p^4+3p^3+3p^2+3p+2}\,.$$

Характеристический полином системы управления имеет вид: $\lambda^4+3\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+2$. Тогда

$$a_0=1>0,\ a_1=3>0,\ a_2=3>0,\ a_3=3>0,\ a_4=2>0\,,$$

т.е. все коэффициенты больше нуля (одного знака), следовательно, необходимое условие устойчивости выполняется.

$$\Delta_1=a_1=3>0\,,\quad \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

следовательно, по теореме Льенара–Шипара система неустойчива.

Пример 8.16. Исследовать устойчивость замкнутой системы при следующей передаточной функции разомкнутой системы: $\dfrac{2s^2+3s+1}{s^4+4s^3+s^2+2s+3}$.

Передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(s)=\frac{2s^2+3s+1}{s^4+4s^3+s^2+2s+3},$$

$$W(s)=\frac{R(s)}{S(s)}.$$

Тогда собственный оператор замкнутой системы имеет вид:

$$Q(s)=R(s)+S(s),$$

$$Q(s)=s^4+4s^3+3s^2+5s+4.$$

Характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$Q(\alpha)=\lambda^4+4\lambda^3+3\lambda^2+5\lambda+4.$$

Тогда $a_0=1>0,\quad a_1=4>0,\quad a_2=3>0,\quad a_3=5>0,\quad a_4=4>0$,

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}=-29<0,$$

следовательно, по теореме Льенара–Шипара система неустойчива.

Пример 8.17. Исследовать устойчивость замкнутой системы при следующей передаточной функции разомкнутой системы: $W(s)=\dfrac{s+5}{s^3+2s^2+s}$.

Частотная передаточная функция, вещественная и мнимая функции имеют вид:

$$W(j\omega)=\frac{j\omega+5}{(j\omega)^3+2(j\omega)^2+j\omega}=\frac{j\omega+5}{-2\omega^2+j(\omega-\omega^3)}=$$

$$=\frac{-10\omega^2+\omega^2-\omega^4-2j\omega^3-5j\omega+5j\omega^3}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}=\frac{-\omega^2(\omega^2+9)+j(3\omega^3-5\omega)}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2},$$

$$U(\omega)=\frac{-\omega^2(\omega^2+9)}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}=\frac{-\omega^2(\omega^2+9)}{4\omega^4+\omega^2(1-\omega^2)^2}=\frac{-\omega^2-9}{4\omega^2+(1-\omega^2)^2},$$

$$V(\omega)-\frac{3\omega^3-5\omega}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}=\frac{3\omega^3-5}{4\omega^3+\omega(1-\omega^2)^2}.$$

Для построения АФЧХ нужно опредeлелить координаты точек ее пересечения с осями координат и соединить эти точки плавной линией.

Необходимые расчетные данные представлены в табл. 8.1.

Таблица 8.1.

ω	0	0< ω<1	1	ω>1	∞
U(ω)	-9	<0	-2.5	<0	0
V(ω)	∞	<0	-0.5	>0	0

На основе этих данных построим АФЧХ, представленную на рис. 8.3.

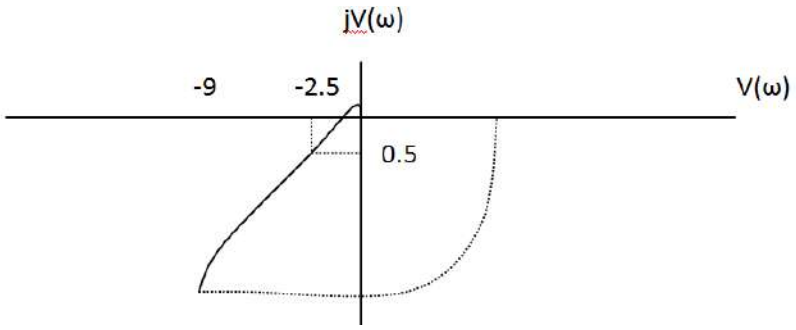

Рис. 8.3. АФЧХ для примера 8.17

Характеристический многочлен имеет вид:

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda\,,$$

характеристическое уравнение соответственно запишется в виде

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0,$$

откуда $\lambda = 0$ или $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$. Тогда $\lambda_1 = -1$, следовательно, правых корней нет, и $l = 0$.

Имеется нулевой корень. В этом случае представим передаточную функцию в виде

$$W(s) = \frac{k}{s^v}\, W_0(s),\; W_0(0) = 1,\; v \geq 1.$$

Тогда

$$W(s) = \frac{s+5}{s^3 + 2s + s} = \frac{s+5}{s^1(s^2 + 2s + 1)},$$

$$W_0(s) = s^2 + 2s + 1\,,\; W_0(0) = 1,\; v = 1.$$

В рассматриваемом примере $l = 0$ и АФЧХ, дополненная дугой $-v(\pi/2) = -\pi/2$ окружности большого радиуса, охватывает точку (-1, j0). Следовательно, замкнутая система управления по критерию Найквиста неустойчива.

§ 9. Задачи и упражнения

9.1. Пользуясь определением, исследовать на устойчивость в смысле А.М. Ляпунова решения следующих уравнений:

а) $\dfrac{dx}{dt} + x = 1,\ x(0) = 1;$

б) $\dfrac{dx}{dt} = -t(x-1),\ x(0) = 1;$

в) $\dfrac{dx}{dt} - 2x = t,\ x(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2};$

г) $\dfrac{dx}{dt} = 2xt,\ x(0) = 0;$

д) $\dfrac{dx}{dt} = \cos t,\ x(0) = 1.$

9.2. Определить, устойчивы ли нулевые решения следующих систем:

а) $\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = -y - z - v; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dot{y} = z, \\ \dot{z} = v, \\ \dot{v} = w, \\ \dot{w} = y. \end{cases}$

9.3. Исследовать на устойчивость решения следующих уравнений:

а) $\dot{x} = 4x - t^2 x,\ x(0) = 0;$

б) $2t\,\dot{x} = x - x^3,\ \ x(0) = 0.$

9.4. Исследовать на устойчивость и асимптотическую устойчивость нулевое решение системы, общее решение которой имеет вид:

$$x = C_1 \sin^2 t - C_2 e^{-t}, \qquad y = C_1 t^4 e^{-t} + 2C_2.$$

9.5. Установить характер нулевого решения $(0, 0)$ для следующих систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = 2x + 3y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = 4y - x, \\ \dot{y} = -9x + y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - 3y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y, \\ \dot{y} = 2y - 3x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x + 3y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -x - 4y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 2y, \\ \dot{y} = x - 3y; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x + 4y; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 4y, \\ \dot{y} = -x + 3y. \end{cases}$

9.6. Определить параметр α, при котором устойчиво нулевое решение следующих систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 5\alpha x - \alpha^2 y; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - \alpha^2 y; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = \alpha^2 x - 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 4y; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dot{x} = y + \alpha x, \\ \dot{y} = -x; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = 4\alpha x + \alpha^2 y; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = \alpha x - 2\alpha^2 y; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = x - \alpha^2 y; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y, \\ \dot{y} = \alpha x - y; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 3y, \\ \dot{y} = \alpha x + 2\alpha^2 y; \end{cases}$ 10) $\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = 3\alpha x - 2\alpha^2 y. \end{cases}$

9.7. Исследовать на устойчивость по первому приближению нулевые решения следующих систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y - 3x^2, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2x^2 + y^4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dot{x} = -\sin x + 3y + x^5, \\ \dot{y} = \dfrac{1}{4}x - 2y - \dfrac{1}{6}y^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x + 5y - 2 + x^4, \\ \dot{y} = x + 6\cos y - 6 - y^2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y + \sin^3 x - y^2, \\ \dot{y} = -2x + \sin y + e^y x^2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2\sin y - y^3 \sin x, \\ \dot{y} = 2y - 3x - x^3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = x - y + x^2 + y^2, \\ \dot{y} = x + y - y^2; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 8\sin y, \\ \dot{y} = 2 - e^x - 3y - \cos y; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x} = -4x + \dfrac{7}{2}\sin y - 3x^2, \\ \dot{y} = -2x + x^2 + y + y^3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - y^3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{x} = 10\sin x - 29y + 3y^3, \\ \dot{y} = 5x - 14\sin y + y^2. \end{cases}$

9.8. С помощью функций Ляпунова исследовать на устойчивость тривиальное решение систем:

1) $\begin{cases} \dot{x} = -x + y - 3xy^2 - \dfrac{1}{4}x^3, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{2}y - 2y^3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dot{x} = y - 3x^3, \\ \dot{y} = -x - 7y^3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dot{x} = -2x - y + 2xy^2 - 3x^3, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{3}x - y - x^2 y - 7y^3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = yx^4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dot{x} = -5x - 9y + 3xy^2 - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y - 2x^2 y - \dfrac{1}{2}y^3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2xy^2 - xy^6, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}y - x^2 y - x^4 y^3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + xy^4 - x^3 y^6, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{2}x^2 y - \dfrac{1}{4}y^3; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dot{x} = x - xy^4, \\ \dot{y} = y - x^2 y^3; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dot{x} = y^3 + x^5, \\ \dot{y} = x^3 + y^5; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dot{x} = -2y - x^3, \\ \dot{y} = 3x - 4y^3. \end{cases}$

9.9. Рассмотреть уравнения линейного осциллятора

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -kx_2 - u(t)x_1 \end{aligned} \tag{9.1}$$

с постоянным коэффициентом трения k и меняющимся во времени коэффициентом трения $u(t)$. Предполагается, что параметр u может принимать два значения: u_1 и u_2 (см. §6 пособия). Изменение параметра u во времени подчиним следующему закону: всякий раз, когда точка x_1, x_2 находится в первом и третьем квадранте фазовой плоскости, выполняется условие $u(t) = u_1$, а в случае второго и четвертого квадрантов имеем $u(t) = u_2$:

$$u(t) = \begin{cases} u_1, & \text{при } x_1(t)x_2(t) \geqslant 0, \\ u_2, & \text{при } x_1(t)x_2(t) < 0. \end{cases} \tag{9.2}$$

Для системы (1), (2) при $u_1 = 2$ исследовать численно траектории исходящие из начальной точки $(1,0)$ при различных значениях $2 < u_2 < 2.7$ и найти критическое значение u_2^* при котором траектория представляет собой замкнутый цикл. Построить семейство концентрических циклов, отвечающих различным начальным условиям.

9.10. Убедиться, что множество кососимметрических матриц образует алгебру Ли.

Указание: Воспользоваться определением кососимметричности (матрица A кососимметрична, если $A^T = -A$) и материалом раздела 6.3 §6 настоящего пособия.

9.11. Возможен ли параметрический резонанс в системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 &= -u(t)x_2 \end{aligned}$$

где $u(t)$ принимает значения 1 и 2?

Указание: Воспользоваться материалом раздела 6.2 §6 настоящего пособия.

9.12. Рассмотреть управляемую систему, в которой добавка к линейной части играет роль закона управления и, кроме того, требование непрерывности этой добавки не требуется (см. §7 пособия). Предполагается, что объект управления линеен, а контроллер, реализующий закон управления, нелинеен и нестационарен. Объект управления задается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{9.3}$$

где $x \in R^n$ – вектор пространства состояний, вещественная матрица A имеет размер $n \times n$, вектор $b \in R^n$, u – скалярное управление. Зависимость x и u от времени для краткости опускается. Уравнение (3) определяет линейную часть системы со скалярным входом u. Скалярный выход определяется уравнением

$$y = c^T x, \tag{9.4}$$

где $c \in R^n$ – вектор. Обратная связь, устанавливающая зависимость входа линейной части от ее выхода, определяется уравнением

$$u(t) = \varphi(t, y). \tag{9.5}$$

Убедиться, что нулевое решение системы системы (3)–(5) при

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \varphi(y) = y^3 = (-2x_2 + 4x_3)^3$$

асимптотически устойчиво.

Указание: воспользоваться результатом рассмотренного в § 7 примера (7.35) и рисунком 7.4.

9.13. Дана система Лоренца (см. §8 пособия):

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y,$$
$$\dot{y} = -xz + rx - y,$$
$$\dot{z} = xy - bz,$$

где b, r, $\sigma > 0$.

1. Доказать, что при $r < 1$ точка $O(0, 0, 0)$ – единственное положение равновесия системы Лоренца.
2. Выяснить характер устойчивости точки O в зависимости от значения параметра r.
3. Доказать, что при $r > 1$ у системы Лоренца существуют помимо точки O еще два дополнительных положения равновесия O_1 и O_2.
4. Выяснить характер устойчивости положений равновесия O_1 и O_2.

9.14. Рассмотреть частный случай системы двух дифференциальных уравнений второго порядка (см. §4 пособия)

$$\ddot{x}_1 = 2a(x_1, x_2)\dot{x}_2 + U_{x_1}(x_1, x_2),$$
$$\ddot{x}_2 = -2a(x_1, x_2)\dot{x}_1 + U_{x_2}(x_1, x_2),$$

когда $\omega \neq 0$, $U = \dfrac{1}{r} + \dfrac{\omega^2}{2} r^2 + \dfrac{h}{2}$ (кеплерово движение во вращающейся системе координат). Здесь $U_{x_1} = -r^{-3}x_1 + \omega^2 x_1$, $U_{x_2} = -r^{-3}x_2 + \omega^2 x_2$, $U_{x_1x_1} = -r^{-3} + 3r^{-5}x_1^2 + \omega^2$, $U_{x_1x_2} = 3r^{-5}x_1x_2$, $U_{x_1x_1} = -r^{-3} + 3r^{-5}x_2^2 + \omega^2$. Для уравнений движения

$$\ddot{x}_1 - 2\dot{x}_2 = U_{x_1}, \quad \ddot{x}_2 + 2\dot{x}_1 = U_{x_2}$$

получить условия устойчивости по Жуковскому решений $x_i = \varphi_i(t)$.

9.15. Исследовать устойчивость нулевого решения:

а) $y''' + y'' + y' + 2y = 0$;

б) $y''' + 2y'' + 2y' + 3y = 0$;

в) $y^{IV} + 2y''' + 4y'' + 3y' + 2y = 0$;

г) $y^{IV} + 2y''' + 3y'' + 7y' + 2y = 0$;

д) $y^{IV} + 2y''' + 6y'' + 5y' + 6y = 0$;

е) $y^{IV} + 8y''' + 14y'' + 36y' + 45y = 0$;

ж) $y^{V} + 2y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 5y' + 4y = 0$;

з) $y^{V} + 2y^{IV} + 5y''' + 6y'' + 5y' + 2y = 0$;

и) $y^{V} + 3y^{IV} + 6y''' + 7y'' + 4y' + 4y = 0$;

к) $y^{V} + 4y^{IV} + 9y''' + 16y'' + 19y' + 13y = 0$.

Указание: воспользоваться условиями Гурвица или критерием Михайлова (см. §5 пособия).

9.16. Исследовать устойчивость системы уравнения, у которой характеристическое уравнение имеет вид:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = 0.$$

Указание: воспользоваться условиями Гурвица.

9.17. Определить передаточные функции в операторной форме систем управления, которые описываются уравнениями (y – выход, u – вход):

а) $\dddot{y} + 2\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = 7\ddot{u} + 5\dot{u} + 4u$;

б) $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 3\dot{y} = \ddot{u} + 3\dot{u} + 2u$

в) $\dddot{y} + 4\ddot{y} + 3\dot{y} + y = \ddot{u} + 4\dot{u} + 3u$.

9.18. Исследовать на устойчивость систему управления, которая описывается следующим уравнением (y – выход, u – вход):

а) $\frac{d^4y}{dt^4}+\frac{4d^3y}{dt^3}+\frac{7d^2y}{dt^2}+\frac{8dy}{dt}+4y=3u$; б) $\frac{d^4y}{dt^4}+\frac{5d^3y}{dt^3}+\frac{6d^2y}{dt^2}+\frac{12dy}{dt}+10y=7u$.

Указание: воспользоваться критерием Льенара–Шипара.

9.19. Исследовать устойчивость замкнутой системы при следующей передаточной функции разомкнутой системы:

а) $W(s)=\frac{6s^2+9s+9}{s^4+5s^3+5s^2+10s+9}$; б) $W(s)=\frac{2s^2+3s+5}{s^4+5s^3+5s^2+2s+1}$.

Указание: воспользоваться критерием Льенара–Шипара.

9.20. Исследовать устойчивость замкнутой системы при следующей передаточной функции разомкнутой системы:

а) $W(s)=\frac{s+1}{s^3+2s^2+s+1}$; б) $W(s)=\frac{2s+1}{s^3+3s^2+s+2}$.

Указание: воспользоваться критерием Найквиста.

9.21. Простейшая модель национальной экономики описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{I}=I-\alpha C,\\ \dot{C}=\beta(I-C-G),\end{cases}$$

где I – национальный доход, C – размер потребительских расходов, а G – размер правительственных расходов. Модель относится только к области естественного изменения переменных, т.е. $I\geq 0$, $C\geq 0$, $G\geq 0$, а постоянные α и β удовлетворяют условиям $1<\alpha<\infty$; $1\leq\beta<\infty$.

а) Показать, что если уровень правительственных расходов постоянен, $G=G_0$, то существует точка покоя системы. Определить характер точки покоя при $\beta=1$ и показать, что тогда экономика испытывает колебания.

б) Пусть правительственные расходы связаны с национальным доходом соотношением $G=G_0+kI$, где $k>0$. Найти верхнюю границу A для коэффициента k, ниже которой существует точка покоя в естественной области изменения переменных. Описать положение и характер этой точки покоя для $\beta>1$ при приближении k к критическому значению A.

Указания:

а) приравняв правые части системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{I} = I - \alpha C, \\ \dot{C} = \beta(I - C - G) \end{cases}$ к нулю, из алгебраической системы $\begin{cases} I - \alpha C = 0, \\ I - C - G = 0 \end{cases}$ найти точку покоя $\left(\dfrac{\alpha G_0}{\alpha - 1}, \dfrac{G_0}{\alpha - 1}\right)$ и провести анализ устойчивости;

б) положение равновесия есть $\left(\dfrac{\alpha G_0}{\alpha(1-k)-1}, \dfrac{G_0}{\alpha(1-k)-1}\right)$ с $k < \alpha - 1/\alpha\ (= A)$. Устойчивая точка покоя стремится к бесконечности при $k \to A$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алфутов Н.А., Колесников К.С.* Устойчивость движения и равновесия. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2003.

2. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. М.: Наука, 1987.

3. *Аминов М.Ш.* Об устойчивости некоторых механических систем // Тр. Казанск. авиац. ин-та. 1949. Т. 24. С. 3–69.

4. *Андронов А.А., Витт А.А.* Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. 1933. Т. 3. Вып. 3.

5. *Артемьев Н.А.* Осуществимые движения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1939. № 3. С. 361–367.

6. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.

7. *Баландин Д.В., Коган М.М.* Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007.

8. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1975.

9. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.: Гостехиздат, 1941.

10. *Брюм А.З., Савченко А.Я.* Об орбитальной устойчивости одного периодического решения уравнений движения гироскопа Ковалевской // ПММ. 1986. Т. 50. Вып. 6. С. 967–973.

11. *Васильев С.Н.* К интеллектному управлению // Нелинейная теория управления и ее приложения. М.: Физматлит, 2000. С. 57–126

12. *Воронов А.А.* Теория автоматического управления. В 2-х ч. М.: Высшая школа, 1986.

13. *Воротников В.И., Румянцев В.В.* Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем. М.: Научный мир, 2001.

14. *Галиуллин А.С., Шестаков А.А.* Устойчивость движения и вариационные принципы динамики // Вестн. РУДН. Сер. Прикл. матем. и информатика. 1996. № 2. С. 20–28.

15. *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М.: Наука, 1978.

16. *Данилов Ю.А.* Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. Учебное пособие. М.: КомКнига, 2006.

17. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

18. *Демидович Б.П.* Об орбитальной устойчивости ограниченных решений автономной системы I, II // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4. № 4. С. 575–588; № 8. С. 1359–1373.

19. *Дорофеева Л.И.* Основы теории управления: учебно-методический комплекс. М.: Директ-Медиа, 2015.

20. *Дружинина О.В.* Исследование прочности по Жуковскому траекторий гладких динамических систем с помощью функций Ляпунова // ДАН. 1998. Т. 362. № 2. С. 198–201.

21. *Дружинина О.В*. Устойчивость и стабилизация по Жуковскому динамических систем: Теория, методы и приложения. М.: Книжный дом «Либроком» / Изд. группа URSS, 2013.

22. *Дружинина О.В., Игонина Е.В., Масина О.Н*. Моделирование и стабилизация динамических систем с логическими регуляторами / Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ РАН, 2015.

23. *Дружинина О.В., Масина О.Н.* Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. М.: ВЦ РАН, 2009.

24. *Дружинина О.В., Масина О.Н.* Методы анализа устойчивости динамических систем интеллектного управления. М.: ЛЕНАНД / Изд. группа URSS, 2016.

25. *Дружинина О.В., Масина О.Н.* О подходах к анализу устойчивости нелинейных динамических систем с логическими регуляторами // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2017. Т.13. №2. С. 40–49.

26. *Дружинина О.В., Шестаков А.А.* О расширении понятия орбитальной устойчивости траекторий динамической системы // ДАН. 2001. Т. 377. № 5. С. 621–625.

27. *Дружинина О.В., Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова исследования устойчивости и притяжения в общих временных системах // Матем. сборник. 2002. Т. 193. № 10. С. 17–48

28. *Дружинина О.В., Шестаков А.А.* О предельных свойствах асимптотически устойчивых по Ляпунову и асимптотически прочных по Жуковскому траекторий динамических систем // ДАН. 2006. Т. 409. № 2. С. 185–190.

29. *Дубошин Г.Н.* К вопросу об устойчивости движения относительно постоянно действующих возмущений // Труды ГАИШ. 1940. Т. 14. Вып. 1. С. 153–164.

30. *Егоров А.Н.* Основы теории управления. М.: Физматлит, 2007.

31. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: Наука и техника, 1979.

32. *Жуковский Н.Е.* О прочности движения // Ученые записки Московского университета. Отд. физ.-мат. 1882. Вып. 4. С. 1–104.

33. *Зубов В.И.* Методы Ляпунова и их применение. Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.

34. *Зубов В.И.* Динамика управляемых систем. М.: Высшая школа, 1982.

35. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. М.: Физматлит, 2007.

36. *Ким Д.П.* Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007.

37. *Ким Д.П., Дмитриева Н.Д.* Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы. М.: Физматлит, 2007.

38. *Ким Д.П., Дмитриева Н.Д.* Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Физматлит, 2007.

39. *Кравчук А.Ю., Леонов Г.А., Пономаренко Д.В.* Критерии сильной орбитальной устойчивости траекторий динамических систем I, II // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 9. С. 1507–1520; 1995. Т. 31. № 3. С. 440–445.

40. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 1978.

41. *Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И.* Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: URSS, 2003.

42. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

43. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. М.: Мир, 1964.

44. *Леонов Г.А.* О многомерном аналоге признака орбитальной устойчивости Пуанкаре // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 9. С. 1637–1639.

45. *Леонов Г.А.* Об орбитальной устойчивости траекторий динамических систем // ПММ. 1990. Т. 54. Вып. 4. С. 515–519.

46. *Леонов Г.А., Пономаренко Д.В.* Критерии орбитальной устойчивости траекторий динамических систем // Изв. вузов. Сер. матем. 1993. № 4. С. 88–94.

47. *Леонов Г.А.* Хаотическая динамика и классическая теория устойчивости движения. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2006.

48. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.

49. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.

50. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.

51. *Маркеев А.П.* Алгоритм нормализации гамильтоновой системы в задаче об орбитальной устойчивости периодических движений // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 6. С. 929–938.

52. *Мартынюк А.А., Като Дж., Шестаков А.А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990.

53. *Маршал К.* Задача трех тел. Москва–Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.

54. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высшая школа, 1970.

55. *Матросов В.М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.

56. *Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н.* Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980.

57. *Меркин Д.А.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1987.

58. *Моисеев Н.Д.* Очерки развития теории устойчивости. М.: Гостехиздат, 1949.

59. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.

60. *Никулин Е.А.* Основы теории автоматического управления. М.: Литрес, 2014.

61. *Оболенский А.Ю.* Лекции по качественной теории дифференциальных уравнений. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006.

62. *Петровский И.Г.* О поведении интегральных кривых системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки // Матем. сб. 1934. Т. 41. № 1. С. 107–156

63. *Подчукаев В.*А. Теория автоматического управления (аналитические методы). Учеб. для вузов. М.: Физматлит, 2005.

64. *Поляк Б.Т.* Развитие теории автоматического управления. Проблемы управления. 2009. № 3.1 С. 13–18.

65. *Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б.* Математическая теория автоматического управления. Учебное пособие. Рекомендовано федеральным учебно-методическим объединением в системе высшего образования по укрупненным группам специальностей и направлений подготовки 27.00.00 «Управление в технических системах». М.: ЛЕНАНД / Изд. группа URSS, 2019.

66. *Пуанкаре А.* Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971, 1972.

67. *Пупков К.А., Пилишкин В.Н.* Определение и использование устойчивости по Н.Е. Жуковскому для робастных (грубых) систем // Вестник МГТУ. Сер. Машиностроение. 1996. № 4. С. 103–108.

68. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988.

69. *Рапопорт Л.Б.* О задаче абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // Автоматика и телемеханика. 1987. № 5. С. 66–74.

70. *Рапопорт Л.Б.* Об одном частотном критерии абсолютной устойчивости систем управления с несколькими нелинейными стационарными элементами // Автоматика и телемеханика. 1989. № 6. С. 34–43.

71. *Рапопорт Л.Б.* Расширение S-процедуры и анализ многомерных систем управления с помощью линейных матричных неравенств // Автоматика и телемеханика. 2005. № 1. С. 37–48.

72. *Румянцев В.В.* О развитии исследований в СССР по теории устойчивости движения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19. № 5. С. 739–776.

73. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.

74. *Седова Н.О.* О развитии прямого метода Ляпунова для функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием// Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 6. С. 888–906.

75. *Синдж Дж.* Тензорные методы в динамике. М.: ИЛ, 1947.

76. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987.

77. *Туманов М.П.* Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления. Учебное пособие. М.: МГИЭМ, 2008.

78. *Филатов А.Н.* Теория устойчивости. Ч. 1. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений / Курс лекций. М.: ИВМ РАН, 2002.

79. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. М.:: URSS, 2004.

80. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007.

81. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

82. *Цветкова О.Л.* Теория автоматического управления: учебник. М.: Директ-Медиа, 2016.

83. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.

84. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: ГИТТЛ, 1955.

85. *Шестаков А.А.* Некоторые теоремы о неустойчивости в смысле Ляпунова // ДАН СССР. 1951. т. 79. № 1, с. 25–28.

86. *Шестаков А.А.* Об асимптотическом поведении многомерных систем дифференциальных уравнений. М.: ВЗИИТ МПС СССР. Ученые записки. Труды кафедры высшей матем. и теор. мех. 1961. Вып. 7. С. 3–104.

87. *Шестаков А.А.* Теория и приложения обобщенного прямого метода Ляпунова для абстрактных динамических систем: обзор современного состояния геометрического направления в прямом методе Ляпунова // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18. № 12. С. 2069–2097.

88. *Шестаков А.А.* Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов // Функции Ляпунова и их применения. АН СССР. Сибирское отд. Иркутский вычислительный центр. Новосибирск: Наука, 1987. С. 14–48.

89. *Шестаков А.А.* Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990. (Изд. 2-е, доп. М.: КомКнига / Изд. группа URSS, 2007).

90. *Шестаков А.А., Дружинина О.В.* Метод функций Ляпунова исследования диссипативных автономных динамических процессов // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45. № 8. С. 1108–1115.

91. *Штифель Е., Шейфеле Г.* Линейная и регулярная небесная механика. М.: Наука, 1975.

92. *Щенникова Е.В.* Устойчивоподобные свойства управляемых динамических систем. М.: РУДН, 2006.

93. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.

94. *Bendixson I.* Sur les courbes définiés par des équations différentielles // Acta Math. 1901. V. 24. P. 1–88 (русский перевод главы I: О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // УМН. 1941. Т. 9. С. 191–211.

95. *Baumgarte J., Stiefel E.* Stabilization by manipulation of the Hamiltonian // Celest. Mech. 1974. V. 10. P. 71–85.

96. *Bhatia N.P., Hajek O.* Theory of dynamical systems. Technical Note BN-606. University of Maryland, 1969.

97. *Bhatia N.P., Szegö G.P.* Stability theory of dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1970.

98. *Bohl P.* Uber differentialungeichungen // J. fur die reine und angewandte mathematic. 1913. V. 144. № 4. P. 284–313.

99. *Boyd S., Vanderberghe L.* Convex Optimization. Convex University Press, 2004.

100. *Ding C.* The limit sets of Uniformly Asymptotically Zhukovskij Stable Orbits // Computers Math. Appl. 2004. V. 47 (6/7). P. 859–862.

101. *Ding C., Soriano J.M.* Uniformly asymptotically Zhukovskij stable orbits // Computers Math. Appl. 2005. V. 49. P. 81–84.

102. *Routh E.J.* Treatise on the stability of a given state of motion. London: MacMillan and Co., 1877 (Пер. с англ. *Раус Э.Дж.* Об устойчивости заданного состояния движения, в частности, установившегося движения. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002).

103. *Sugeno M.* On stability of fuzzy systems expressed by fuzzy rules with singleton consequents // IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 1999. V. 7. №. 2. P. 201–224.

104. *Synge J.L.* On the geometry of dynamics // Phil. Trans. Roy. Soc. London, ser. A. 1926. V. 226. P. 31–106.

105. *Tanaka K.*, *Wang H.O*. Fuzzy control systems design and analysis: a linear matrix inequality approach. N.Y.: Wiley, 2001.

106. *Thomson W.*, *Tait P.* Treatise on natural philosophy. London: MacMillan and Co., 1867 (Пер. с англ. *Томсон У., Тэт П.* Трактат по натуральной философии. В 2-х ч. Москва–Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2010).

107. *Yang X.* Liapunov asymptotically stability and Zhukovskij asymptotically stability // Chaos, Solitons and Fractals. 2000. V. 11. P. 1995–1999.

Учебное издание

Масина Ольга Николаевна,
Дружинина Ольга Валентиновна,
Рапопорт Лев Борисович

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Учебное пособие

Технический редактор – Н. П. Безногих
Техническое исполнение - В. М. Гришин

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 06146. Дата выдачи 26.10.01.
Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 8,9 Уч.-изд.л. 8,6
Тираж 500 экз. (1-й завод 1-50 экз.). Заказ 36

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28