



## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Шифр и наименование группы научных специальностей:

1.1. Математика и механика

Шифр и наименование научной специальности:

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

Форма обучения: очная

Институт: математики, естествознания и техники

Кафедра: математики и методики ее преподавания

Трудоёмкость в ЗЕТ - 4

Трудоёмкость в часах - 144

Разработчик: к.ф.-м.наук, доцент В.Е Щербатых

## **Общие положения**

Рабочая программа дисциплины Дифференциальные уравнения и математическая физика разработана в соответствии с федеральными государственными требованиями, утвержденными приказом Министерства образования и науки высшего образования Российской Федерации от 20 октября 2021 г. № 951.

### **1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

#### **Цель дисциплины:**

- завершение формирования у аспирантов современных теоретических знаний в области методов решения задач математической физики, описывающих некоторые физические процессы, а также практических навыков в их использовании;
- знакомство аспирантов с типичными постановками задач управления, а также с доказательствами утверждений, характеризующих оптимальные решения в классе программных управлений и управлений по принципу обратной связи;
- ввести аспирантов в проблематику очень важного раздела современной математики;
- изучить базовые задачи теории, чтобы уметь работать с задачами приложений;
- используя весь комплекс фундаментальных знаний, имеющихся у аспирантов, дать на современном уровне обзор достижений в области оптимального управления;

#### **Задачи изучения дисциплины:**

- добиться четкого, ясного понимания основных понятий и объектов дисциплины;
- сформировать способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских задач;
- уметь проводить самостоятельный анализ физических аспектов в классических постановках математических задач;
- способствовать осуществлению научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий;

- способствовать интенсивной научно-исследовательской и научно-изыскательской деятельности;
- способствовать выработке навыков планирования и решения задач профессионального и личностного развития;
- выработка активной позиции для участия в работе российских и международных конференциях;
- способствовать творческому применению, развитию и реализации сложных математических алгоритмов в современных программных комплексах. Выработка у аспирантов умений самостоятельно конструировать задания по разделам изучаемой дисциплины;
- привить аспиранту навыки самостоятельного изучения литературы, а также поддерживать его интерес к науке;

## **2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ПРОГРАММЫ АСПИРАНТУРЫ**

Дисциплина относится к образовательному компоненту программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

## **3. ТРЕБОВАНИЯ К РЕЗУЛЬТАТАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ**

По окончании изучения дисциплины аспиранты должны:

### **Знать:**

- основные методы научно-исследовательской деятельности,
- методы критического анализа и оценки современных научных достижений,
- методы генерирования новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе междисциплинарных областях,
- приемы, на основе которых осуществляется критический анализ, оценка и синтез инновационных идей;

### **Уметь:**

- выделять и систематизировать основные идеи в научных текстах,
- критически оценивать любую поступающую информацию, вне зависимости от источника,
- избегать автоматического применения стандартных формул и приемов при решении задач,
- управлять информацией (поиск, интерпретация, анализ информации, в т.ч. из множественных источников);

### **Владеть:**

- навыками анализа основных методологических проблем, научных и научно-образовательных задач,
- необходимым уровнем иностранного языка для эффективного участия в международных исследовательских коллективах,

- навыками организации эффективного взаимодействия с другими членами научных коллективов в ходе реализации проектов.

#### 4. СТРУКТУРА, ОБЪЕМ И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

##### 4.1. Объем дисциплины и виды учебной работы

Лекции – 36 часов;

Практические занятия – 36 часов;

Самостоятельная работа – 63 часов;

Контроль – 9 часов.

##### 4.2. Разделы дисциплины и виды занятий

№	Наименование раздела дисциплины	Виды учебной нагрузки и их трудоемкость, академ. часы			
		Всего часов	аудиторные занятия		Самостоятельная работа
			Лекции	практические (лабораторные)	
	<b>Раздел 1 .Обыкновенные дифференциальные уравнения</b>	<b>20</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>8</b>
1.	Тема 1. Теоремы существования Арцела, Пикара-Линделефа, Пеано. Продолжение решений. Непрерывная зависимость и дифференцируемость по начальным данным. Непрерывная зависимость решений от параметров. Первые интегралы.	12	4	4	4
2.	Тема 2. Дифференциальные неравенства. Неравенство Гронуолла. Верхнее и нижнее решение. Теорема Уитнера. Оценка разности двух решений. Теорема единственности.	8	2	2	4
	<b>Раздел 2. Качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений</b>	<b>43</b>	<b>12</b>	<b>12</b>	<b>19</b>
3.	Тема 3. Теория устойчивости. Второй метод Ляпунова. Теоремы об устойчивости и неустойчивости. Устойчивость линейных систем. Устойчивость периодических движений.	9	2	2	4
4.	Тема 4. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Характеристическое уравнение. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами. Критерии устойчивости по первому приближению.	8	2	2	4
5.	Тема 5. Периодические решения уравнений первого порядка. Предельные циклы и теории контактов. Автоколебания. Точечные преобразования и предельные циклы. Устойчивость неподвижной точки. Теорема Кенигса. Условия устойчивости предельного цикла. Критерии существования периодических решений. Виды и свойства	12	4	4	4

	предельных циклов.				
6.	Тема 6. Грубые системы. Грубые состояния равновесия. Простые, сложные, грубые предельные циклы. Необходимые и достаточные условия грубости. Предельные циклы, зависящие от параметра. Кратные предельные циклы. Поведение предельных циклов при малых изменениях параметра.	14	4	4	6
	<i>Промежуточная аттестация</i>	<i>Зачет с оценкой</i>			
	<b>Итого за 3 семестр</b>	<b>72</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>36</b>
	<b>Раздел 3. Дифференциальные уравнения в частных производных</b>	<b>44</b>	<b>10</b>	<b>10</b>	<b>24</b>
7.	Тема 7. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных	10	2	2	6
8.	Тема 8. Вариационные принципы. Понятие о характеристиках уравнений в частных производных. Теорема Ковалевской.	10	2	2	6
9.	Тема 9.Обобщенные решения основных краевых задач для уравнений эллиптического типа. Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений.	14	4	4	6
10.	Тема 10.Некоторые теоремы вложения функциональных пространств (неравенства Пуанкаре и Стеклова). Задача на собственные значения для эллиптического уравнения (в частности, задача Штурма-Лиувилля). Свойства собственных значений и собственных функций.	10	2	2	6
	<b>Раздел 4. Оптимальное управление</b>	<b>28</b>	<b>8</b>	<b>8</b>	<b>12</b>
11.	Тема 11. Классические задачи оптимального управления. Понятие оптимальности. Постановка общей задачи оптимального управления. Экстремальные свойства оптимальных управлений и их синтез. Существование решений экстремальных задач и алгоритмы их поиска.	8	2	2	4
12.	Тема 12. Принцип Лагранжа для необходимых условий экстремума. Принцип максимума Понтрягина. Задача с подвижными концами и условия трансверсальности. Принцип максимума для неавтономных систем. Вариация управлений и траекторий. Вывод условий трансверсальности. Принцип максимума и условие трансверсальности как необходимые условия. Достаточные условия оптимальности управления.	12	4	4	4
13.	Тема 13. Общий принцип максимума. Уравнение Беллмана и достаточные условия оптимальности. Принцип максимума для неавтономных систем. Оптимальные процессы с параметрами.	8	2	2	5
	<i>Контроль</i>	9			
	<i>Промежуточная аттестация экзамен</i>				
	<b>Итого за 4 семестр</b>	<b>72</b>	<b>18</b>	<b>18</b>	<b>27</b>
<b>ИТОГО:</b>		<b>144</b>	<b>36</b>	<b>36</b>	<b>63</b>

## 5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

5.1. Текущий контроль по дисциплине осуществляется в форме контрольной работы.

*Типовой вариант к/р*

### Контрольная работа №1

1. Каково фазовое пространство системы  $\dot{x} = f(\sin x, \cos y)$ ,  $\dot{y} = g(\sin x, \cos y)$ , у которой правые части  $f$  и  $g$  периодические функции по обоим переменным
2. Докажите, что нулевое решение системы  $\dot{x} = -axy^4$ ,  $\dot{y} = byx^4$ ,  $a > 0, b > 0$  устойчиво. Объясните, почему оно не является асимптотически устойчивым.
3. Для системы  
 $\dot{x} = \mu x - 2y - a^2 x(x^2 + y^2)^2$ ,  
 $\dot{y} = 2x + \mu y - b^2 y(x^2 + y^2)^2$   
определите тип и устойчивость положения равновесия  $x = y = 0$  в зависимости от значений  $\mu$ . Докажите, что при  $\mu > 0$  существует устойчивый предельный цикл.
4. Являются ли взаимосвязанными частота собственных колебаний нелинейной консервативной системы и амплитуда колебаний?
5. Сколько имеется областей параметрического резонанса уравнение Матьё?

### Контрольная работа №2

1. Найти общее решение линейного неоднородного уравнения  
 $(y + z) \frac{\partial u}{\partial x} + (x + z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y + x) \frac{\partial u}{\partial z} = u.$
2. Найти поверхность, удовлетворяющую уравнению  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy$  и проходящую через линию  $y = x, z = x^2$ .
3. Определить тип уравнения, привести его к каноническому виду и найти общее решение этого уравнения:  
 $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + u_x - u_y = 0.$
4. Для объекта первого порядка  $\dot{x} = ax + u, a < 0$  найти ограниченное  $|u(t)| \leq 1$  уравнение, при котором:
  - а) состояние объекта достигает из  $x(0) = 0$  в момент  $T=1$  максимального значения;
  - б) объект с параметром  $a = 1$ , двигаясь из состояния  $x(0) = 1$  в момент  $T=1$ , доставляет максимальное значение функционалу

$$J = \int_0^T (x(t) - 0,5t) dt.$$

5.2. Промежуточная аттестация по дисциплине проводится в 4 семестре в форме зачета.

*Перечень вопросов к зачету с оценкой (3 сем)*

1. Теоремы существования Арцела, Пикара-Линделефа, Пеано. Продолжение решений.
2. Непрерывная зависимость и дифференцируемость по начальным данным. Непрерывная зависимость решений от параметров.
3. Первые интегралы. Дифференциальные неравенства.
4. Неравенство Гронуола. Верхнее и нижнее решение.
5. Теорема Уитнера. Оценка разности двух решений.
6. Теорема единственности.
7. Теоремы об устойчивости и неустойчивости. Устойчивость линейных систем.
8. Устойчивость периодических движений.
9. Второй метод Ляпунова для неустановившихся движений. Теорема Четаева.
10. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами. Характеристическое уравнение.
11. Нелинейные уравнения с периодическими коэффициентами. Критерии устойчивости по первому приближению.
12. Динамические системы на плоскости. Предельные точки и множества. Их структура.
13. Свойства предельных траекторий. Теорема о наличии состояния равновесия внутри замкнутой траектории.
14. Основная теорема о состояниях равновесия. Особые точки. Классификация.
15. Исключительные направления. Нормальные области. Поведение интегральных кривых в нормальной области.
16. Характеристическое уравнение алгебраической системы. Расположение интегральных кривых в нормальной области в зависимости от корней характеристического уравнения.
17. Первая проблема различения. Лемма Лона.
18. Вторая проблема различения. Теорема Лона.
19. Аналитические критерии для различных типов особых точек второй группы.
20. Проблема различения центра и фокуса. Необходимые и достаточные условия существования центра.
21. Периодические решения уравнений первого порядка.

22. Предельные циклы и теории контактов.
23. Автоколебания.
24. Точечные преобразования и предельные циклы.
25. Устойчивость неподвижной точки.
26. Теорема Кенигса.
27. Условия устойчивости предельного цикла.
28. Критерии существования периодических решений (Бендиксона, Дюлака, Драгилева, принцип симметрии).
29. Виды и свойства предельных циклов.
30. Грубые системы. Грубые состояния равновесия.
31. Простые, сложные, грубые предельные циклы.
33. Необходимые и достаточные условия грубости.
34. Предельные циклы, зависящие от параметра. Кратные предельные циклы. Поведение предельных циклов при малых изменениях параметра.

*Перечень вопросов экзамену (4 сем)*

1. Физические задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям в частных производных (колебательные процессы, теплопроводность и диффузия, электромагнитное поле, уравнения гидро- и газодинамики, уравнение Шредингера).
2. Классификация и канонические формы уравнений в частных производных второго порядка.
3. Постановка основных краевых задач: задача Коши, первая, вторая и третья краевые задачи.
4. Корректность постановки краевых задач. Классические решения основных краевых задач для эллиптических уравнений.
5. Уравнение Лапласа. Основные свойства гармонических функций (формула Грина, теорема о среднем, принцип максимума, теорема об устранимой особенности).
6. Решение задач Дирихле и Неймана (внутренней и внешней) методом потенциалов.
7. Функция Грина и ее применение к решению краевых задач.
8. Формула Пуассона для шара и круга.
9. Уравнения параболического типа. Постановка основных краевых задач. Принцип максимума и единственность. Тепловые потенциалы. Решение смешанной задачи методом разделения переменных (метод Фурье). Обобщение решения. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности (формула Пуассона).
10. Уравнения гиперболического типа. Постановка основных краевых задач.
11. Решение смешанной задачи методом Фурье.
12. Обобщенные решения. Решение задачи Коши для волнового уравнения (формулы Даламбера, Пуассона и Кирхгофа).

- 13.Обобщенные решения основных краевых задач для уравнений эллиптического типа.
- 14.Разрешимость краевых задач и гладкость обобщенных решений.
- 15.Свойства собственных значений и собственных функций.  
Вариационный метод решения краевых задач.
- 16.Линейные управляемые процессы.
- 17.Управляемость: множество достижимости.
- 18.Управляемость и устойчивость автономных систем.
19. Оптимальное по быстродействию управление для линейных систем.
- 20.Синтез оптимальных управлений для некоторых основных нелинейных управляемых систем.
- 21.Синтез оптимальных по быстродействию управлений с обратной связью для нелинейных систем второго порядка с одной степенью свободы
- 22.Метод динамического программирования
- 23.Метод последовательных приближений для отыскания оптимальных программных движений.
- 24.Метод последовательных приближений для решения задачи синтеза оптимальных управлений.
- 25.Метод направленного поиска коэффициентов усиления в системах управления.
- 26.Движения нелинейных систем, определяемые краевыми условиями.  
Метод наискорейшего спуска.

**Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестации по дисциплине**

***Критерии оценивания для зачета с оценкой.***

Оценка «отлично» - наличие глубоких исчерпывающих знаний (в объеме утвержденной программы дисциплины в соответствии с поставленными программой курса целями и задачами обучения); грамотное и логически стройное изложение материала, усвоение основной и знакомство с дополнительной литературой.

Оценка «хорошо» - наличие твердых и достаточно полных знаний (в объеме утвержденной программы дисциплины в соответствии с целями обучения), правильные действия по применению знаний, умений, владений на практике, четкое изложение материала, допускаются отдельные логические и стилистические погрешности, сдающий усвоил основную литературу, рекомендованную в программе дисциплины;

Оценка «удовлетворительно» - наличие недостаточно полных знаний (в объеме утвержденной программы), изложение материала с отдельными ошибками, правильные в целом действия по применению знаний на практике.

Оценка «неудовлетворительно» - тема реферата не раскрыта, наличие грубых ошибок, непонимание сущности излагаемого вопроса, неумение применять знания на практике.

### **Критерии оценивания для кандидатского экзамена.**

Содержание и структура кандидатского экзамена и критерии оценивания определены в Программе кандидатского экзамена по специальности.

## **6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

### **6.1. Основная литература**

1. Андронов А.А. , Леонтович Е.А. , Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка / – Москва : Наука, 2003. – 565 с. – Режим URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222208> (дата обращения: 22.11.2020)
2. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных.– Москва: Наука, 1976.–391 стр.– URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468230> (дата обращения: 22.11.2020).

### **6.2. Дополнительная литература**

1. В Александров.В. , Болтянский В.Г. , Лемак С.С. и др Оптимальное управление движением : учебное пособие.– Москва : Физматлит, 2005. – 375 с. –URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82277> (дата обращения: 22.11.2020).
2. Громов Ю.Ю. , Иванова О.Г. , Алексеев В.В. и др. Специальные разделы теории управления : оптимальное управление динамическими системами: учебное пособие. – Тамбов : Тамбовский государственный технический университет (ТГТУ), 2012. – 108 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=277799> (дата обращения: 22.11.2020).
3. Крутиков, В.Н. Методы оптимизации : учебное пособие / В.Н. Крутиков. – Кемерово : Кемеровский государственный университет, 2011. – 92 с.– URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=232682> (дата обращения: 22.11.2020).
4. Сухарев, А.Г. Курс методов оптимизации : учебное пособие / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – 2-е изд. – Москва : Физматлит, 2011. – 368 с. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=76629> (дата обращения: 22.11.2020).

### **6.3. Электронные образовательные ресурсы**

1.	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>	Электронно-библиотечная система (ЭБС) Университетская библиотека онлайн	Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем индивидуальный
----	---	--	--

			неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет
2.	<a href="http://www.exponenta.ru">http://www.exponenta.ru</a>	«Образовательный математический Exponenta.ru». сайт	Индивидуальный неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет
3.	<a href="http://www.math.ru">http://www.math.ru</a>	«Образовательный математический Math.ru». сайт	Индивидуальный неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет
4.	<a href="http://www.mathhelp.spb.ru">http://www.mathhelp.spb.ru</a>	Лекции по высшей математике: Математический анализ; Дифференциальные уравнения и др.	Индивидуальный неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет

## 7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Материально-техническая база, информационные технологии, программное обеспечение и информационные справочные системы.