Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет имени И.А. Бунина»

О.Н. Масина, О.Б. Гладких

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Елец – 2016

УДК 002
ББК 32.97
М 31

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина
от 29. 01. 2016 г., протокол № 1

Рецензенты:
Н.В. Черноусова, кандидат педагогических наук, доцент
(Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина)

Масина О.Н., Гладких О.Б.
М 31 Основы теории управления: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2016. – 76 с.

В учебном пособии представлен необходимый теоретический материал, позволяющий познакомиться с аспектами теории автоматического управления. Описывается широкий спектр методов предметной области, излагается системный взгляд на проблемы организационного управления, системный подход к решению разнообразных задач автоматизации. Описаны основные понятия в области автоматизации, охарактеризовано современное состояние теории автоматического управления, идеология построения автоматических систем управления. Изложены различные аспекты структуры и аппарата формализации автоматических систем управления, описаны назначение, состав, принцип построения и функционирования автоматических систем, рассмотрены методы повышения эффективности традиционных и современных технических средств.

Издание предназначено для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Информатика и вычислительная техника».

УДК 002
ББК 32.97

ВВЕДЕНИЕ

Теория управления – это наука, разрабатывающая и изучающая методы и средства систем управления и закономерности протекающих в них процессах. Предметом теории управления являются не только процессы материального производства, но и сферы деятельности человека: организационно-административное управление, проектирование и конструирование, информационное обслуживание, здравоохранение, научные исследования, образование, и многие другие. Теория управления как научное направление сложилась в XX веке на базе теории автоматического регулирования, которая начала интенсивно развиваться в 19 веке в связи с потребностью в регуляторах, поддерживающих устойчивый режим работы внедрявшихся паровых машин в промышленности и на транспорте.

Современная теория управления занимает одно из ведущих мест в технических науках и в то же время относится к одной из отраслей прикладной математики, тесно связанной с вычислительной техникой. Теория управления на базе математических моделей позволяет изучать динамические процессы в автоматических системах, устанавливать структуру и параметры составных частей системы для придания реальному процессу управления желаемых свойств и заданного качества. Она является фундаментом для специальных дисциплин, решающих проблемы автоматизации управления и контроля технологических процессов, проектирования следящих систем и регуляторов, автоматического мониторинга производства и окружающей среды, создания автоматов и робототехнических систем.

Основными задачами теории управления являются задачи анализа динамических свойств автоматических систем на модельном или физическом уровне, и задачи синтеза алгоритма управления, функциональной структуры автоматической системы, реализующей этот алгоритм, ее параметров и характеристик, удовлетворяющих требованиям качества и точности, а также задачи автоматического проектирования систем управления, создания и испытания автоматических систем.

Предметом настоящего краткого курса являются основы теории управления материальными объектами и технологическими процессами, принципы организации, функционирования и проектирования технических и информационных систем управления в материальном производстве. В современных условиях управление различного ряда технологическими и техническими процессами осуществляется, как правило, с использованием ЭВМ, получивших название управляющих вычислительных машин. Проектирование систем управления, имеющих в своем контуре ЭВМ, носит специфический характер и невозможно без знания принципов и методов теории управления.

Методы и средства систем управления в сфере деятельности человека приводятся только на уровне понятий для общей ориентировки.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЕ ИЗ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

В технике управлением называют целенаправленное воздействие на какое-либо устройство, объект. Если управление осуществляет человек, то управление называют ручным, неавтоматическим. Управление называют автоматическим, если оно осуществляется без непосредственного участия человека.

Устройство (машина, агрегат, технологический процесс), состоянием которого можно и нужно управлять, называется объектом управления (ОУ) или управляемым объектом. Целью управления управляемым объектом является поддержание заданного режима. Под заданным режимом понимают изменение какого-либо параметра, характеризующего состояние объекта управления, по определенному закону. Указанный параметр, который может быть векторной величиной, называется управляемой или выходной переменной (величиной) объекта управления. В частном случае заданным режимом может быть поддержание выходной переменной неизменной и равной некоторой заданной величине.

Часть объекта управления, на которую оказывают воздействие при управлении, называют управляющим (регулирующим) органом.

Устройство, осуществляющее управление управляемым объектом, называется управляющим устройством (УУ).

Объект управления с взаимодействующим с ним управляющим устройством называют системой управления. Если система управления функционирует с участием человека, то она называется автоматизированной системой управления (АСУ). Если система управления функционирует без непосредственного участия человека, то она называется автоматической системой управления или системой автоматического управления (САУ).

В простейших случаях систему автоматического управления называют системой автоматического регулирования (САР), управляющее устройство – регулятором, а объект управления – объектом регулирования или регулируемым объектом. Так как нет критериев, по которым можно было бы судить, какие системы управления считать сложными, а какие простыми, мы не будем делать принципиальных различий между терминами «система автоматического управления» и «система автоматического регулирования».

Канал связи, по которому информация о текущем состоянии объекта управления (ОУ) поступает в управляющее устройство (УУ), называется обратной связью.

Внешнее воздействие, которое определяет требуемый (заданный) закон изменения выходной переменной, называется задающим воздействием. Здесь, как это часто делают, задающее воздействие выведено за пределы управляющего устройства, в то время как задающее воздействие вырабатывается задатчиком, входящим в состав УУ.

Как правило, на объект управления действует возмущение, которое приводит к отклонению управляемой переменной от требуемого значения. Такое воздействие называется возмущением и возмущающим воздействием. Возмущение может действовать и на УУ. В частном случае в зависимости от принципа управления обратная связь или канал связи, по которому информация о возмущении поступает на УУ, может отсутствовать.

Выходная переменная УУ и, являющаяся входной переменной ОУ, называется управляющим воздействием или управлением.

Объекты управления в зависимости от реакции на входные воздействия делятся на устойчивые, нейтральные и неустойчивые.

Обычно регулятор действует на объект управления не прямо, а через исполнительные механизмы (приводы), которые могут усиливать и преобразовывать сигнал управления, например, электрический сигнал может «превращаться» в перемещение клапана, регулирующего расход топлива, или в поворот руля на некоторый угол.

Чтобы регулятор мог «видеть», что фактически происходит с объектом, нужны датчики. С помощью датчиков чаще всего измеряются те характеристики объекта, которыми нужно управлять. Кроме того, качество управления можно улучшить, если получать дополнительную информацию – измерять внутренние свойства объекта.

В типичную систему управления входят объект, регулятор, привод и датчики. Однако, набор этих элементов – еще не система. Для превращения в систему нужны каналы связи, через них идет обмен информацией между элементами. Для передачи информации могут использоваться электрический ток, воздух (пневматические системы), жидкость (гидравлические системы), компьютерные сети.

Взаимосвязанные элементы – это уже система, которая обладает (за счет связей) особыми свойствами, которых нет у отдельных элементов и любой их комбинации.

Информация в системе управления как бы «ходит по кругу»: регулятор выдает сигнал управления на привод, который воздействует непосредственно на объект. Затем информация об объекте через датчики возвращается обратно к регулятору и все начинается заново. Говорят, что в системе есть обратная связь, то есть регулятор использует информацию о состоянии объекта для выработки управления. Системы с обратной связью называют замкнутыми, поскольку информация передается по замкнутому контуру.

Регулятор сравнивает задающий сигнал с сигналами обратной связи от датчиков и определяет рассогласование (ошибку управления) – разницу между заданным и фактическим состоянием. Если оно равно нулю, никакого управления не требуется. Если разница есть, регулятор выдает управляющий сигнал, который стремится свести рассогласование к нулю. Для того чтобы регулятор начал действовать, нужно, чтобы управляемая величина отклонилась от заданного значения. В простейшем случае в нем из заданного значения вычитается сигнал обратной связи (измеренное значение). Возможности регулятора и приводов (то есть мощность сигнала управления) всегда ограничены, поэтому быстродействие системы управления (скорость перехода на новый режим) также ограничена.

Вариант, когда обратная связь используется для того, чтобы уменьшить разницу между заданным и фактическим состоянием объекта управления называется отрицательной, потому что сигнал обратной связи вычитается из задающего сигнала. Если наоборот, то обратная связь называется положительной, она увеличивает рассогласование, то есть, стремится «раскачать» систему. На практике положительная обратная связь применяется, например, в генераторах для поддержания незатухающих электрических колебаний.

Если не использовать обратную связь, то регулятор не получает никакой информации о реальном состоянии объекта. Поэтому, должно быть точно известно, как этот объект себя ведет. Только тогда можно заранее рассчитать, как им нужно управлять (построить нужную программу управления). Однако при этом нельзя гарантировать, что задание будет выполнено. Такие системы называют системами программного управления или разомкнутыми системами, поскольку информация передается не по замкнутому контуру, а только в одном направлении.

Автоматическая система – это система, работающая без участия человека. Автоматические системы управления применяются для решения трех типов задач:

– стабилизация, то есть поддержание заданного режима работы, который не меняется длительное время (задающий сигнал – постоянная, часто нуль);

– программное управление – управление по заранее известной программе (задающий сигнал меняется, но заранее известен);

– слежение за неизвестным задающим сигналом.

По количеству входов и выходов бывают:

– одномерные системы, у которых один вход и один выход (они рассматриваются в так называемой классической теории управления);

– многомерные системы, имеющие несколько входов и/или выходов (главный предмет изучения современной теории управления).

По характеру сигналов системы могут быть:

– непрерывными, в которых все сигналы – функции непрерывного времени, определенные на некотором интервале;

– дискретными, в которых используются дискретные сигналы (последовательности чисел), определенные только в отдельные моменты времени;

– непрерывно-дискретными, в которых есть как непрерывные, так и дискретные сигналы.

Непрерывные (или аналоговые) системы обычно описываются дифференциальными уравнениями. Это все системы управления движением, в которых нет компьютеров и других элементов дискретного действия (микропроцессоров, логических интегральных схем).

Микропроцессоры и компьютеры – это дискретные системы, поскольку в них вся информация хранится и обрабатывается в дискретной форме. Компьютер не может обрабатывать непрерывные сигналы, поскольку работает только с последовательностями чисел. Примеры дискретных систем можно найти в экономике (период отсчета – квартал или год) и в биологии (модель «хищник-жертва»). Для их описания применяют разностные уравнения.

Существуют гибридные непрерывно-дискретные системы, например, компьютерные системы управления движущимися объектами (кораблями, самолетами, автомобилями и др.). В них часть элементов описывается дифференциальными уравнениями, а часть – разностными. С точки зрения математики это создает большие сложности для их исследования, поэтому во многих случаях непрерывно-дискретные системы сводят к упрощенным чисто непрерывным или чисто дискретным моделям.

Для управления важно изменяются ли характеристики объекта со временем. Системы, в которых все параметры остаются постоянными, называются стационарными, что значит «не изменяющиеся во времени».

Системы, в которых параметры объекта или регулятора изменяются со временем, называются нестационарными. Хотя теория нестационарных систем существует (формулы написаны), применить ее на практике не так просто.

В случае, если все параметры объекта и внешние воздействия определены (заданы) точно, то говорят о детерминированных системах, которые рассматривались в классической теории управления.

Системы, в которых действуют случайные возмущения или параметры объекта могут изменяться случайным образом, называются стохастическими (вероятностными). Теория стохастических систем позволяет получать только вероятностные результаты.

Часто требования к системе можно сформулировать в виде задачи оптимизации. В оптимальных системах регулятор строится так, чтобы обеспечить минимум или максимум какого-то критерия качества. Нужно помнить, что выражение «оптимальная система» не означает, что она действительно идеальная. Все определяется принятым критерием – если он выбран удачно, система получится хорошая, если нет – то наоборот.

Если параметры объекта или возмущений известны неточно или могут изменяться со временем (в нестационарных системах), применяют адаптивные или самонастраивающиеся регуляторы, в которых закон управления меняется при изменении условий. В простейшем случае (когда есть несколько заранее известных режимов работы) происходит простое переключение между несколькими законами управления. Часто в адаптивных системах регулятор оценивает параметры объекта в реальном времени и соответственно изменяет закон управления по заданному правилу.

Самонастраивающаяся система, которая пытается настроить регулятор так, чтобы «найти» максимум или минимум какого-то критерия качества, называется экстремальной (от слова экстремум, обозначающего максимум или минимум).

Во многих современных бытовых устройствах (например, в стиральных машинах) используются нечеткие регуляторы, построенные на принципах нечеткой логики. Этот подход позволяет формализовать человеческий способ принятия решения.

Одно из популярных направлений в современной теории – применение достижений искусственного интеллекта для управления техническими системами. Регулятор строится (или только настраивается) на основе нейронной сети, которую предварительно обучает человек-эксперт.

Цель любого управления – изменить состояние объекта нужным образом (в соответствии с заданием). Для этого разработчику необходимо знать, как система управления будет реагировать на разные воздействия, то есть нужна модель системы: объекта, привода, датчиков, каналов связи, возмущений, шумов.

Модель – это объект, который мы используем для изучения другого объекта (оригинала). Модель и оригинал должны быть в чем-то похожи, чтобы выводы, сделанные при изучении модели, можно было бы (с некоторой вероятностью) перенести на оригинал. Математические модели выражаются в виде формул. Кроме того, в науке используются описательные (словесные), графические, табличные и другие модели. Математическое описание системы начинается с разбиения ее на звенья и описания этих звеньев. По уравнениям или характеристикам отдельных звеньев составляются уравнения или характеристики системы в целом, на основании которых и исследуется система.

При разбиении системы на возможно более простые («мелкие») звенья, необходимо учитывать, чтобы они обладали направленностью действия. Звеном направленного действия называется звено, передающее воздействие только в одном направлении – с входа на выход, так что изменение состояния такого звена не влияет на состояние предшествующего звена, работающего на его вход. В результате при разбиении системы на звенья направленного действия математическое описание каждого такого звена может быть составлено без учета связей его с другими звеньями. Соответственно, математическое описание всей системы в целом может быть получено как совокупность составленных независимо друг от друга уравнений или характеристик отдельных звеньев, образующих систему, дополненных уравнениями связи между звеньями.

В результате разбиения САУ на звенья направленного действия и получения математического описания звеньев составляется структурная схема системы, которая и является ее математической моделью. Структурная схема системы состоит из прямоугольников, изображающих звенья схемы, и стрелок, соединяющих выходы и входы звеньев согласно связям между звеньями в системе. Стрелками показываются также внешние воздействия, приложенные к отдельным звеньям системы. Каждому звену структурной схемы придается описывающее его уравнение или характеристика. При этом уравнение обычно записывается прямо на схеме внутри изображающего звено прямоугольника в виде передаточной функции. Получение структурной схемы является конечной целью математического описания системы.

Рассмотрим связь входа и выхода при моделировании функционирования системы. Любой объект взаимодействует с внешней средой с помощью входов и выходов. Входы – это возможные воздействия на объект, выходы – это те сигналы, которые можно измерить. Например, для электродвигателя входами могут быть напряжение питания и нагрузка, а выходами частота вращения вала, температура.

Входы независимы, они «приходят» из внешней среды. При изменении информации на входе меняется внутреннее состояние объекта (так называют его изменяющиеся свойства) и, как следствие, выходы. Существует некоторое правило, по которому элемент преобразует вход в выход. Это правило называется оператором. Построить модель – это значит найти оператор, связывающий входы и выходы. С его помощью можно предсказать реакцию объекта на любой входной сигнал.

Для любого объекта управления можно построить множество различных моделей, которые будут учитывать (или не учитывать) те или иные факторы. Обычно на первом этапе стараются описать объект как можно более подробно, составить детальную модель. Однако при этом будет трудно теоретически рассчитать закон управления, который отвечает заданным требованиям к системе. Даже если его рассчитать, он может оказаться слишком сложным для реализации или очень дорогим.

Можно упростить модель объекта, отбросив некоторые «детали», которые кажутся разработчику маловажными. Для упрощенной модели закон управления также получается проще, и с его помощью часто можно добиться желаемого результата. Однако в этом случае нет гарантии, что он будет так же хорошо управлять полной моделью (и реальным объектом).

Обычно используется компромиссный вариант. Начинают с простых моделей, стараясь спроектировать регулятор так, чтобы он «подходил» и для сложной модели. Это свойство называют робастностью (грубостью) регулятора (или системы), оно означает нечувствительность к ошибкам моделирования. Затем проверяют работу построенного закона управления на полной модели или на реальном объекте. Если получен отрицательный результат (простой регулятор «не работает»), усложняют модель, вводя в нее дополнительные подробности. И все начинается сначала.

Из курса математики известно, что проще всего решать линейные уравнения. С нелинейными уравнениями (квадратными, кубическими и др.) работать намного сложнее, многие типы уравнений нельзя решить аналитически (точно).

Среди операторов самые простые – также линейные. Модели, которые описываются линейными операторами, называются линейными. С ними можно работать с помощью методов теории линейных систем, которая наиболее развита и позволяет точно решать большинство известных практических задач.

Все модели реальных систем – нелинейные. Методы исследования нелинейных операторов очень сложны математически, в теории нелинейных систем точные решения известны только для достаточно узкого круга задач. Поэтому, сначала проводят линеаризацию нелинейной модели объекта (привода), то есть строят приближенную линейную модель. Затем на основе этой модели проектируют закон управления, применяя точные методы теории линейных систем. Наконец, проверяют полученный регулятор с помощью компьютерного моделирования на полной нелинейной модели. Если объект или привод имеют так называемую «существенную» нелинейность, этот подход может не сработать. Тогда приходится использовать методы нелинейной теории, а также компьютерное моделирование.

Математической моделью динамической системы принято называть совокупность аналитических выражений и алгоритмов, однозначно определяющих развитие процессов в системе, т.е. ее движение. В зависимости от типа сигналов различаются непрерывные и дискретные модели систем. В зависимости от используемых операторов – линейные и нелинейные, временные и частотные модели. К временным относятся модели, в которых аргументом является время (непрерывное или дискретное). Это дифференциальные и разностные уравнения, записанные в явном виде или в операторной форме. Частотные модели предусматривают использование операторов, аргументом которых является частота соответствующего сигнала.

Аналитические модели вход-выход (ВВ) – это описание связи входных и выходных сигналов динамической системы, которое применяется как для отдельных блоков, так и всей системы управления в целом. Для обозначения входных и выходных сигналов воспользуемся обозначениями, характерными для объекта управления, где входным сигналом является управляющее воздействие, а выходным регулируемая переменная.

2. ПРАКТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Уравнения и передаточные функции

Теория.

Система или звено с одним выходом y и двумя входами u и v в общем случае описывается уравнением

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n) y = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m) u + (c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l) u$$

или

$$Q(p)Y = P_1(p)u + P_2(p)u, \ (1)$$

где p обозначает оператор дифференцирования $(p^k x = x^{(k)})$,

$$Q(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$P_1(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m,$$

$$P_2(p) = c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l.$$

Дифференциальный оператор $Q(p)$ при выходной переменной называется собственным оператором, а дифференциальные операторы $P_1(p)$ и $P_2(p)$ при входных переменных u и v – операторами воздействия. Отношение оператора воздействия к собственному оператору называется передаточной функцией в операторной форме.

Степень полинома знаменателя передаточной функции называют порядком, а разность между ее степенями знаменателя и числителя – относительным порядком или относительной степенью передаточной функции и соответствующей ей системы.

Нулями и полюсами передаточной функции $W(p) = P(p)/Q(p)$ называют нули ее числителя и знаменателя соответственно, т.е. корни уравнения $P(p) = 0$ и $Q(p) = 0$, где p рассматривается как переменная, а не как оператор.

Система (1) определяется двумя передаточными функциями: передаточной функцией, относительно входа u и передаточной функцией

$$W_u(p) = \frac{P_1(p)}{Q(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n},$$

относительно входа u и передаточной функцией

$$W_v(p) = \frac{P_2(p)}{Q(p)} = \frac{c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}$$

относительно входа v. Порядок этих передаточных функций равен n, а относительно порядка – $(n - m)$ для передаточной функции $W_u(p)$ и $(n - l)$ для передаточной функции $W_v(p)$.

С помощью передаточной функции уравнение рассматриваемой системы управления можно записать в виде

$$y = W_u(p)u + W_v(p)v = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} u + \frac{c_0 p^l + c_1 p^{l-1} + \ldots + c_l}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n} v.$$

Имеющее наименьший порядок отношений изображений Лапласа выходной и входной переменных, вычисленных при нулевых начальных условиях, называется передаточной функцией в изображениях Лапласа. В соответствии с определением передаточная функция в изображениях Лапласа не может иметь равные между собой нули и полюса, так как в этом случае ее порядок может быть понижен путем сокращения числителя и знаменателя на общий множитель.

Передаточная функция системы управления в изображениях Лапласа $W(s)$ может быть определена по ее передаточной функции в операторной форме $W(p)$ следующим образом:

$$W(s) = W(p)\,|_{p=s} \;.$$

Если передаточная функция $W(p)$ содержит одинаковые нули и полюса, то элементарные множители, соответствующие этим корням в числителе и знаменателе, после подстановки $p = s$ должны быть сокращены.

Пример 1.

1) Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнениями:

$a) \dot{y} + y = u;$

$б) \ddot{y} - y = \dot{u} - u.$

Решение. В символической форме уравнение записывается в виде

а) p - оператор дифференцирования

$$p^k x = x^{(k)}$$

$$py = p^{\circ} y = u$$

$$(p+1)y = u$$

$$Q(p)y = P(p)u.$$

Передаточная функция в операторной форме имеет вид:

$$W(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$$

$$Q(p) = p + 1$$

$$P(p) = 1$$

$$W(p) = \frac{1}{p+1}.$$

Передаточная функция в изображениях Лапласа имеет вид:

$$W(s) = W(p)\,|_{p=s} \;.$$

Тогда

$$W(s) = \frac{1}{p+1}\,|_{p=s} = \frac{1}{s+1}$$

б) в символической форме уравнения записывается в виде:

$$(p^2 - 1)y = (p-1)u$$

Передаточная функция в операторной форме

$$W(p)=\frac{p-1}{p^2-1}=\frac{p-1}{(p-1)(p+1)}=\frac{1}{p+1}.$$

Передаточная функция в изображениях Лапласа

$$W(s)=W(p)|_{p=s}=\frac{1}{s+1}.$$

Пример 2.

Определить передаточные функции в операторной форме систем управления, которые описываются уравнениями (y-выход, x-вход):

а) $\dddot{y}+2\ddot{y}+4\dot{y}+3y=7\ddot{u}+5\dot{u}+4u$

<u>Решение:</u>

$$p^k x = x^{(k)}$$

$$p^3y+2p^2y+4py+3p^\circ y=7p^2u+5pu+4p^\circ u$$

$$\underbrace{(p^3+2p^2+4p+3)}_{Q(p)}y=\underbrace{(7p^2+5p+4)}_{P(p)}u$$

$$W(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$$

$$W(p)=\frac{7p^2 5p+4}{p^3+2p^2+4p+3}.$$

б) $\dddot{y}+4\ddot{y}+3\dot{y}=\ddot{u}+3\dot{u}+2u$

<u>Решение:</u>

$$(p^3+4p^2+3p)y=(p^2+3p+2)u$$

$$W(p)=\frac{p^2+3p+2}{p^3+4p^2+3p}.$$

в) $\dddot{y}+4\ddot{y}+3\dot{y}+y=\ddot{u}+4\dot{u}+3u$

<u>Решение:</u>

$$(p^3+4p^2+3p+1)y=(p^2+4p+3)u$$

$$W(p)=\frac{p^2+4p+3}{p^{3.}+4p^2+3p+1}.$$

Пример 3.

Определить передаточные функции в изображениях Лапласа систем управления, которые описываются уравнениями, приведенными в задании 2.

а) $W(s)=W(p)|_{p=s}$

$$W(s)=\frac{7p^2+5p+4}{p^3+2p^2+4p+3}|_{p=s}=\frac{7s^2+5s+4}{s^3+2s^2+4s+3}$$

б) $W(s)=\dfrac{p^2+3p+2}{p^3+4p^2+3p}\Big|_{p=s}=\dfrac{s+2}{s(s+3)}=\dfrac{s^2+3s+2}{s(s^2+4s+3)}=\dfrac{(s+2)(s+1)}{s(s+3)(s+1)}=\dfrac{s+2}{s(s+3)}$

$s^2+3s+2=0$ $\qquad$ $s^2+4s+3=0$ $\qquad$ $s^2+3s+2=(s+2)(s+1)$

$s^2+4s+3=(s+3)(s+1)$

По т.Виета $\qquad$ По т.Виета

$x_1=-2$ $\qquad$ $x_1=-3$

$x_2=-1$ $\qquad$ $x_2=-1$

в) $W(s)=\dfrac{p^2+4p+3}{p^3+4p^2+3p+1}\Big|_{p=s}=\dfrac{s^2+4s+3}{s^3+4s^2+3s+1}$

Пример 4.

Записать дифференциальные уравнения систем уравнения с одним выходом y и двумя входами u и v, передаточные функции которых имеют вид:

а) $W_u(p)=\dfrac{5p+4}{p^3+2p^2+4p+3}$,

$W_v(p)=\dfrac{p+2}{p^3+2p^2+4p+3}$

Решение:

Уравнение систем уравнения с помощью передаточной функции записывается в виде:

$y=W_u(p)u+W_v(p)v$

$$y=\frac{5p+4}{p^3+2p^2+4p+3}\cdot u+\frac{p+2}{p^3+2p^2+4p+3}\cdot v=\frac{(5p+4)u+(p+2)v}{p^3+2p^2+4p+3}$$

$(p^3+2p^2+4p+3)y=(5p+4)u+(p+2)v.$

ДУ с одним выходом y и двумя выходами u и v имеет вид:

$\dddot{y}+2\ddot{y}+4\dot{y}+3y=5\dot{u}+4u+\dot{v}+2v$.

б) $W_u(p)=\dfrac{5p+2}{2p^3+4p+3}$

$W_v(p)=\dfrac{p+3}{2p^3+4p+3}$.

Решение:

$$y=\frac{5p+2}{2p^3+4p+3}\cdot u+\frac{p+3}{2p^3+4p+3}\cdot v=\frac{(5p+2)u+(p+3)v}{2p^3+4p+3}$$

$(2p^3+4p+3)y=(5p+2)u+(p+3)v$

$2y+4\dot{y}+3y=5\dot{u}+2u+\dot{v}+3v.$

в) $W_u(p)=\dfrac{4}{p^3+8p^2+15p}$

$W_v(p)=\dfrac{p+4}{p^3+8p^2+15p}$

Решение:

$y=\dfrac{4u+(p+4)v}{p^3+8p^2+15p}$

$(p^3+8p^2+15p)y=4u+(p+4)v.$

ДУ имеет вид:

$\dddot{y}+8\ddot{y}+15\dot{y}=4u+\dot{v}+4v.$

2.2. Временные функции

Теория.

Переходной функцией системы (звена) называют функцию, описывающую реакцию системы на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях. Переходную функцию обозначают $h(t)$. График переходной функции – кривую зависимость $h(t)$ от времени t- называют переходной или разгонной характеристикой.

Импульсной переходной или весовой функцией (функцией веса) называют функцию, описывающую реакцию системы (звена) на единичное импульсивное воздействие при нулевых начальных условиях. Весовую функцию обозначают $w(t)$. График импульсной переходной функции называют импульсной переходной характеристикой. Переходную и импульсную переходную функции называют временными функциями, а их графики- временными характеристиками.

Передаточная функция в изображениях Лапласа есть преобразование Лапласа от весовой функции:

$$W(s)=L\{w(t)\}=\int_0^\infty w(t)e^{-st}dt.$$

Весовая функция равна производной от переходной функции:

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}.$$

Если изображение временной функции $x(t)$ имеет вид $X(s)=B(s)\,/\,A(s)$, где $B(s)$ и $A(s)$ – полиномы, и степень n полинома $A(s)$ больше степени m полинома B(s), то

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(s_i)}{A'(s_i)}e^{s_it},\ A'(s_i)=\frac{dA(s)}{ds}\Big|_{s=s_i}\ . \qquad (2)$$

Если нули s_i полинома $A(s)$-простые. Если какой-либо полюс s_k имеет кратность n_k, то ему соответствует слагаемое

$$\frac{1}{(n_k-1)!}\lim_{s\to s_k}\frac{d^{nk-1}}{ds^{nk-1}}(X(s-s_k)^{nk}e^{st}). \qquad (3)$$

Пример 5.

Определить переходную и весовую функции звена с придаточной функцией

а) $W(s)=\dfrac{2(s+1)}{(0.5s+1)s}$.

<u>Решение:</u>

Передаточная функция $W(s)$ является изображением Лапласа весовой функции $W(t)$.

$$W(s)=\frac{P(s)}{Q(s)},$$

$$(0,5s+1)s=0,$$

$$s_1=0,$$

$s_2=-2$ – полоса передаточной функции являются простыми, => весовая функция $W(t)$ определяется по формуле (2).

Нули числителя $P(s)$ = 0 называются <u>нулями</u> передаточной функции $W(s)$. Нули знаменателя $Q(s)$=0 называются <u>полосами</u> передаточной функции $W(s)$.

$$B(s)=2(s+1), A(s)=(0,5s+1)\cdot s$$

$$B(s_1)=2(0+1)=2;$$

$$A'(s)=0,5\cdot s+0,5s+1=s+1$$

$$A'(s_1)=0+1=1; A'(s_2)=-2+1=-1.$$

В соответствии с (2) получаем:

$$W(t)=\frac{B(s_1)}{A'(s_1)}e^{S_1t}+\frac{B(s_2)}{A'(s_2)}e^{S_2t}$$

$$W(t)=\frac{2}{1}e^{o\cdot t}+\frac{-2}{-1}e^{-2t}=2(1+e^{-2t}).$$

Так как L_1(t)/s, то для изображения переходной функции имеем

$$H(s)=W(s)\cdot\frac{1}{s}=\frac{2(s+1)}{s^2(0,5s+1)}.$$

В это случае полюс $s_1=0$ имеет кратность $n_1=2$, а полюс $s_2=-2$ – простой. Поэтому слагаемое, соответствующее полюсу $s_1=0$, находим по формуле (3), а слагаемое, соответствующее полюсу $s_2=-2$ – по формуле (2).

Согласно формуле (3) имеем

$$\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}(H(s)s^2e^{st})=\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}(\frac{2(s+1)}{0,5s+1}\cdot e^{st})=$$

$$=\lim_{s\to 0}(\frac{2(0.5s+1)-2(s+1)\cdot 0,5}{(0,5s+1)^2}\cdot e^{st}+\frac{2(s+1)}{0,5s+1}\cdot t\cdot e^{st})=1+2t.$$

Т.к. $B(s)=2(s+1), A'(s)=1,5s^2+2s$, для слагаемого, соответствующего полюсу $s_2=-2$, имеем (см.(2))

$$\frac{-2}{2}e^{-2t}=-e^{-2t}.$$

То есть, переходная функция имеет вид

$$h(t)=1+2t-e^{-2t}.$$

б) $W(s)=\dfrac{2(s+1)}{(s+2)^2(s+3)}$.

<u>Решение:</u>

$$W(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

$$Q(s)=0\Leftrightarrow (s+2)^2(s+3)=0$$

$s_1=-2, s_2=-3$ – полюса передаточной функции;

$s_1=-2$ имеет кратность $n_1=2,\Rightarrow$ весовая функция по формуле (3);

$s_2=-3$ – простой полюс,$\Rightarrow$ весовая функция по формуле (2).

По формуле (3) имеем:

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left(\frac{2(s+1)}{s+3}\cdot e^{st}\right)=\lim_{s\to -2}\left(\frac{2(s+3)-2(s+1}{(s+3)^2}\cdot e^{st}+\frac{2(s+1)}{s+3}\cdot t\cdot e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to -2}\left(\frac{4}{(s+3)^2}\cdot e^{st}+\frac{2(s+1)}{s+3}\cdot te^{st}\right)=4e^{-2t}-2te^{-2t}.$$

По формуле (2) имеем для $s_2=-3$:

$$B(s)=2(s+1)$$

$$A(s)=(s+2)^2(s+3)$$

$$A'(s)=2(s+2)(s+3)+(s+2)^2=(s+2)(2s+6+s+2)=(s+2)(3s+8)$$

$$A'(-3)=(-3+2)(3\cdot(-3)+8)=1$$

$$B(s_2)=B(-3)=2(-3+1)-4$$

$$w(t)=\frac{B(s_2)}{A'(s_2)}e^{S_2t}=\frac{-4}{1}e^{-3t}=-4e^{-3t}.$$

Весовая функция имеет вид:

$$w(t)=4e^{-2t}-2te^{-2t}-4e^{-3t}=2\left[(2-t)e^{-2t}-2e^{-3t}\right].$$

Переходная функция имеет вид:

$$H(s)=\frac{W(s)}{s}=\frac{2(s+1)}{s(s+2)^2(s+3)},$$

$s(s+2)^2(s+3)=0 \Leftrightarrow s_1=0, s_2=-2, s_3=-3,$

$s_1=0$ – простой полюс,

$s_2=-2$ – полюс кратности $n_2=2$,

$s_3=-3$ – простой полюс.

Для $s_1=0$ и $s_3=-3$ переходную функцию находим по (2)

$B(s)=2(s+1)$

$B(s_1)=2(0+1)=2, B(S_3)=2(-3+1)=2(-2)=-4$

$A(s)=s(s+2)^2(s+3)$

$$A'(s)=\left[s(s+2)^2\right]'\cdot(s=s)=s(s+2)^2\cdot(s+3)^1=\left[(s+2)^2+s\cdot 2(s+2)\right](s+3)+s(s+2)^2=$$

$$=(s+2)((3s+2)(s+3)+s(s+2))=(s+2)(4s^2+13s+6)$$

$A'(s_1)=A'(0)=2(2\cdot 3)=12$

$A'(s_3)=A'(-3)=(-1)\cdot((-3)\cdot(-1))=-3$

$$\frac{-2}{12}e^{ot}+\frac{-4}{-3}e^{-3t}=2\left(\frac{1}{12}+\frac{2}{3}e^{-3t}\right).$$

Для $s_2=-2$ переходную функцию находим по (3):

$$\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-2}\frac{d}{ds}\left(\frac{2(s+1)}{s(s+2)^2(s+3)}\cdot(s+2)^2\cdot e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to-2}\left(\frac{2s(s+3)-2(s+1)\cdot((s+3+s)}{s^2(s+3)^2}\cdot e^{st}+\frac{2(s+1)}{s(s+3)}\cdot t\cdot e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to-2}\left(\frac{2s(s+3)-2(s+1)(2s+3)}{s^2(s+3)^2}\cdot e^{st}+\frac{2(s+1)}{s(s+3)}\cdot t\cdot e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to-2}\left(\frac{-2s^2-4s-6}{s^2(s+3)^2}\cdot e^{st}+\frac{2(s+1)}{s(s+3)}\cdot t\cdot e^{st}\right)=$$

$$=-\frac{6}{4}\cdot e^{-2t}+t\cdot e^{-2t}=2e^{-2t}\cdot\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t\right).$$

Исходная переходная функция имеет вид:

$$2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{2}{3}e^{-3t}\right)+2e^{-2t}\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t\right)=2\left[\left(\frac{1}{12}+\frac{2}{3}e^{-3t}\right)+e^{-2t}\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{2}t\right)\right].$$

Пример 6.

1) Определить передаточные функции звеньев, описываемых уравнениями:

а) $\ddot{y}+4\dot{y}+3y=5\dot{u}+u$.

Решение:

$$(p^3+4p+3)y=(5p+1)u$$

$$W(p)=\frac{5p+1}{p^3+4p+3}$$

$$W(s)=W(p)|_{p=s}=\frac{5s+1}{s^3+4s+3}.$$

б) $\dddot{y}+5\ddot{y}+4\dot{y}+y=\ddot{u}+4\dot{u}+3y$.

Решение:

$$(p^3+5p^2+4p+1)y=(p^2+4p+3)u$$

$$W(p)=\frac{p^2+4p+3}{p^3+5p^2+4p+1}$$

$$W(s)=W(p)|_{p=s}=\frac{s^2+4s+3}{s^3+5s^2+4s+1}.$$

Пример 7.

Записать ДУ систем управления с одним выходом и двумя u и v, передаточные функции которых имеют вид:

а) $W_u(p)=\dfrac{3p+2}{p^3+4p^2+3p}$, $\quad W_v(p)=\dfrac{3}{p^3+4p^2+3p}$.

Решение:

$$y=\frac{(3p+2)u+3v}{p^3+4p^2+3p}$$

$$(p^3+4p^2+3p)y=(3p+2)u+3v.$$

ДУ имеет вид:

$$\dddot{y}+4\ddot{y}+3\dot{y}=3\dot{u}+2u+3v.$$

б) $W_u(p)=\dfrac{p+3}{6p^3+4p^2+3p+1}$, $\quad W_v(p)=\dfrac{2p+1}{6p^3+4p^2+3p+1}$

Решение:

$$y=\frac{(p+3)u+(2p+1)v}{6p^3+4p^2+3p+1}$$

$$(6p^3+4p^2+3p+1)y=(p+3)u+(2p+1)v.$$

ДУ имеет вид:

$$6\dddot{y}+4\ddot{y}+3\dot{y}+y=\dot{u}+3u+2\dot{v}+v.$$

Пример 8.

Определить переходную и весовую функции звена с передаточной функцией

$$W(s)=\frac{6(s+2)}{(s+4)^2(s+1)}$$

Решение:

$$W(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}$$

$Q(s)=0 \Leftrightarrow (s+4)^2(s+1)=0,$

$s_1=-4, s_2=-1$ – полюса передаточной функции

$s_1=-4$ кратности $n_1=2, \Rightarrow$ весовую функцию находим по формуле (3):

$$w(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-4}\frac{d}{ds}\left(\frac{6(s+2)}{(s+4)^2(s+1)}\cdot(s+4)^2e^{st}\right)=\lim_{s\to-4}\frac{d}{ds}\left(\frac{6(s+2)}{s+1}\cdot e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to-4}\left(\frac{6\cdot((s+1)+(s+2)}{(s+1)^2}\cdot e^{st}+\frac{6(s+2)}{s+1}\cdot t\cdot e^{st}\right)=\lim_{s\to-4}\left(\frac{-6}{(s+1)^2}e^{st}+\frac{6(s+2)}{s+1}\cdot t\cdot e^{st}\right)=$$

$$=-\frac{6}{9}e^{-4t}+\frac{12}{3}\cdot t\cdot e^{-4t}=6e^{-4t}\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t\right)$$

Для $s_2=-1$ весовую функцию определять по формуле (2):

$$W(s)=\frac{B(s)}{A(s)},$$

где

$B(s)=6(s+2)$

$B(s_2)=+(-1+2)=6$

$A(s)=(s+4)^2(s+1)$

$A'(s)=2(s+4)(s+1)+(s+4)^2=(s+4)(2s+2+s+4)=(s+4)(3s+6)$

$A'(s_2)=(-1+4)(3\cdot(-1)+6)=3\cdot3=9.$

По (2) имеем:

$$w(t)=\frac{6}{9}e^{-t}.$$

Окончательно, имеем весовую функцию:

$$w(t)=6e^{-4t}\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t\right)+\frac{6}{9}e^{-t}=6\left[e^{-4t}(-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}t)+\frac{1}{9}e^{-t}\right].$$

Для изображения переходит функции имеем:

$$H(s)=\frac{W(s)}{s}=\frac{6(s+2)}{s(s+4)^2(s+1)},$$

$s(s+4)^2(s+1)=0.$

$s_1=0, s_2=-4, s_3=-1$ – полюса

$s_1=0$ и $s_3=-1$ – простые полюса, $\Rightarrow$ переходную функцию находим по формуле (2):

$$H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$$

$$B(s)=6(s+2)$$

$$B(s_1)=12, B(s_3)=6(-1+2)=6$$

$$A(s)=s(s+4)^2(s+1)$$

$$A'(s)=(s+1)\cdot\left[\left(s+4\right)^2+s\cdot 2(s+4)\right]+s\cdot(s+4)^2=$$

$$=(s+1)\left[(s+4)^2+2s(s+4)\right]+s(s+4)^2=$$

$$=(s+1)\left[(s+4)(s+4+2s)\right]+s(s+4)^2=$$

$$=(s+1)(s+4)(3s+4)+s(s+4)^2=$$

$$=(s+4)((s+1)(3s+4)+s(s+4))=(s+4)(4s^2+11s+4)$$

$$A'(s_1)=16$$

$$A'(s_2)=(-1+4)(4-11+4)=-9.$$

По (1.2) имеем:

$$h(t)=\frac{10}{16}e^{ot}+\frac{6}{-9}e^{-t}=6\left(\frac{2}{16}-\frac{1}{9}e^{-t}\right)$$

$s_2=-4$ – полюс кратности $n_2=2,\Rightarrow$ переходную функцию находим по формуле (3):

$$h(t)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to-4}\frac{d}{ds}\left(\frac{6(s+2)}{s(s+4)^2(s+1)}(s+4)^2e^{st}\right)=\lim_{a\to-4}\frac{d}{ds}\left(\frac{6(s+2)}{s(s+1)}e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to-4}\left(\frac{6\left[(s+1)-(s+2)\cdot(s+s+1)\right]}{s^2(s+1)^2}\cdot e^{st}+\frac{6(s+2)}{s(s+1)}t\cdot e^{st}\right)=$$

$$=\lim_{s\to-4}\left(\frac{6(-s^2-4s-2)}{s^2(s+1)^2}e^{st}+\frac{6(s+2)}{s(s+1)}\cdot te^{st}\right)=$$

$$=6\cdot\left(-\frac{1}{8\cdot 9}\right)e^{-4t}-6\cdot\frac{1}{2\cdot 3}te^{-4t}=6e^{-4t}\left(-\frac{1}{72}-\frac{1}{6}t\right).$$

Окончательно, имеем переходную функцию:

$$h(t)=6\left(\frac{2}{16}-\frac{1}{9}e^{-t}\right)+6e^{-4t}\left(-\frac{1}{72}-\frac{1}{6}t\right)=6\cdot\left[\frac{2}{16}-\frac{1}{9}e^{-t}+e^{-4t}\left(-\frac{1}{72}-\frac{1}{6}t\right)\right].$$

2.3. Частотные функции и характеристики

Теория:

Функцию $W(j\omega)$, которая получается из передаточной функции в изображениях Лапласа $W(s)$ при подстановке $s = j\omega$, называют частотной передаточной функцией. Она является комплекснозначной функцией от действительной переменной ω, называемой частотой. Частотную передаточную функцию можно представить в виде

$W(j\omega) = U(\omega) = jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(w)}$,

где

$A(W) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$, $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$.

Если $\left|\arg W(j\omega)\right| \le \frac{\pi}{2}$, то $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\,\frac{V(\omega)}{U(\omega)}$.

На комплексной плоскости частотная передаточная функция $W(j\omega)$ определяет вектор $\overrightarrow{CO}$, длина которого равно $A(\omega)$, а аргумент – углу $\varphi(\omega)$, образованному этим вектором с положительной действительной полуосью. Кривую, описываемую концом вектора $W(j\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ или -∞ до ∞, называют амплитудно-фазовой частотной характеристикой (АФЧХ).

АФЧХ, получаемую при изменении частоты от -∞до ∞, называют также диаграммой Найквиста. Модуль $A(\omega) = \left|W(j\omega)\right|$ называют амплитудной частотной функцией, ее график – амплитудной частотной функцией. Аргумент $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$ называют фазовой частотной функцией, а его график (при изменении ω от 0 до ∞) – фазовой частотной характеристикой.

Частотной передаточную функцию $W(j\omega)$ называют также амплитудно-фазовой частотной функцией. Ее действительную $U(\omega) = \mathrm{Re}\,W(j\omega)$ и мнимую $V(\omega) = \mathrm{Im}\,W(j\omega)$ части называют соответственно вещественной и мнимой частотной функцией, а их графики – кривые зависимостей $U = U(\omega)$ и $V = V(\omega)$ – вещественной и мнимой частотной характеристикой соответственно.

Кроме перечисленных частотных характеристик имеются логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ): логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) и логарифмические фазовые частотные характеристики (ЛФЧХ).

Функцию $L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left|W(j\omega)\right|$ называют логарифмической амплитудной частотной функцией, а график зависимости функции $L(\omega)$ от логарифма частоты $lg\,\omega$ – логарифмической амплитудной частотной характеристикой (ЛАЧХ).

При построении ЛАЧХ по оси абсцисс откладывают значение частоты в логарифмическом масштабе и при этом на отметке, соответствующей значению $lg\,\omega$, записывают значение ω; по оси ординат откладывают и записывают значение $L(\omega) = 20\lg A(\omega)$.

Логарифмической фазовой частотной характеристикой (ЛФЧХ) называют график зависимости функции $\varphi(\omega)$ от логарифма частоты $lg\,\omega$. При ее построении на оси абсцисс, как и при построении ЛАЧХ, на отметке, соответствующей значению $lg\,\omega$, записывают значение ω.

В ЛХЧ единицей функции $L(\omega)$ является децибел, а единицей $lg\ \omega$ – декада. Декадой называют интервал, на котором частота изменяется в 10 раз. При изменении частоты в 10 раз говорят, что частота изменилась на одну декаду.

Определенные трудности представляет вычисление фазовой частотной функции. Если эта функция по модулю не превышает $\pi/2$, то она определяется по формуле $\varphi(\omega) = arctg(V(\omega) / U(\omega)$.

Правило вычисления модуля и аргумента. При вычислении амплитуды и фазовой частотной функций полезно следующее правило вычисления модуля и аргумента проведения и частного комплексных чисел (функций)

1) Модуль произведения $Z = z_1 z_2 \ldots z_n$ комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей :

$$|Z| = |z_1||z_2|\ldots|z_n|,$$

а аргумент – сумме аргументов сомножителей:

$$\arg Z = \arg z_1 + \arg z_2 + \ldots + \arg z_n .$$

2) Модуль частного комплексных чисел (функций) $Z = Z_1 / Z_2$ равен отношению модулей

$$|Z| = |Z_1| / |Z_2|,$$

а аргумент – разности аргументов числителя и знаменателя:

$$\arg Z = \arg Z_1 - \arg Z_2 .$$

Элементарные звенья и их характеристики. Так как произвольные полином можно разложить на простые множители, то передаточную функцию системы (звена)

$$W(s)\frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}$$

Всегда можно представить в виде произведения простых множителей и дробей вида

$$\kappa, s, \frac{1}{s}, Ts \pm 1, \frac{1}{Ts \pm 1}, T^2 s^2 \pm 2\varsigma Ts + 1, \frac{1}{T^2 s^2 \pm 2\varsigma Ts + 1}.$$

Здесь k называется передаточным коэффициентом, T – постоянной времени и ς $(0<\varsigma<1)$ – коэффициентом демпфирования.

Звенья, передаточные функции которых имеют вид простых множителей или дробей, называют элементарными звеньями. Их также называют типовыми.

Системы, звенья и их передаточные функции делятся на минимально-фазовые и неминимально-фазовые Передаточная функция $W(s) = P(s)/Q(s)$ называется минимально-фазовой, если все ее нули (корни уравнения $P(s)=0$ и полюса (корни уравнения $Q(s)=0$) располагаются в левой полуплоскости, и неминимально-фазовой, если хотя бы один нуль или полюс располагается в правой полуплоскости.

Система и звено называется минимально-фазовыми, если их передаточные функции являются минимально-фазовыми, и неминимально-фазовыми, если их передаточные функции являются неминимально-фазовыми.

Передаточные функции системы, не являющиеся ни минимально-фазовыми и ни неминимально-фазовыми, иногда называют нейтральными или маргинальными. Иначе говоря, передаточная функция называется маргинальной, если она имеет нуль или полюс на мнимой оси, но не имеет их в правой полуплоскости.

Тип звена определяется видом его передаточной функции. При этом если передаточные функции звеньев отличаются только на постоянный множитель, то их относят к одному и тому же типу. Поэтому при определении типа элементарных звеньев будем исходить из передаточных функций, получаемых из умножением на константу k (кроме первой).

Звено с передаточной функцией $W(s)=k$ называется пропорциональным звеном, звено с передаточной функцией $W(s)=ks-k/s$ – интегрирующим звеном, звено с передаточной функцией $W(s)=k(Ts+1)$ – форсирующим звеном (первого порядка), звено с передаточной функцией $W(s)=k/(Ts+1)$ – апериодическим звеном, звено с передаточной функцией- $W(s)=k(T^2s^2+2\varsigma Ts+1)$ $(0<\varsigma<1)$ – форсирующим звеном второго порядка, звено с передаточной функцией $W(s)=\dfrac{k}{T^2s^2+2\varsigma Ts+1}$ $(0<\varsigma<1)$ – колебательным звеном.

Фазовые частотные функции минимально-фазовых и нейтральных звеньев с передаточными функциями, представляющими элементарный множитель первого порядка, по модулю не превышают $\pi/2$ и определяются по формуле $\varphi(\omega)=arctg(V(\omega)/U(\omega))$. В случае форсирующего звена второго порядка и колебательного звена фазовая функция определяется по формуле $\varphi(\omega)=arctg(V(\omega)/U(\omega))$ при частотах $\omega\le 1/T$,а при $\omega\ge 1/T$ – по формуле $\varphi(\omega)=\pi+arctg(V(\omega)/U(\omega))$.

Физический смысл частотных характеристик. При гармоническом входном воздействии в устойчивых системах после окончания переходного процесса выходная переменная также изменяется по гармоническому закону с той же частотой, но с другими амплитудой и фазой; амплитуда равна амплитуде входного сигнала, умноженной на модуль частотной передаточной функции, а сдвиг фазы – ее аргументу. Поэтому если система с передаточной функцией W(s) устойчива, то при входном воздействии

$$u = u_m \cos(\omega t + \alpha)$$

после окончания переходного процесса выходной сигнал

$$y = |W(j\omega)| u_m \cos(\omega t + \alpha + \varphi(\omega)).$$

Здесь u_m– постоянная амплитуда входного сигнала, α – начальный сдвиг фазы, $W(j\omega)$ – частотная передаточная функция рассматриваемой системы, $\varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$

Пример 9.

Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции и переходную функцию пропорционального звена.

Решение:

Звено с передаточной функцией $W(s) = k$, назначается пропорциональным звеном.

$W(j\omega) = k$ – передаточная частотная функция,

$U(\omega) = k$; $V(\omega) = 0$ – вещественная и мнимая частотные функции,

$A(\alpha) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} = k$ – амплитудная частотная функция.

(I сп.)

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{k}{k} = 1 \\ \sin\varphi = \dfrac{0}{k} = 0 \end{cases} \quad \varphi(\omega) = 0$$ – фазовая частотная функция.

$$\cos\varphi = \frac{U(\omega)}{A(\omega)},$$

$$\sin\varphi = \frac{A(\omega)}{U(\omega)},$$

$$A(\omega) = |W(js)|.$$

(II сп.) Или $\varphi(\omega) = arctg\dfrac{V(\omega)}{U(\omega)} = arctg\, 0 = 0$.

$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg k$ – логарифмическая амплитудная частотная функция,

$h(t) = L^{-1}\left(\dfrac{W(s)}{s}\right) = L^{-1}\left(\dfrac{k}{s}\right) = k \cdot L^{-1}\left(\dfrac{1}{s}\right) = k \cdot 1(t)$ – переходная функция,

L^{-1} – обратное преобразование Лапласа (по таблице).

Пример 10.

Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции, переходную и весовые функции интегрирующего звена.

Решение:

Звено с передаточной функцией $W(s)=\dfrac{k}{s}$ назначается интегрирующим звеном

$W(j\omega)=\dfrac{k}{j\omega}=\dfrac{k\cdot j}{j^2\omega}=-\dfrac{k}{\omega}j$ – передаточная частотная функция

$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)=0-\dfrac{k}{\omega}j$,

$U(\omega)=0$; $V(\omega)=-\dfrac{k}{\omega}$ –вещественная и мнимая частотные функции

$$\begin{cases} A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\sqrt{0+\dfrac{k^2}{\omega^2}}=\dfrac{k}{\omega}-\cos\varphi=\dfrac{0}{k/\omega}=0 \\ \sin\varphi=-\dfrac{k}{\omega}:\dfrac{k}{\omega}=-1 \end{cases} \Rightarrow \ \varphi(\omega)=-\dfrac{\pi}{2}$$

– фазовая частотная функция $L(\omega)=20lgA(\omega)=20lg\dfrac{k}{\omega}=20lgk-20lg\omega$ – логарифмическая амплитудная функция,

$h(t)=L^{-1}\left(\dfrac{W(s)}{s}\right)=L^{-1}\left(\dfrac{k}{s^2}\right)=K\cdot L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2}\right)=k\cdot t$ – переходная функция,

$W(t)=\dfrac{dh(t)}{d(t)}=(k\cdot t)^1=k$ – весовая функция.

Пример 11.

Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции, переходную и весовую функции апериодического звена.

Решение:

Звено с передаточной функцией $W(s)=\dfrac{k}{Ts+1}$ назначается апериодическим звеном.

$W(j\omega)=\dfrac{k}{Tj\omega+1}$,

$W(j\omega)=\dfrac{k(Tj\omega-1)}{(Tj\omega+1)(Tj\omega-1)}=\dfrac{kTj\omega-k}{-T^2\omega^2-1}=-\dfrac{kTj\omega-k}{T^2\omega^2+1}=\dfrac{k}{T^2\omega^2+1}-j\dfrac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}$,

$U(\omega)=\dfrac{k}{T^2\omega^2+1}$, $V(\omega)=-\dfrac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}$,

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{k^2}{(T^2\omega^2+1)^2}+\frac{k^2T^2\omega^2}{(T^2\omega^2+1)}}=\frac{k}{T^2\omega^2+1}\cdot\sqrt{1+T^2\omega^2}=\frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}},$$

$$\varphi(\omega)=arctg\,\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=arctg\left(-\frac{kT\omega}{T^2\omega^2+1}\cdot\frac{T^2\omega^2+1}{k}\right)=arctg\,(-T\omega)=-arctg\,(T\omega),$$

$$L(\omega)=20lg\,\frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}=20lgk-20lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$h(t)=L^{-1}\left(\frac{W(s)}{s}\right)=L^{-1}\left(\frac{k}{s(T^2+1)}\right)=k\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s\cdot(s+\dfrac{1}{T}}\right)=k\cdot(1-e^{-\frac{t}{T}})$$

$$W(t)=\frac{dh(t)}{dt}=(k\cdot(1-e^{-\frac{t}{T}})^1=k\cdot(-e^{-\frac{t}{T}}\cdot(-\frac{1}{T}))=\frac{k}{T}\cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Пример 12.

Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции колебательного звена.

Решение:

Звено с передаточной функцией $W(s)=\dfrac{k}{T^2s^2+2\varsigma\cdot T\cdot s+1}$ $(0<\varsigma<1)$ назначается колебательным звеном.

$$W(j\omega)=\frac{k}{T^2(j\omega)^2+2\varsigma Tj\omega+1}=\frac{k}{1-T^2\omega^2+j2\varsigma T\omega},$$

$$W(j\omega)=\frac{k\cdot(1-T^2\omega^2-j2\varsigma T)}{(1-T^2\omega^2+2\varsigma T\omega)\cdot(1-T^2\omega^2-j2\varsigma T\omega)}=$$

$$=\frac{k(1-T^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2}+j\frac{2k\varsigma T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2},$$

$$U(\omega)=\frac{k(1-T^2\omega^2)}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2},\ V(\omega)=\frac{2k\varsigma T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2},$$

$$A(\omega)=\sqrt{\frac{k^2(1-T^2\omega^2)^2+(2k\varsigma T\omega)^2}{\left[(1-T^2\omega^{2)^2}+(2\varsigma T\omega)^2\right]^2}}=\sqrt{\frac{k^2\left[(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2\right]}{\left[(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2\right]^2}}=$$

$$=\frac{k}{\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2}},$$

$$arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=arctg\frac{2k\varsigma T\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2}\cdot\frac{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2}{k(1-T^2\omega^2)}=$$

$$=arctg\frac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2},$$

$$\varphi(\omega)=\begin{cases} arctg\dfrac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2} & при \omega\le\dfrac{1}{T}, \\ \Pi+arctg\dfrac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2} & при >\dfrac{1}{T}. \end{cases}$$

$$L(\omega)=20lgA(\omega)=20lgk-20lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+(2\varsigma T\omega)^2}.$$

Пример 13.

На вход системы подается сигнал $u=2\ \sin 0{,}5t$. Определить в установившемся режиме реакцию систем при следующих передаточных функциях:

а) $W(s)=\dfrac{s+1}{(s+2)(0{,}04s^2+0{,}2s+1)}$.

Решение:

Частотная передаточная функция имеет вид

$$W(j\omega)=\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)(0{,}04(j\omega)^2+0{,}2j\omega+1)}=\frac{j\omega+1}{(j\omega+2)(-0{,}04\omega^2+0{,}2j\omega+1)}.$$

ω=0,5, ω< $\frac{1}{T}=\frac{1}{0.2}=5$, поэтому

$$A(0{,}5)=\frac{\sqrt{0{,}5^2+1^2}}{\sqrt{0{,}5^2+2^2}\cdot\sqrt{(1-0{,}4\cdot0{,}5)^2+(0{,}2+0{,}5)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{0{,}25+1}}{\sqrt{0{,}25+4}\cdot\sqrt{0{,}99^2+0{,}12}}=0{,}545,$$

ω = 0,5 подставляем в $W(j\omega)$ и используем правила произведения и частного модуля

$$\phi(0{,}5)=arctg\frac{0{,}5}{1}-arctg\frac{0{,}5}{2}-arctg\frac{0{,}1}{0{,}99}\approx0{,}118.$$

Используем правила частного и произведения аргумента, получаем:

$$(0{,}545\cdot2)\sin(0{,}5t+0{,}118)=1{,}09\sin(0{,}5t+0{,}118).$$

б) $W(s)=\dfrac{2(s+2)}{(s+1)(0{,}09s^2+0{,}3s+1)}$.

Решение:

$$W(j\omega)=\frac{2(j\omega+2)}{(j\omega+1)(0{,}09(j\omega)^2+0{,}3j\omega+1}=\frac{2j\omega+4}{(j\omega+1)(-0{,}09\omega^2+0{,}3j\omega+1)},$$

$$\omega=0{,}5<\frac{1}{T}=\frac{1}{0{,}3}\approx 3,$$

$$A(0{,}5)=\frac{\sqrt{1^2+4^2}}{\sqrt{0{,}5^2+1^2}\cdot\sqrt{(1-0{,}09\cdot 0{,}5^2)^2+0{,}15^2}}\approx 3{,}729,$$

$$\phi(0{,}5)=arctg1/4-arctg\frac{0{,}5}{1}-arctg\frac{0{,}15}{1-0{,}09\cdot 0{,}5^2}\approx -0{,}371.$$

Тогда $u=(3{,}729\cdot 2)\sin(0{,}5t-0{,}371)=7{,}458\sin(0{,}5t-0{,}371)$.

в) $W(s)=\dfrac{10(s+5)}{(s+4)(0{,}36s^2+0{,}84s+1)}$.

Решение:

$$W(j\omega)=\frac{10j\omega+50}{(j\omega+4)(0{,}36(j\omega)^2+0{,}84j\omega+1)}=$$

$$=\frac{10j\omega+50}{(j\omega+4)(-0{,}36\omega^2+0{,}84j\omega+1)}$$

$$\omega=0{,}5<\frac{1}{T}=\frac{1}{0{,}6}\approx 1{,}7.$$

$$A(\omega)=\frac{\sqrt{5^2+50^2}}{\sqrt{0{,}5^2+4^2}\cdot\sqrt{(1-0{,}36\cdot 0{,}25)^2+(0{,}84\cdot 0{,}5)^2}}\approx 12{,}437$$

$$\phi(0{,}5)=arctg\,5/50-arctg\frac{0{,}5}{4}-arctg\frac{0{,}84\cdot 0{,}5}{1-0{,}36\cdot 0{,}25}\approx -0{,}457$$

Тогда u=24,87·sin(0,5t – 0,457)

Пример 14.

1) Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую, амплитудную частотные функции дифференцирующего звена.

Решение:

Звено с передаточной функцией $W(s) = ks$ назначается дифференцирующим звеном.

$W(j\omega) = kj\omega$ – передаточная частотная функция,

$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = jk\omega,$

$U(\omega) = 0$; $V(\omega) = k\omega$ – вещественная и мнимая частотные функции,

$A(\omega)=\sqrt{U^2_{(\omega)}+V^2_{(\omega)}}=0+\sqrt{k^2\omega^2}=k\omega$ – амплитудная частотная функция,

$$\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{0}{k\omega}=0\\ \sin=\dfrac{k\omega}{k\omega=1}\end{cases}\quad \varphi(\omega)=\frac{\pi}{2}$$ – фазовая частотная функция,

$L(\omega)=20\cdot lgA(\omega)=20lg(k\cdot\omega)=20lgk+20lg\omega$ – логарифмическая амплитудная частотная функция.

2) Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную, фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции форсирующего звена.

Решение:

Звена с передаточной функцией $W(s)=(Ts+1)$ назначается форсирующим звеном (1-го порядка).

$W(j\omega)=(kj\omega+1)$,

$W(j\omega)=k+jkT\omega$,

$U(\omega)=\mathrm{k}$; $V(\omega)=kT\omega$,

$$A(\omega)=\sqrt{k^2+k^2T^2\omega^2}=k\cdot\sqrt{1+T^2\omega^2},$$

$$\phi(\omega)=arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\cdot\frac{kT\omega}{k}=arctg(T\omega)$$

$$L(\omega)=20lgA(\omega)=20lg(k\cdot\sqrt{1+T^2\omega^2})=20lgk+20lg\sqrt{1+T^2\omega^2}.$$

3) Определить частотную передаточную функцию, вещественную, мнимую, амплитудную фазовую, логарифмическую амплитудную частотные функции форсирующего звена 2-го порядка.

Решение:

Звено с передаточной функцией $W(s)=k(T^2S^2+2\varsigma Ts+1)$ назначается форсирующим звеном 2-го порядка.

$$W(j\omega)=k(T^2(j\omega)^2+2\varsigma T(j\omega)+1)=k(1-T^2\omega^2+j2\varsigma T\omega),$$

$$W(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$$

$$U(\omega)=k(1-T^2\omega^2);V(\omega)=2k\varsigma T\omega$$

$$A(\omega)=\sqrt{k^2(1-T^2\omega^2)^2+4k^2\varsigma^2T^2\omega^2}=k\cdot\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4\varsigma^2T^2\omega^2},$$

$$arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)}=\frac{2k\varsigma T\omega}{k(1-T^2\omega^2)}=\frac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2},$$

$$\phi(\omega)=\begin{cases} arctg\dfrac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2}\,при\,\omega\le\dfrac{1}{T}, \\ \pi+arctg\dfrac{2\varsigma T\omega}{1-T^2\omega^2}\,при\,\omega>\dfrac{1}{T}. \end{cases}$$

$$L(\omega)=20lgA(\omega)=20lg(k\cdot\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4\varsigma^2T^2\omega^2}=$$

$$=20lgk+20lg\sqrt{(1-T^2\omega^2)^2+4\varsigma^2T^2\omega^2}.$$

Пример 15.

На вход системы подается сигнал $u = 0{,}5\cdot\sin 6t$. Определить в установившемся режиме реакцию систем при следующих передаточных функциях:

а) $W(s)=\dfrac{3(s+1)}{(s+3)(0{,}16s^2+0{,}4s+1)}$.

<u>Решение:</u>

$$W(j\omega)=\frac{3j\omega+3}{(j\omega+3)(0{,}16j^2\omega^2+0{,}4j\omega+1}=\frac{3j\omega+3}{(j\omega+3)(1-0{,}16\omega^2+0{,}4j\omega}$$

$\omega=6<\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0{,}4}=\dfrac{10}{4}=2{,}5,$ поэтому

$$A(6)=\frac{\sqrt{(3\cdot6)^2+3^2}}{\sqrt{6^2+3^2}\cdot\sqrt{(1-0{,}16\cdot6^2)^2+(0{,}4\cdot6)^2}}=0{,}51$$

$$\phi(6)=arctg\frac{3}{3}-arctg\frac{6}{3}-arctg\frac{0{,}4\cdot6}{1-0{,}16\cdot6^2}=0{,}145$$

Тогда $y=0{,}5\cdot0{,}51\cdot\sin(6t+0{,}145)=0{,}255\sin(6t+0{,}145)$.

б) $W(s)=\dfrac{5(s+3)}{(s+1)(0{,}36s^2+0{,}6s+1)}$.

<u>Решение:</u>

$$W(j\omega)\frac{5j\omega+15}{(j\omega+1)(0{,}36(j\omega)^2+0{,}6j\omega+1}=\frac{5j\omega+15}{(j\omega+1)(1-0{,}36\omega^2+0{,}6j\omega)},$$

$\omega = 6<\dfrac{1}{T}=\dfrac{1}{0.4}=2{,}5,$ поэтому

$$A(6)=\frac{\sqrt{30^2+15^2}}{\sqrt{6^2+1^2}\cdot\sqrt{(1-0,36\cdot 6^2)^2+(0,6\cdot 6)^2}}=0,441$$

$$\phi(6)=arctg\,\frac{30}{15}-arctg\,\frac{6}{1}-arctg\,\frac{0,6\cdot 6}{1-0,36\cdot 6^2}=-0,006.$$

Тогда $y=0,5\cdot 0,441\cdot\sin(6t-0,006)=0,221\cdot\sin(6t-0,006).$

2.4. Построение асимптотических логарифмических частотных характеристик

Теория.

Асимптотические логарифмические амплитудные частотные характеристики. Логарифмические амплитудные частотные характеристики (ЛАЧХ) пропорционального, дифференцирующего и интегрирующего звеньев являются прямыми и их легко построить. Построение ЛАЧХ других элементарных звеньев требует трудоёмких вычислений. Поэтому на практике часто ограничиваются построением приближенных асимптотических ЛАЧХ.

При построении асимптотических ЛАЧХ апериодического звена в выражении $L(w)$ = 20lg$k$ – 20lg$\sqrt{(Tw)^2+1}$ при $w\le 1/T$ под корнем пренебрегают слагаемым $(Tw)^2$, меньшим единицы, а при $w>1/T$ – единицей. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(w)\cong\begin{cases}20\lg k & \text{при}\, w\ge 1/T,\\ 20\lg k-20\lg Tw & \text{при}\, w>1/T.\end{cases}$$

При построении асимптотической ЛАЧХ колебательного звена в выражении

$$L(w)=20\lg k=20\lg\sqrt{[1-(Tw)^2]^2+(2\varsigma Tw)^2}$$

при $w\le 1/T$ под корнем оставляют только единицу, а при $w>1/T$ – только наибольшее слагаемое $(Tw)^4$. Поэтому уравнение асимптотической ЛАЧХ имеет вид

$$L(w)\cong\begin{cases}20\lg k & \text{при}\, w\ge 1/T,\\ 20\lg k-40\lg Tw & \text{при}\, w>1/T.\end{cases}$$

Аналогично поступают при построении асимптотической ЛАЧХ форсирующих звеньев. Частоты, на которых асимптотические ЛАЧХ претерпевают излом, называются сопрягающими частотами.

Для построения ЛАЧХ и ЛФЧХ звена с произвольной дробно-рациональной передаточной функцией $W(s)$ нужно её числитель и знаменатель разложить на элементарные множители и представить $W(s)$ в виде произведения передаточных функций элементарных звеньев

$$W(s)=\prod_{\iota} W_{\iota}(s) \tag{4}$$

или в виде

$$W(s)=\frac{k}{s^{\nu}}W^{0}(s), \tag{5}$$

где $W^0(s)$ представляет собой отношение произведений элементарных множителей 1-го и 2-го порядка с единичным передаточным коэффициентом, т.е. множителей вила $Ts \pm 1$ и $as^2 \pm bs + 1(b^2 - 4a < 0)$. Из (4) имеем:

$$L(w)=20\lg|W(jw)|=20\sum_{i}\lg|W_i(jw)|, \tag{6}$$

$$\varphi(w)=\arg W(jw)=\sum_{i}\arg W_i(jw). \tag{7}$$

Из (6) следует, что для построения ЛАЧХ произвольного звена достаточно построить ЛАЧХ элементарных звеньев, на которые оно разлагается, а затем их геометрически сложить. Однако для построения асимптотических ЛАЧХ можно использовать несколько иное, более простое правило. Проиллюстрируем это сначала на частном примере.

Правило построения асимптотических ЛАЧХ.

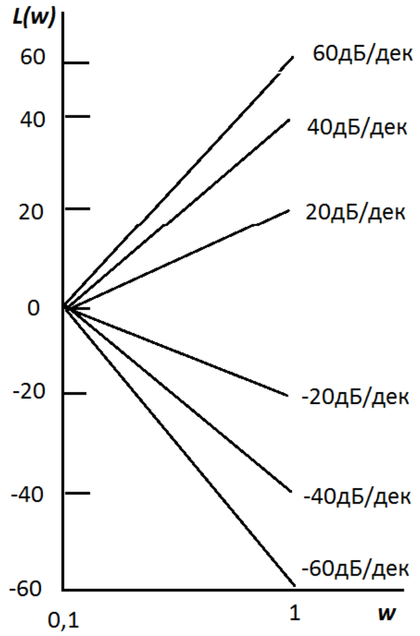
1) Пользуясь представлением (5), вычислить 20lg$k$ и сопрягающие частоты $w_{\iota}=1/T_{\iota}$, которые следует пронумеровать в порядке возрастания: $w_1 < w_2 < \ldots$.

2) На оси абсцисс отметить сопрягающие частоты, а на координатной плоскости – точку (1,20·lg$k$). Построить первую асимптоту – прямую под наклоном $-v20$ дБ/дек, проходящую через отмеченную точку на координатной плоскости. Первая асимптота заканчивается на первой сопрягающей частоте w_1.

3) Построить вторую асимптоту, которая начинается с конца первой асимптоты и проводится до второй сопрягающей частоты w_2. Его наклон изменяется на ± 20 дБ/дек или ± 40 дБ/дек в зависимости от того, обусловливается ли w_1 элементарным множителем первого или второго порядка соответственно. Принимается положительный знак, если указанный множитель находится в числителе, и отрицательный знак, если этот множитель находится в знаменателе.

4) Построить остальные асимптоты, которые строятся аналогично второй асимптоте: i-я асимптота начинается с конца предыдущей $(i-1)$-й асимптоты и проводится до сопрягающей частоты w_i. Её наклон определяется сопрягающей частотой w_{i-1}.

Последняя асимптота представляет собой прямую, которая начинается в конце асимптоты, соответствующей последней сопрягающей частоте, и уходит в бесконечность.



Пример 17.

Построить асимптотические ЛАЧХ звеньев со следующими передаточными функциями:

а) $W(s) = \dfrac{250s + 1000}{(s+1)\cdot(0{,}1s^2 + s + 10)}$

<u>Решение:</u>

Преобразуем передаточную функцию к виду:

$$W(s) = \frac{1000\cdot(\frac{1}{4}s+1)}{s^v \cdot 10\cdot(s+1)\cdot(0{,}01s^2+0{,}1s+1)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{100\cdot(\frac{1}{4}s+1)}{s^0\cdot(s+1)\cdot(0{,}01s^2+0{,}1s+1)}, \text{ где } v=0,\ k=100.$$

Вычислим $20\lg k$ и сопрягающие частоты:

$$20\lg k = 20\lg 100 = 20\cdot 2 = 40,$$

$$w_1 = 1; w_2 = \frac{1}{1/4} = 4; w_3 = \frac{1}{0{,}1} = 10,$$

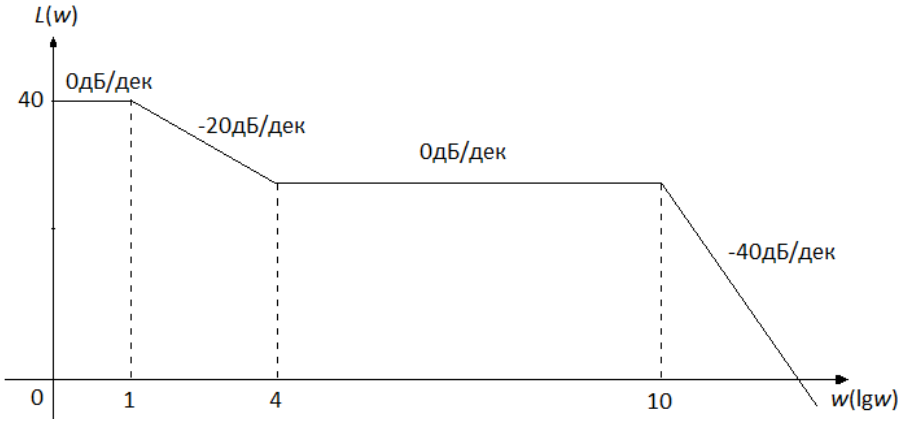
$$w_1 < w_2 < w_3.$$

Проводим через точку с координатами (1;40) первую асимптоту под наклоном $-v\cdot 20$ дБ/дек = 0дБ/дек (т.е. параллельно оси абсцисс) до первой сопрягающей частоты $w_1 = 1$.

Т.к. первая сопрягающая частота w_1 обусловлена множителями 1-го порядка (s+1), расположенным в знаменателе, наклон второй асимптоты изменяется на -20 дБ/дек. Поэтому вторую асимптоту проводим от конца первой асимптоты до сопрягающей частоты $w_2 = 4$ под наклоном -20 дБ/дек.

Сопрягающая частота w_2 обусловлена элементарным множителем $(1/4s+1)$, расположенным в числителе. Поэтому наклон третьей асимптоты отличается от наклона второй на 20дБ/дек и составляет 0дБ/дек $(-20\text{дБ/дек}+20\text{дБ/дек}=0\text{дБ/дек})$. Третью асимптоту проводим от конца второй асимптоты до сопрягающей частоты $w_3 = 10$.

Сопрягающая частота w_3 обусловлена элементарным множителем 2-го порядка $(0{,}01s^2+0{,}1s+1)$, расположенным в знаменателе. Поэтому наклон четвёртой асимптоты отличается от наклона третьей асимптоты на -40дБ/дек. Последнюю асимптоту проводим от конца третьей асимптоты до бесконечности.



б) $W(s) = \dfrac{2s+1}{s\cdot(0{,}1s^2+1{,}1s+1)\cdot(s+1)}$.

<u>Решение:</u>

$$W(s) = \frac{2s+1}{s\cdot 10\cdot(0{,}01s^2+0{,}11s+1)\cdot(s+1)} =$$

$$= \frac{10^{-1}\cdot(2s+1)}{s\cdot(s+1)\cdot(0{,}01s^2+0{,}11s+1)},$$

$k = 10^{-1}$, $v = 1$,

$$w_1 = \frac{1}{2}; w_2 = 1; w_3 = \frac{1}{0{,}1} = 10,$$

$w_1 < w_2 < w_3$.

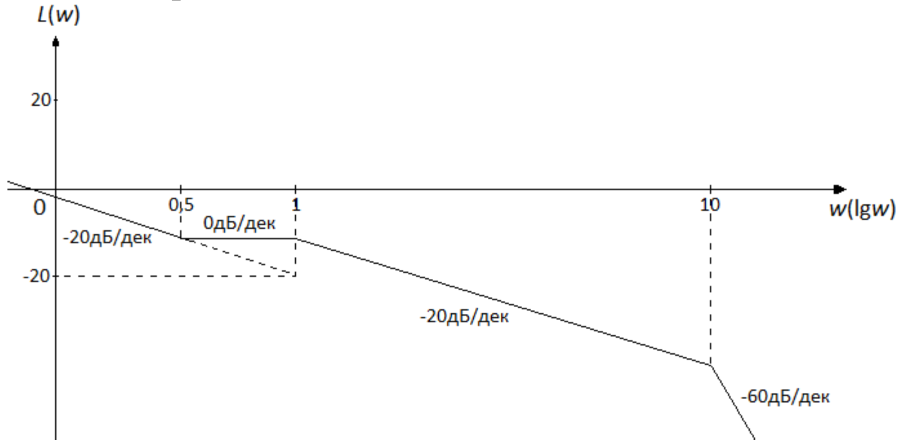
Проводим через точку (1;-20) первую асимптоту под наклоном $-v\cdot 20$ дБ/дек $= -20$ дБ/дек до первой сопрягающей частоты .

Первая сопрягающая частота $w_1 = 1/2$ обусловлена множителем 1-го порядка (2*s*+1), расположенным в числителе, тогда наклон второй асимптоты изменяется на +20дБ/дек и будет равен -20дБ/дек + 20дБ/дек = 0дБ/дек.

Вторую асимптоту проводим от конца $w_1 = 1/2$ до $w_2 = 1$ под наклоном 0дБ/дек.

Сопрягающая частота w_2=1 обусловлена элементарным множителем 1-го порядка (s+1), расположенным в знаменателе, =>, наклон третьей асимптоты изменяется на -20дБ/дек. Третья асимптота проводится от конца второй асимптоты до сопрягающей частоты w_3=10.

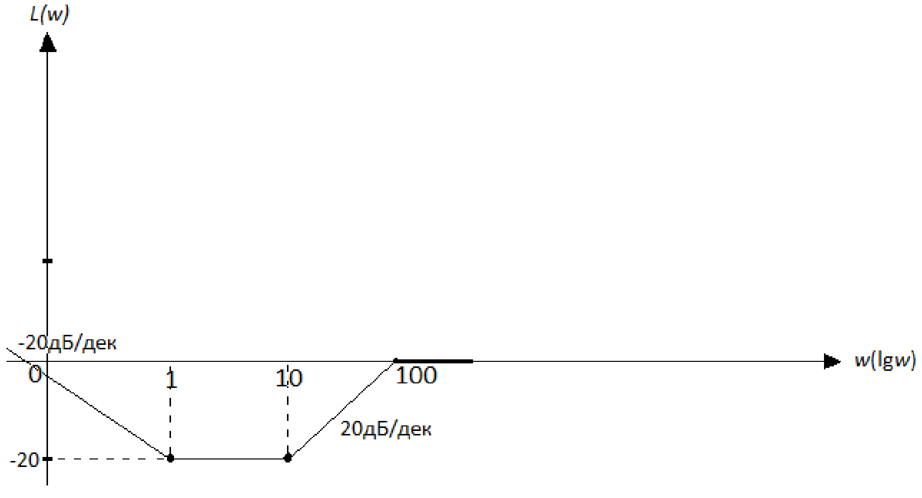
Сопрягающая частота w_3=10 обусловлена элементарным множителем 2-го порядка ($0{,}01s^2+0{,}11s+1$), расположенным в знаменателе, =>, наклон четвёртой асимптоты изменяется на -40дБ/дек. Последнюю асимптоту проводим от конца третьей асимптоты до ∞.



Пример 18.

Записать передаточные функции минимально-фазовых и нейтральных звеньев, если их асимптотические ЛАЧХ имеют следующий вид:

а)



Решение:

Из графика:

сопрягающие частоты имеют вид:

$$w_1=1;\ w_2=10;\ w_3=100.$$

Первая асимптота проходит через точку (1;-20) под наклоном -20дБ/дек. Следовательно,

$$20\lg k=-20;\ \lg k=-1;\ \underline{k=10^{-1}=0{,}1}$$

$$-\nu\cdot 20\,\text{дБ/дек}=-20\text{дБ/дек};$$

$$\underline{\nu=1.}$$

Вторая асимптота проходит от $w_1=1$ до $w_2=10$ под наклоном 0дБ/дек. Следовательно,

$$(-20\text{дБ/дек} + x\text{дБ/дек}) = 0\text{дБ/дек},$$

$$x\text{дБ/дек} = 20\text{дБ/дек},$$

т.е. множитель 1-го порядка (т.к. 20дБ/дек) и в числителе (т.к. +20дБ/дек). =>, первый множитель в числителе имеет вид (s+1).

Третья асимптота проходит от w_2=10 до w_3=100 под наклоном 20дб/дек. =>, наклон изменяется на 0дБ/дек + 20дБ/дек, т.е. на 20дБ/дек, =>, второй множитель 1-го порядка в числителе имеет вид:

$$(0{,}1s+1).$$

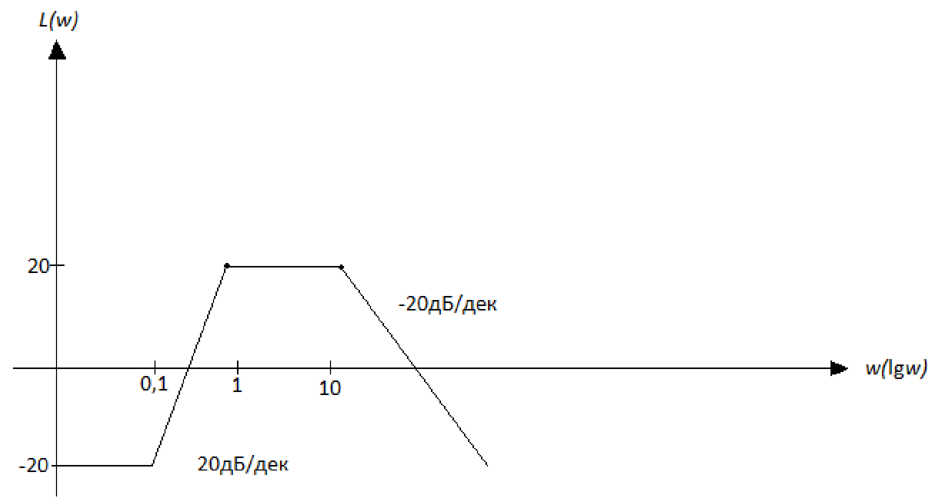
Последняя асимптота проходит от w_3=100 до ∞ под наклоном 0дБ/дек. =>, изменился (20дБ/дек+хдБ/дек=0дБ/дек), т.е. на -20дБ/дек =>, множитель в знаменателе 1-го порядка имеет вид:

$$(0{,}01s+1).$$

Исходная передаточная функции имеет вид:

$$W(s)=\frac{0{,}1\cdot(s+1)\cdot(0{,}1s+1)}{s\cdot(0{,}01s+1)},$$

б)



Решение:

$$w_1=0{,}1;\ w_2=1\ w_3=10,$$

$$(1;-20) \Rightarrow 20\lg k=-20 \Leftrightarrow \lg k=-1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{10}=0{,}1.$$

1-я асимптота: $-v\cdot 20$ дБ/дек = 0дБ/дек => v=0.

2-я асимптота: от $w_1=0{,}1$ до $w_2=1$ под наклоном 20дБ/дек => множитель 1-го порядка в числителе имеет вид: (10s+1).

3-я асимптота: от $w_2=1$ до $w_3=10$ с наклоном 0дБ/дек => наклон изменился на -20дБ/дек => множитель 1-го порядка в знаменателе имеет вид: (s+1).

4-я асимптота: от $w_3=10$ до ∞ под наклоном -20дБ/дек => множитель 1-го порядка в знаменателе имеет вид: (0,1s+1).

Исходная переходная функция имеет вид:

$$W(s)=\frac{0{,}1\cdot(10s+1)}{(s+1)\cdot(0{,}1s+1)}.$$

Пример 19.

Построить асимптотические ЛАЧХ звеньев с передаточной функцией

$$W(s)=\frac{50s+5}{(s+0{,}5)\cdot(0{,}04s^2+0{,}2s+1)}.$$

Решение:

$$W(s)=\frac{5\cdot(10s+1)}{\frac{1}{2}\cdot(2s+1)\cdot(0{,}04s^2+0{,}2s+1)}=\frac{10\cdot(10s+1)}{(2s+1)\cdot(0{,}04s^2+0{,}2s+1)};$$

$$v=0;\ k=10$$

$$w_1=\frac{1}{10};\ w_2=\frac{1}{2};\ w_3=\frac{1}{0{,}2}=5,$$

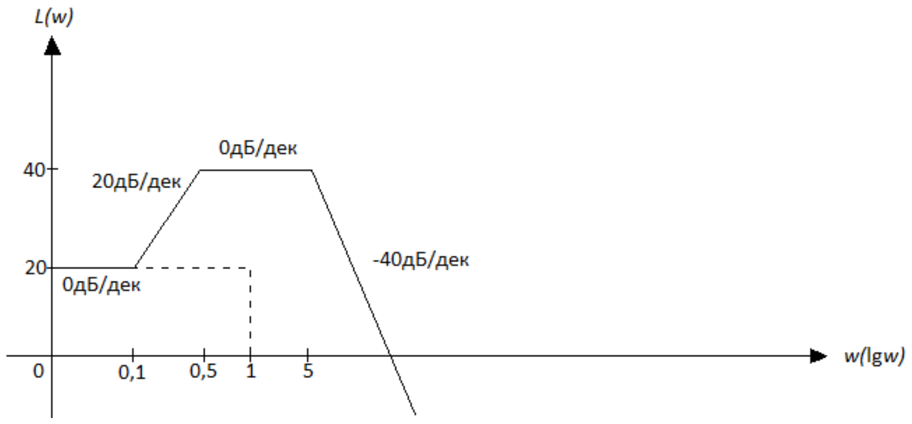
$$20\lg k=20\lg 10=20\cdot 1=20.$$

Первая асимптота проходит через точку (1;20) с наклоном $-v\cdot 20$ дБ/дек=0дБ/дек до $w_1=\frac{1}{10}=0{,}1$.

Вторая асимптота от $w_1=0$ до $w_2=1/2=0{,}5$ с наклоном 20дБ/дек (т.к. $w_1=0{,}1$ – множитель (10s+1) в числителе 1-го порядка)

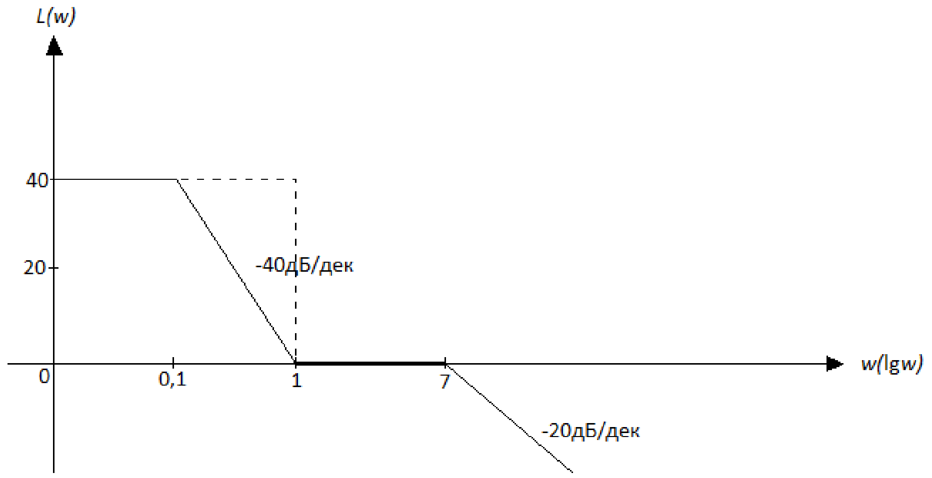
Третья асимптота от $w_2=0{,}5$ до $w_3=5$ с наклоном 20дБ/дек – 20дБ/дек = 0дБ/дек (т.к. $-w_2=0{,}5$ множитель (2s+1) в знаменателе 1-го порядка).

Последняя асимптота от $w_3=5$ до ∞ с наклоном $0дБ/дек-40дБ/дек=-40дБ/дек$ (т.к. $w_3=5$ – множитель (0,04s^2+0,23s+1) в знаменателе 2-го порядка).



Пример 20.

Записать передаточную функцию минимально-фазовых и нейтральных звеньев, если её асимптотическая ЛАЧХ имеет вид:



<u>Решение:</u>

<u>1-я асимптота</u>: (1;40) => 20lg$k$=40 ⇔ k=100,

$-\nu \cdot 20$ дБ/дек=0дБ/дек => ν=0.

<u>2-я асимптота</u>: от $w_1 = 0{,}1$ до $w_2 = 1$ под наклоном -40дБ/дек => множитель 2-го порядка в знаменателе имеет вид:

$$(100s^2 + 2 \cdot 10\xi s + 1).$$

<u>3-я асимптота</u>: от $w_2 = 1$ до $w_2 = 7$ под наклоном 0дБ/дек => наклон изменился на 40дБ/дек => множитель 2-го порядка в числителе имеет вид: $(s^2 + 2\xi s + 1)$.

<u>4-я асимптота</u>: от $w_3 = 7$ до ∞ под наклоном –20дБ/дек => наклон изменился на $0 - 20$ дБ/дек $= -20$ дБ/дек => множитель 1-го порядка в знаменателе имеет вид: $(\frac{1}{7}s + 1)$.

Исходная передаточная функция имеет вид:

$$W(s) = \frac{100 \cdot (s^2 + 2\xi s + 1)}{(100s^2 + 20\xi + 1) \cdot (\frac{1}{7}s + 1)}.$$

2.5. Структурные схемы

Теория.

Структурной схемой системы управления называют графическое представление её математической модели в виде соединений звеньев, изображаемых в виде прямоугольников или круга (для сумматора), с указанием входных и выходных переменных. Обычно внутри прямоугольника указывается условное обозначение оператора изображаемого им звена, а сам оператор в виде передаточной функции или дифференциального уравнения задается вне структурной схемы.

Преобразование структурных схем.

Последовательное соединение. Так называется соединение, при котором выход предыдущего звена является входом последующего (рис. 1 *а*). При последовательном соединении передаточные функции отдельных звеньев перемножаются и при преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(s) = W_1(s)W_2(s)\ldots\ \ldots W_n(s)$ (рис. 1 *б*).

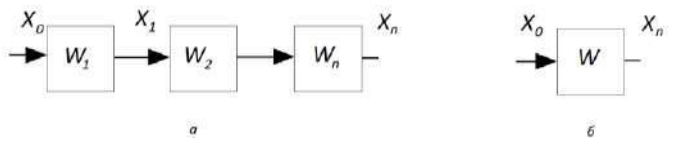


Рис. 1

Параллельное соединение. Так называется соединение, при котором на вход всех звеньев подается одно и тоже воздействие, а их выходные переменные складываются (рис. 2 *а*). При параллельном

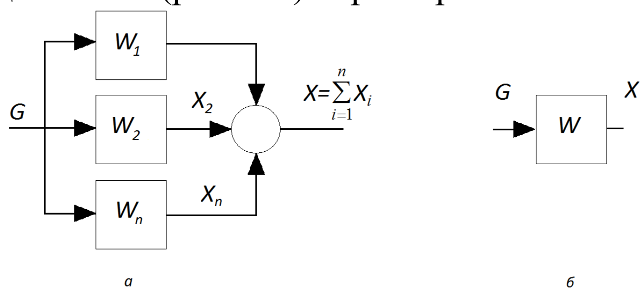


Рис. 2

соединении звеньев передаточные функции складываются и при преобразовании их можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(s) = \sum_{i=1}^{n} W_i(s)$ (рис. 2 *б*). Если выход какого-либо звена поступает на сумматор с отрицательным знаком, то передаточная функция этого звена складывается с отрицательным знаком, т.е. вычитается.

Обратное соединение или звено, охваченное обратной связью. Так называется соединение двух звеньев, при котором выход звена прямой цепи подается на вход звена обратной связи, выход которого складывается(или вычитается) с выходом первого звена (рис. 3 *а*). Если сигнал обратной

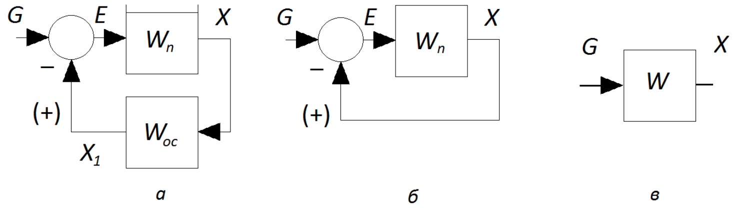


Рис.3

связи (выход звена обратной связи) вычитается (т.е. складывается с отрицательным звеном), то обратная связь называется отрицательной, в противном случае - положительный. Когда передаточная функция звена обратной связи равна единице ($W_{oc}(s)=1$), обратное соединение изображается так, как показано на рис. 3 *б*.

При размыкании обратной связи перед сумматором получаем последовательное соединение, передаточная функция которого равна $W_p(s)=W_n(s)W_{oc}(s)$. Эта передаточная функция называется *передаточной функцией разомкнутой цепи*.

Передаточную функцию $W_k(s)=W_n(s)W_{oc}(s)W_{\Sigma}(s)$, в которой учитывается передаточная функция сумматора по входу обратной связи будем называть передаточной функцией контура. Здесь $W_{\Sigma}(s)-$передаточная функция сумматора по входу обратной связи, она равна -1 (минус единице) при отрицательной обратной связи (перед соответствующим входом стоит знак минус) и 1 (плюс единице) при положительной обратной связи.

Передаточная функция при обратном соединении равна $W(s)=W_n(s)/(1-W_k(s))$ и при преобразовании обратное соединение заменяется одним звеном с указанной передаточной функцией (рис. 3 *в*).

Перенос сумматора. При переносе сумматора по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции знака, через которое переносится в сумматор (рис. 4 *а*).

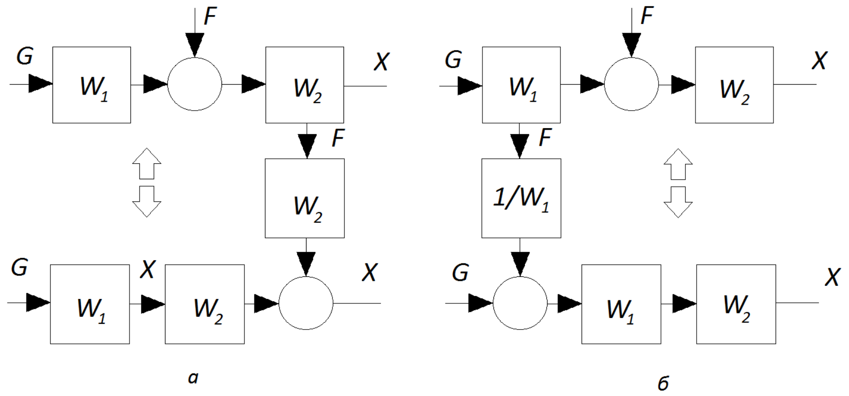


Рис. 4

При переносе сумматора против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис.4 *б*).

При переносе сумматора участок цепи, через который он переносится, становится неэквивалентным. Поэтому при преобразовании структурных схем нельзя переносить сумматор через точку съема сигнала.

Перенос узла. При переносе узла по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 5 *а*).

При переносе узла против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 5 *б*).

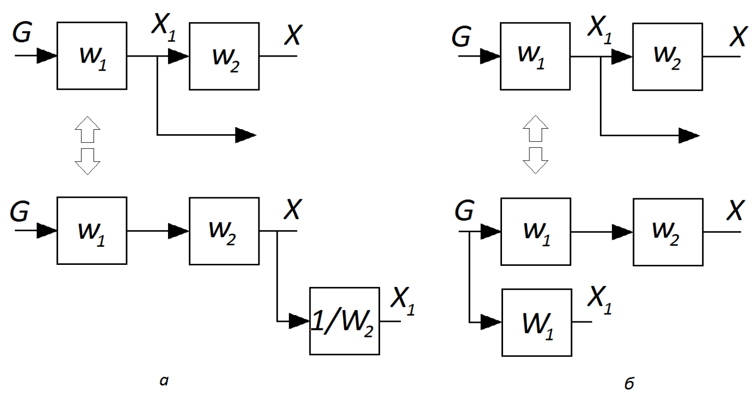


Рис. 5

Перестановка сумматоров. Сумматоры можно переставлять местами и объединять. Перестановка двух сумматоров соответствует переносу одного сумматора через другой и подчиняется правилу переноса сумматора черев звено.

Сумматор 1 (рис.6) переносится через сумматор 2 по направлению распространению сигнала, а сумматор 2 через сумматор 1 против направления распространения сигнала.

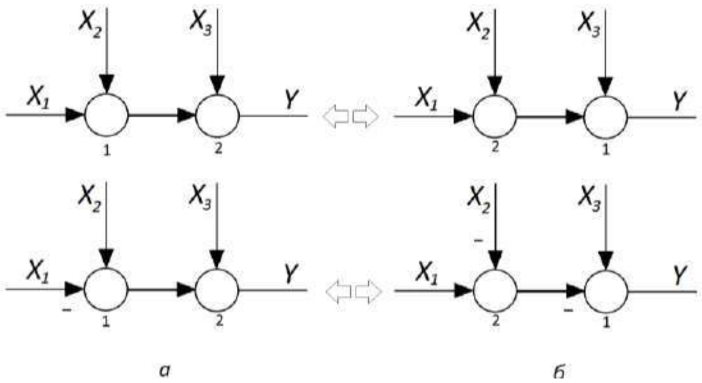


Рис. 6

Но так как передаточная функция сумматора по каждому входу равна 1 или -1, то и передаточная функция звена, которое добавляется при переносе сумматора, независимо от направления переноса равна 1 или -1. Поэтому если сумматор переносится через другой сумматор вдоль входа со знаком плюс, добавляется звено с передаточной функцией 1, т.е. в действительности ничего не добавляется (рис. 6 *а*); если сумматор переносится вдоль входа со знаком минус, то добавляется звено с передаточной функцией -1, т.е. знак по входу куда должно быть добавлено звено, меняется на обратный (рис.6 *б*).

Перестановка узлов. Узлы можно переставлять местами и объединять.

Вычисления передаточной функции одноконтурной системы. Замкнутая система называется одноконтурной, если при её размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается система без параллельных и обратных соединений (рис.7). Цепь по ходу сигнала от точки приложения входной переменной до точки съема выходной переменной называется *прямой цепью*. Передаточная функция прямой цепи W_n равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в эту цепь включая и сумматоры.

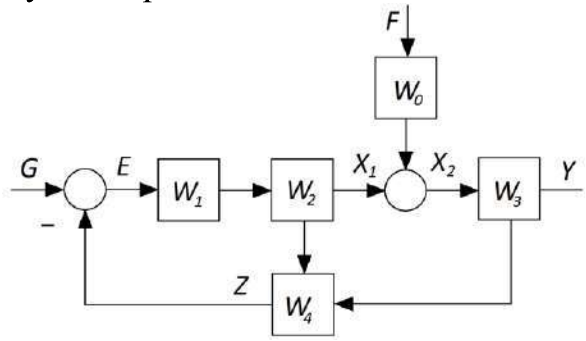


Рис. 7

Передаточная функция контура W_k равна произведению передаточный функций всех звеньев, входящих в замкнутый контур, включая сумматоры. Передаточная функция сумматора по входу со знаком плюс равна плюс единице, а по входу со знаком минус – минус единице.

Правило вычисления передаточной функции замкнутой одноконтурной системы: передаточная функция одноконтурной системы относительно внешнего воздействия (входа) u и выхода x равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу минус передаточная функция контура: $W_{xu} = W_n / (1 - W_k)$.

Вычисление передаточной функции многоконтурной системы. Замкнутая система называется многоконтурной, если при ее размыкании в какой-либо точке замкнутого контура получается система, содержащая параллельное и/или обратное соединение.

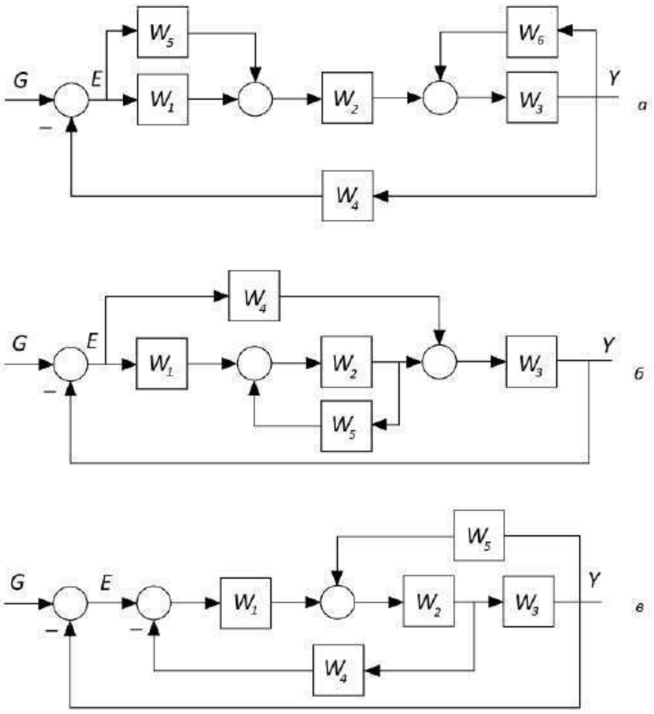


Рис. 8

Многоконтурная система не имеет перекрестных связей, если любые два контура, образованные параллельными или обратными соединениями, не имеют общих участков (рис. 8 *а*) или, если какие-либо два контура имеют общий участок, то один из них вложен внутрь другого (рис. 8 *б*).

Многоконтурная система имеет *перекрестные связи*, если она содержит два контура, которые имеют общий участок, и при этом ни один из них не вложен внутрь другого (рис. 8 *в*).

Порядок вычисления передаточной функции многоконтурной системы следующий:

1) путем переноса узлов и сумматоров нужно освободиться от перекрестных связей;

2) используя правило преобразования параллельных и обратных соединений, нужно преобразовать многоконтурную систему в одноконтурную;

3) по правилу вычисления передаточной функции одноконтурной системы определить искомую передаточную функцию.

При преобразовании структурной системы нужно позаботиться о том, чтобы не исчезли точки съема переменных, относительно которых ищутся передаточные функции, или чтобы эти точки не оказались на неэквивалентном участке (т.е. не следует переносить сумматор через эти точки).

Пример 21.

Определить передаточные функции системы (рис. 7) W_{yg} относительно входа g и выхода y и W_{ef} относительно входа f и выхода e.

$W_{yg} = \dfrac{W_П}{1 - W_k}$, где $W_П$ – передаточная функция прямой цепи, W_k - передаточная функция контура.

Решение:

Прямая цепь системы (рис.8) относительно входа g и выхода y представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями W_1, W_2 и W_3. Входы сумматоров в этой цепи имеют знак плюс и их передаточные функции равны 1. Поэтому передаточная функция прямой цепи $W_П = W_1 W_2 W_3$.

Прямая цепь относительно входа f и выхода e представляет последовательное соединение двух сумматоров и звеньев с передаточными функциями W_0, W_3 и W_4. Вход первого сумматора имеет знак «+», вход второго сумматора – знак «–» и их передаточные функции равны 1 и –1 соответственно. Поэтому в этом случае функция прямой цепи равна $W_П = -W_0 W_3 W_4$.

Искомые передаточные функции имеют вид:

$$W_{yg} = \frac{W_1 \cdot W_2 \cdot W_3}{1 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}, \quad W_{ef} = \frac{-W_0 \cdot W_3 \cdot W_4}{1 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}.$$

Пример 22.

Определить передаточные функции W_{yf} системы управления, представленной на рисунке 9:

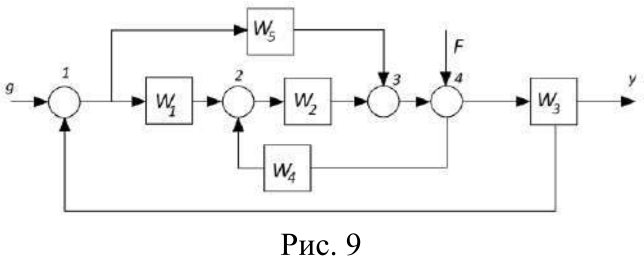


Рис. 9

Решение:

Сначала освободимся от перекрёстных связей. Для этого перенесем сумматор 3 против хода сигнала через звена W_2 и сумматор 2 (рис. 10). То же самое проделаем с сумматором 4 (рис. 11).

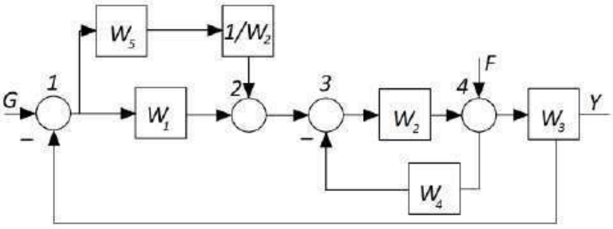


Рис. 10

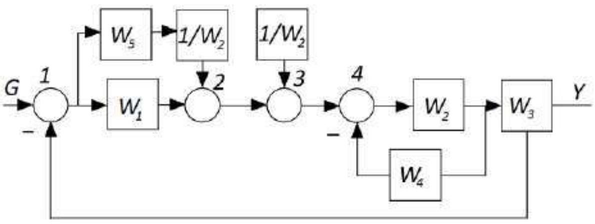


Рис.11

Далее, заменив параллельное соединение звеном

$W^{'}=W_1+W_5\cdot\dfrac{1}{W_2}=\dfrac{W_1\cdot W_2+W_5}{W_2}$ и обратное соединение звеном

$W^{''}=\dfrac{W_2}{1+W_2\cdot W_4}$, получим одноконтурную систему (рис. 12).

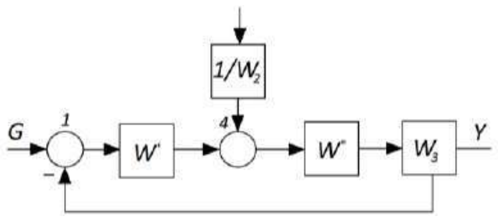


Рис. 12

Из последней схемы по правилу вычисления передаточной функции однократной системы находим:

$$W_{yg}=\frac{W^{'}\cdot W^{''}\cdot W_3}{1+W^{'}\cdot W^{''}\cdot W_3},\quad W_{yf}=\frac{W^{''}\cdot W_3}{(1+W^{'}\cdot W^{''}\cdot W_3)\cdot W_2}$$

При вычислении передаточных функций многократных систем с перекрестными связями во многих случаях целесообразно, а иногда и необходимо сначала предварительно упростить схему, используя правила преобразования двойных и обратных соединений, затем освободиться от перекрестных связей.

Пример 23.

Для системы на рисунке 13 определить следующие передаточные функции (ПФ):

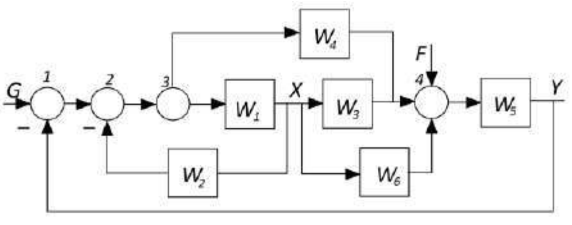


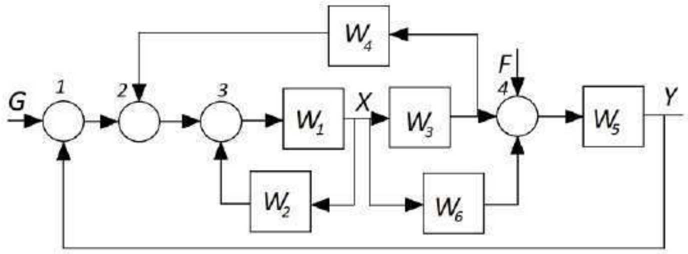
Рис. 13

а) W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y.

<u>Решение.</u>

Сначала освободимся от перекрестных связей. Для этого перенесем сумматор 3 против хода сигнала через сумматор 2.

Получим:

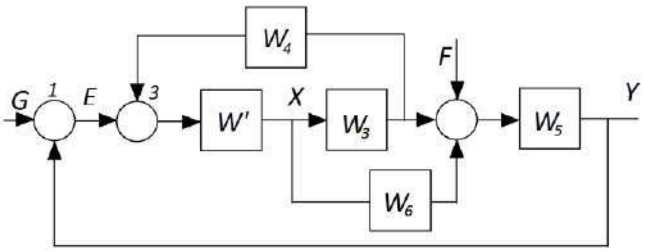


Заменим обратное соединение звеном:

$W(s)=\dfrac{W_{\Pi}(s)}{1-W_k(s)}$, где $W_{\Pi}(s)$ – ПФ прямой цепи, $W_k(s)$ – ПФ контура.

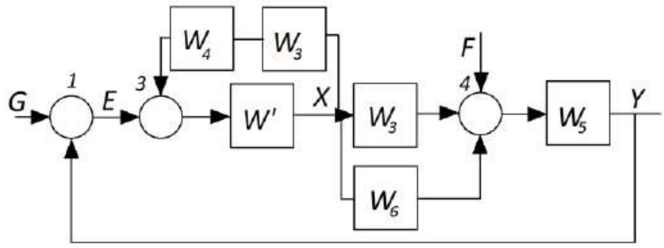
$W^{'}=\dfrac{W_1}{1+W_1\cdot W_2}$ (W_1 – ПФ прямой цепи, $1+W_1\cdot W_2$ – ПФ контура; знак «+», т.к. отрицательная обратная связь)

Получим:



Перенесем узел против хода сигнала через звено W_3 и узел до звена W_3.

Получим:



Заменим обратное соединение звеном

$W^{''}=\dfrac{W^{'}}{1-W_4\cdot W_3\cdot W^{'}}$ ($W^{'}$ – ПФ прямой цепи, $1-W_4\cdot W_3\cdot W^{'}$ – ПФ контура; знак «–». т.к. положительная обратная связь)

Преобразуем $W^{''}$:

$$W'' = \frac{W'}{1 - W_4 \cdot W_3 \cdot W'} = \frac{W_1}{(1 + W_1 \cdot W_2) \cdot \left(1 - W_4 \cdot W_3 \cdot \dfrac{W_1}{1 + W_1 \cdot W_2}\right)} =$$

$$= \frac{W_1}{(1 + W_1 \cdot W_2) \cdot \left(\dfrac{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_4 \cdot W_3}{1 + W_1 \cdot W_2}\right)} = \frac{W_1}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}$$

Заменим параллельное соединение звеном $W''' = W_5 + W_6$.

Имеем:

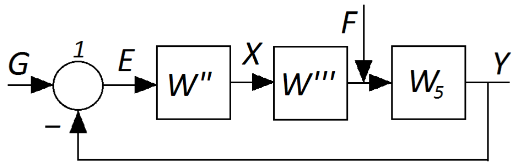


Рис. 14

Получили замкнутую одноконтурную систему, передаточная функция W_{yg} относительно входа g и выхода y вычисляется по формуле:

$W_{yg} = \dfrac{W_П}{1 - W_k}$, где $W_П$ – ПФ прямой цепи, W_k – ПФ контура,

$$W_П = W'' \cdot W''' \cdot W_5 = W''' \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5 = \frac{W_1 \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}.$$

$W_k = -W'' \cdot W''' \cdot W_5$ (“–”, т.к. отрицательная обратная связь)

Получим:

$$W_{yg} = \frac{W_1 \cdot (W_3 \cdot W_6) \cdot W_5}{(1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4) \cdot \left(1 + \dfrac{W_1 \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}\right)} =$$

$$= \frac{W_1 \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4 + W_1 \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5}$$

или

$$W_{yg} = \frac{W'' \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5}{1 + W'' \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5}.$$

б) W_{xg} – ПФ относительно входа g и выхода x.

Решение:

По одноконтурной системе на рисунке 14 имеем:

$$W_{xg} = \frac{W_П}{1 - W_k},$$

$$W_k = -W'' \cdot W''' \cdot W_5 = -W'' \cdot (W_3 + W_6) \cdot W_5,$$

$$W_П = W''.$$

Тогда:

$$W_{xg} = \frac{W^{"}}{1+W^{"}\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5} =$$

$$= \frac{W_1}{(1+W_1\cdot W_2 - W_1\cdot W_3 W_4)\left(1+\frac{W_1\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5}{1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4}\right)} =$$

$$= \frac{W_1}{1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4+W_1\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5}.$$

в) W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e.

<u>Решение:</u>

по рисунку 6 имеем:

$$W_{eg} = \frac{W_П}{1-W_k},$$

$$W_k = -W^{"}\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5,$$

$W_П = +1$ (от g до f только вход на сумматор со знаком «+»).

Тогда

$$W_{eg} = \frac{1}{1+W^{"}(W_3+W_6)W_5} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4+W_1\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5}{1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4}} =$$

$$= \frac{1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4}{1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4+W_1\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5}.$$

г) W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y.

<u>Решение:</u>

$$W_{yg} = \frac{W_П}{1-W_k},$$

$$W_П = W_5,$$

$$W_k = -W^{"}\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5,$$

$$W_{yg} = \frac{W_5}{1+W^{"}\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5} =$$

$$= \frac{W_5\cdot(1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4)}{1+W_1\cdot W_2-W_1\cdot W_3\cdot W_4+W_1\cdot(W_3+W_6)\cdot W_5}.$$

д) W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x.

Решение:

$$W_{xf} = \frac{W_{П}}{1 - W_k},$$

$$W_{П} = -W_5 \cdot W^{"} = \frac{-W_5 \cdot W_1}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4},$$

$$W_k = -W^{"} \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5,$$

$$W_{xf} = \frac{-W_5 \cdot W^{"}}{1 + W^{"} \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5} =$$

$$= \frac{-W_5 \cdot W_1}{\left(1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4\right) \cdot \left(1 + \frac{W_1 \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}\right)} =$$

$$= \frac{-W_5 \cdot W_1}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4 + W_1 \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5}.$$

е) W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e.

Решение:

$$W_{eg} = \frac{W_{П}}{1 - W_k},$$

$W_{П} = -W_5$ (по контуру от f к e),

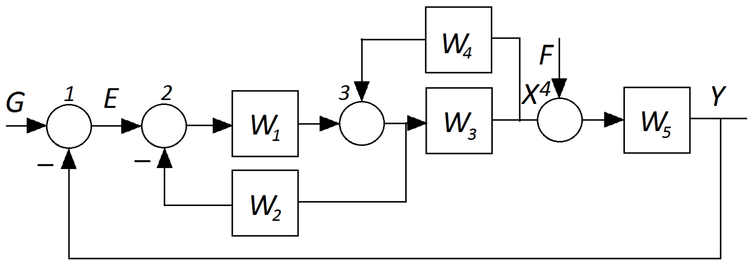
$$W_k = -W^{"} \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5,$$

$$W_{ef} = \frac{-W_5}{1 + W^{"} \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5} = -\frac{W_5}{1 + \frac{W_1 \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4}} =$$

$$= -\frac{(1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4) \cdot W_5}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_1 \cdot W_3 \cdot W_4 + W_1 \cdot \left(W_3 + W_6\right) \cdot W_5}.$$

Пример 24

Для системы определить следующие передаточные функции (ПФ):

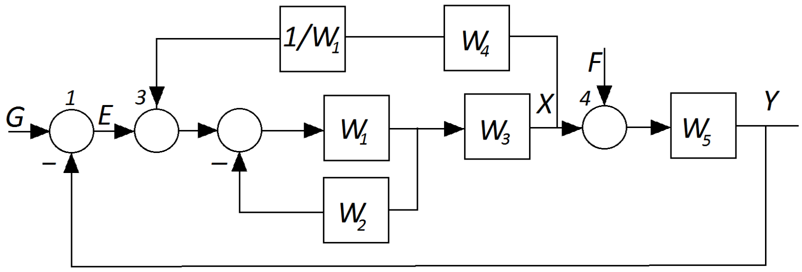


а) W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y.

Решение:

Сначала освободимся от перекрестных связей. Перенесем регулятор 3 против хода сигнала через звено W_1 и сумматор 2.

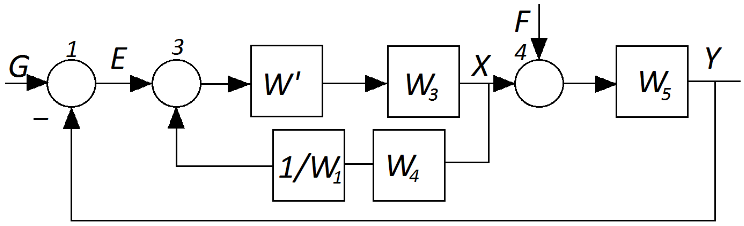
Получим:



Заменим обратное соединение звеном

$$W^{'} = \frac{W_{П}}{1 - W_k} = \frac{W_1}{1 + W_1 \cdot W_2}.$$

Получим:

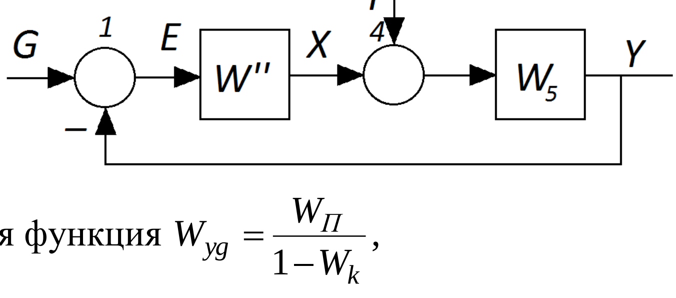


Заменим обратное соединение звеном

$$W^{''} = \frac{W^{'} \cdot W_3}{1 - \frac{1}{W_1} \cdot W_4 \cdot W^{'} \cdot W_3} = \frac{W_1 \cdot W_3}{(1 + W_1 \cdot W_2) \cdot \left(1 - \frac{\cancel{\frac{1}{W_1}} \cdot W_4 \cdot W_1 \cdot W_3}{1 + W_1 \cdot W_2}\right)} =$$

$$= \frac{W_1 \cdot W_3}{1 + W_1 \cdot W_2 - W_3 \cdot W_4}.$$

Получим замкнутую одноконтурную систему:



Передаточная функция $W_{yg} = \frac{W_{П}}{1 - W_k}$,

$W_{П} = W^{''} \cdot W_5$, $W_k = -W^{''} \cdot W_5$, $W_{yg} = \frac{-W^{''} \cdot W_5}{1 + -W^{''} \cdot W_5}$.

б) W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода x.

Решение:

$$W_{xg} = \frac{W_П}{1 - W_k} = \frac{W''}{1 + W'' \cdot W_5}.$$

в) W_{eg} – ПФ относительно входа g и выхода e.

Решение:

$$W_{eg} = \frac{W_П}{1 - W_k} = \frac{1}{1 + W'' \cdot W_5}.$$

г) W_{yg} – ПФ относительно входа g и выхода y.

Решение:

$$W_{yg} = \frac{W_П}{1 - W_k} = \frac{W_5}{1 + W'' \cdot W_5}.$$

д) W_{xf} – ПФ относительно входа f и выхода x.

Решение:

$$W_{xf} = \frac{W_П}{1 - W_k} = \frac{-W'' \cdot W_5}{1 + W'' \cdot W_5}.$$

е) W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e.

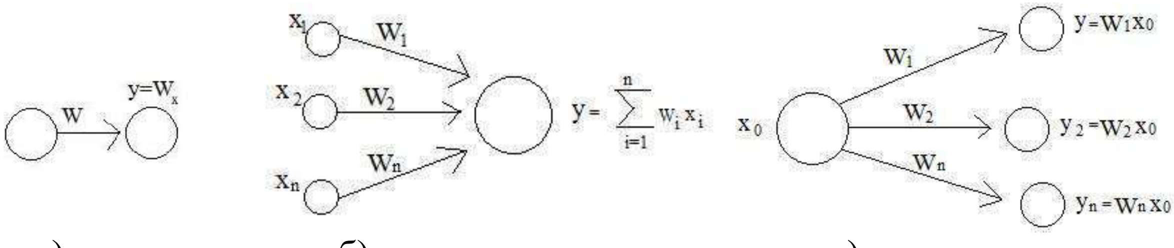
Решение:

$$W_{ef} = \frac{W_П}{1 - W_k} = \frac{-W_5}{1 + W'' \cdot W_5}.$$

2.6. Граф системы уравнения

Граф системы управления состоит из дуг и вершин. Дуга соответствует звену и на схеме изображается отрезком линии со стрелкой, указывающей направление распространения сигнала. Дуга начинается и кончается в вершине.

Вершина на схеме изображается кружком и определяет переменную. Если к вершине подходит одна дуга то она определяет выходную величину дуги (рис. 15 а) если же в вершину входят несколько дуг, то она соответствует сумме выходных переменных этих дуг (рис. 15 б).



а) б) в)

Рис. 15. Граф системы

Начальная вершина дуги определяет ее входную переменную (рис. 15 в). Вершина графа, имеющая только выходящие из нее дуги, определяет внешнее воздействие и называется входной вершиной графа.

Последовательность дуг $W_1, W_2, \dots W_n$ (не обязательно разных), для которых конечная вершина x_i дуги W_i является начальной вершиной дуги $W_{i+1} (i = 1,2,\dots,n-1)$, называется ориентированным маршрутом или ормаршрутом. Ормаршрут, в котором все дуги разные, называется путем от начальной вершины x_0 к конечной вершине x_n, если он не замкнут, и контуром, если он замкнут (x_0 и x_n совпадают).

Путь и контур называют простыми, если все вершины $x_0, x_1 \dots x_n$ различны. Простой путь также называют прямым путем.

Два контура называются несоприкасающимися, если они не имеют общих вершин. Три, четыре, и т.д контура называются несоприкасающимися, если любая пара из этих контуров является несоприкасающейся.

Граф системы управления можно построить по структурной схеме. Для этого нужно произвести следующее (рис. 16):

1) сумматор с выходной переменной x заменить вершиной *x*;

2) звено с передаточной функцией *W* заменить дугой *W*; если выходная переменная подается на сумматор по отрицательному входу, то указанное звено заменить дугой –*W*;

3) каждой переменной, в том числе переменной, соответствующей

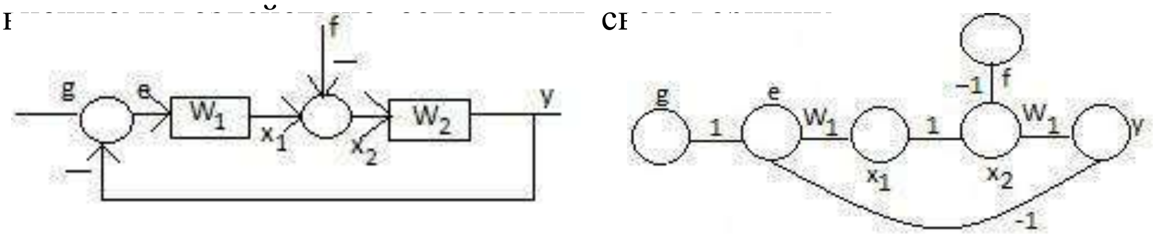


Рис. 16 структурная схема системы управления

Формула Мейсона

Определителем графа (подграфа) называется передаточная функция Δ, равная:

$$\Delta = 1 - \sum_j W_{0j} + \sum_{j,k} W_{0j} W_{0k} - \sum_{j,k,l} W_{0j} W_{0k} W_{0l} \dots, \qquad (1)$$

здесь в первой сумме W_{0j} – передаточная функция *j-го* простого контура, равная произведению передаточных функций дуг, входящих в этот контур, и суммирование производится по всем простым контурам; во второй сумме $W_{0j}W_{0k}$ – произведение передаточных функций *j-го* и *k-го* простых контуров и суммирование производится по всем несоприкасающемся парам контуров; в третьей сумме $W_{0j}W_{0k}W_{0l}$ – произведение передаточных функций *j-го, k-го, l-го* простых контуров и суммирование производится по всем несоприкасающимся тройкам контуров и т.д.

Подграфом *i-го* прямого пути называется подграф, который получается из исходного графа отбрасыванием всех дуг и вершин *i-го* пути, а также всех дуг, начинающихся или кончающихся на вершинах этого пути.

Передаточная функция системы управления относительно входа *x* и выхода *z* определяется следующим образом:

$$W_{zx} = \frac{1}{\Delta}\sum_{i=1}^{m} W_{ni}\Delta_i \tag{2}$$

где Δ – определитель графа системы управления;

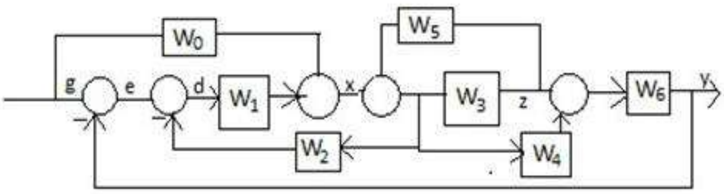
W_{ni} – передаточная функция *i-го* прямого пути от начальной вершины *x* и конечной вершины *z;*

m - общее число таких прямых;

Δ_i-определитель подграфа *i-го* прямого пути.

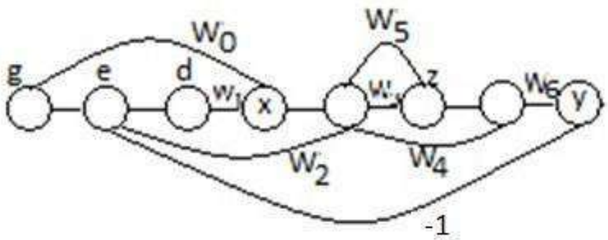
Пример 25.

Построить граф и по теореме Мейсона определить передаточную функцию $W_{уд}$ системы:



Решение:

Граф системы управления представлен на рисунке:



От вершины *g* до вершины *y* имеются 4 прямых пути. Передаточные функции этих путей равны:

$$W_{n1} = W_0 * W_3 * W_6; W_{n2} = W_0 W_4 * W_6;$$
$$W_{n3} = W_1 * W_3 * W_6; W_{n4} = W_1 * W_4 * W_6.$$

Подграф 1-го пути состоит из вершин e и d; 2-го пути - из вершин e, d и z; подграф 3-го пути есть пустой граф; подграф 4-го пути состоит из вершины z. И так как они не имеют контуров, их определители равны единице:

$\Delta_i = 1 (i = 1,2,3,4)$.

Подграф системы управления имеет 4 простых контуров. Их передаточные функции имеют вид :

$$W_{01} = -W_1 * W_2; W_{02} = W_3 * W_5;$$
$$W_{03} = -W_1 * W_3 * W_6; W_{04} = -W_1 * W_4 * W_6.$$

Несоприкасающихся пар контуров нет. Поэтому по формуле (1) определитель графа имеет вид:

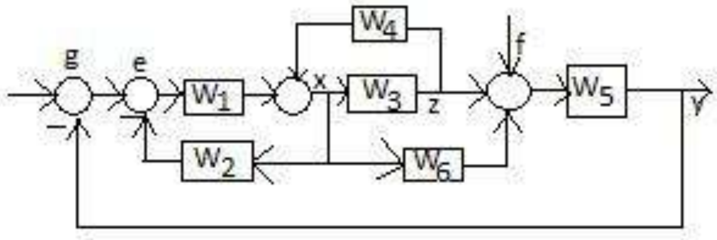
$$\Delta = 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{03} + W_{04}).$$

Для искомой передаточной функции получаем (по формуле (2)):

$$W_{\text{уд}} = \frac{W_{n1} + W_{n2} + W_{n3} + W_{n4}}{\Delta}$$
$$= \frac{W_0 W_3 W_6 + W_0 W_4 W_6 + W_1 W_3 W_6 + W_1 W_4 W_6}{1 + W_1 W_2 - W_3 W_5 + W_1 W_3 W_6 + W_1 W_4 W_6}.$$

Пример 26.

Построить граф системы управления и определить по теореме Мейсона следующие передаточные функции (ПФ):



а) $W_{\text{уд}}$ – Пф относительно входа g и входа y.

б)$W_{x\text{д}}$– Пф относительно входа g и выхода x.

в) $W_{e\text{д}}$ – ПФ относительно входа g и выхода e.

г) W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y.

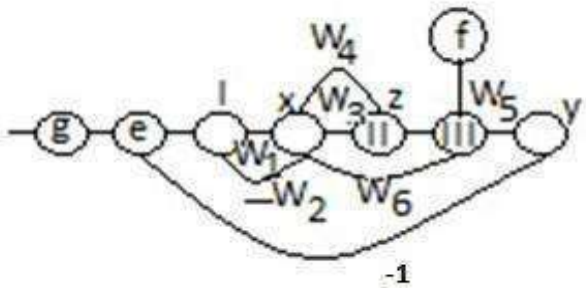
д) W_{xf} – ПФ относительно входа fи выхода x.

е)W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e.

<u>Решение:</u>

а) $W_{\text{уд}}$ – Пф относительно входа g и входа y.

Граф системы управления имеет вид:



От вершины g до вершины y имеется 2 прямых пути. Передаточные функции этих путей равны :

$W_{n1} = W_1 * W_3 * W_5; W_{n2} = W_1 * W_6 * W_5.$

Подграф 1-го пути - пустой граф; подграф 2-го пути состоит из вершины z. Так как они не имеют контуров, их определители равны 1 , т.е $\Delta_i = 1 (i = 1,2)$.

Граф системы управления имеет 4 простых контура. Их передаточные функции имеют вид:

$W_{01} = -W_1 * W_2; W_{02} = W_3 * W_4; W_{03} = -W_1 * W_6 * W_5;$

$W_{04} = -W_1 * W_3 * W_5.$

Несоприкасающихся пар контуров нет. Поэтому определитель графа имеет вид:

$$\Delta = 1 - (W_{01} + W_{02} + W_{03} + W_{04}) = 1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_6 * W_5 + W_1 * W_3 * W_5$$

.

Для искомой передаточной функции получим:

$$W_{уд} = \frac{W_{n1} + W_{n2}}{\Delta} = \frac{W_1 * W_3 * W_5 + W_1 * W_6 * W_5}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_6 * W_5 + W_1 * W_3 * W_6}.$$

б) $W_{хд}$ – Пф относительно входа g и выхода x.

От вершины g к выходу x имеется 1 прямой путь с передаточной функции $W_{пх} = W_1$. Подграф этого пути состоит из вершин *II* , *III* , *f* , *y* и не имеют простых контуров то его определитель $\Delta_1 = 1$. Тогда

$$W_{хд} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{W_1}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_6 * W_5 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

в) $W_{ед}$ – ПФ относительно входа g и выхода e.

Решение. От вершины g к выходу e имеется 1 прямой путь с передаточной функцией

$W_{n1} = 1.$

Подграф этого пути состоит из вершин I , II , III , *x* ,*y* , *f*и имеется два простых контура с передаточными функциями

$W_{01} = -W_1 * W_2$ и $W_{02} = W_3 * W_4$. Тогда определитель этого подграфа будет равен

$\Delta_1 = 1 - (W_1 + W_2 + W_3 + W_4) = 1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4$.

Тогда искомая передаточная функция имеет вид :

$$W_{ед} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_6 * W_5 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

г) W_{yf} – ПФ относительно входа f и выхода y.

От вершины f к выходу y имеется 1 прямой путь с передаточной функцией

$W_{n1} = W_5$.

Подграф этого пути состоит из вершин g, e, I, II, x и имеет два простых контура с передаточными функциями

$W_{01} = -W_1 * W_2$ и $W_{02} = W_3 * W_4$.

Определитель подграфа этого пути

$\Delta_1 = 1 - (-W_1 * W_2 + W_3 * W_4) = 1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4$.

Тогда искомая передаточная функция имеет вид :

$$W_{yf} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{W_5 * (1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4)}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_6 * W_5 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

д) W_{xf} – ПФ относительно входа fи выхода x.

От вершины f к выходу x имеется 1 прямой путь с передаточной функцией

$W_{n1} = -W_5 * W_1$.Подграф этого пути состоит из вершин *д,II* , и не имеет простых контуров, следовательно, определитель $\Delta_1 = 1$.

Тогда:

$$W_{xf} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{-W_5 * W_1}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5 + W_1 * W_5 * W_6}.$$

е) W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e имеет один прямой путь с передаточной функцией $W_{n1} = -W_5$. Подграф этого пути состоит из вершин g, *I,x,II*и имеет 2 простых контура с передаточными функциями

$W_{01} = -W_1 * W_2$и $W_{02} = W_3 * W_4$. Определитель подграфа этого пути равен

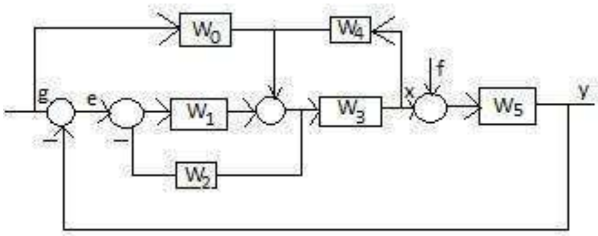
$\Delta_1 = 1 - (-W_1 * W_2 + W_3 * W_4) = 1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4$.

Тогда

$$W_{ef} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{-W_5 * (1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4)}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5 + W_1 * W_5 * W_6}.$$

Пример 27.

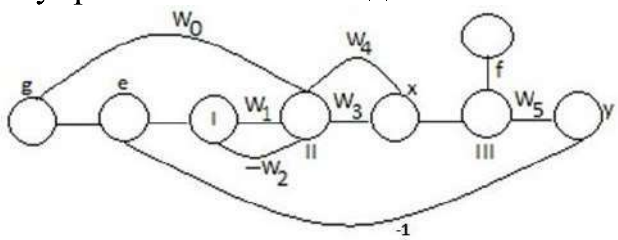
Построить граф системы управления и определить по теореме Мейсона следующие передаточные функции:



а) $W_{уд}$ – ПФ относительно g и выхода y.
б) $W_{xд}$ − ПФ относительно входа g и выхода x.
в) $W_{eд}$ − Пф относительно входа g и выхода e.
г) W_{yf} − ПФ относительно входа g и выхода y.
д) $W_{yд}$ − ПФ относительно входа f и выходах x .
е) W_{ef} − ПФ относительно входа f и выхода e.

Решение:
а) $W_{уд}$ – ПФ относительно g и выхода y.

Граф системы управления имеет вид:



От вершины g до вершины y имеется два прямых пути. Передаточная функция этих путей равны:

$$W_{n1} = W_1 * W_3 * W_5; W_{n2} = W_0 * W_3 * W_5.$$

Подграф 1 пути - пустой граф и не имеет простых контуров, следовательно

$\Delta_1 = 1$.

Подграф 2 пути состоит из вершин e и I и не имеет простых контуров, следовательно, его определитель $\Delta_2 = 1$.

Граф системы управления имеет 3 простых контура. Их передаточные функции равны:

$$W_{01} = -W_1 * W_2; W_{02} = W_3 * W_4;$$
$$W_{03} = -W_1 * W_3 * W_5.$$

Несоприкасающихся пар контуров нет. Поэтому определитель графа имеет вид:

$$\Delta = 1 - (-W_1 * W_2 + W_3 * W_4 - W_1 * W_3 * W_5) =$$
$$1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5.$$

Для искомой передаточной функции имеем:

$$W_{уд} = \frac{W_{n1} * \Delta_1 + W_{n2} * \Delta_2}{\Delta} = \frac{W_1 * W_3 * W_5 + W_0 * W_3 * W_5}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

б) $W_{xд}$ − ПФ относительно входа g и выхода x

От вершины g к вершине x имеется 2 прямых пути с передаточными функциями:

$W_{n1} = W_1 * W_3; W_{n2} = W_0 * W_3.$

Подграф 1 пути состоит из вершин *f, III, y* и не имеет прямых контуров. Подграф 2 пути состоит из вершин *e, I, f, III, y* и не имеет простых контуров, следовательно, определитель этих подграфов равны 1, т.е.

$$\Delta_1 = 1 \text{ и } \Delta_2 = 1.$$

Тогда

$$W_{xд} = \frac{W_{n1} * \Delta_1 + W_{n2} * \Delta_2}{\Delta} = \frac{W_1 * W_3 + W_0 * W_3}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

в) $W_{ед}$ – Пф относительно входа g и выхода *e*.

От вершины g к вершине e имеется 1 прямой путь с передаточной функцией:

$W_{n1} = 1.$

Подграф этого пути состоит из вершин *I, II, x, f, III, y* и имеет 2 простых контура с передаточными функциями:

$$W_{01} = -W_1 * W_2; \text{ и } W_{02} = W_3 * W_4.$$

Определитель подграфа этого пути равен :

$$\Delta_1 = 1 - (-W_1 * W_2 + W_3 * W_4) = 1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4.$$

Тогда

$$W_{ед} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

г) W_{yf} – ПФ относительно входа g и выхода *y*.

От вершины g к вершине y имеется 1 прямой путь с передаточной функцией $W_{n1} = W_5$. Подграф этого пути состоит и вершин *g, e, I, II, x* и имеет 2 простых контура с передаточными функциями $W_{01} = -W_1 * W_2$ и $W_{02} = W_3 * W_4$. Определитель подграфа этого пути равен

$\Delta_1 = 1 - (-W_1 * W_2 + W_3 * W_4) = 1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4.$

Тогда:

$$W_{yf} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{W_5 * (1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4)}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

д) $W_{уд}$ – ПФ относительно входа f и выходах x .

От вершины f к вершине x имеется 1 прямой путь с передаточной функцией

$$W_{n1} = -W_5 * W_1 * W_3.$$

Подграф этого пути состоит из вершины g и не имеет простых контуров, поэтому определитель этого подграфа равен 1, т.е $\Delta_1 = 1$.

Тогда:

$$W_{xf} = \frac{W_{n1} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{-W_5 * W_1 * W_3}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

е)W_{ef} – ПФ относительно входа f и выхода e.

От вершины f к вершине e имеется 1 прямой путь с передаточной функцией

$$W_{n1} = -W_5.$$

Подграф этого пути состоит из вершин g, x, I, II и имеет 2 простых контура с передаточными функциями

$$W_{01} = -W_1 * W_2 \text{ и } W_{02} = W_3 * W_4.$$

Определитель подграфа этого пути равен :

$\Delta_1 = 1 - (-W_1 * W_2 + W_3 * W_4) = 1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4.$

Тогда:

$$W_{ef} = \frac{W_{ef} * \Delta_1}{\Delta} = \frac{-W_5 * (1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4)}{1 + W_1 * W_2 - W_3 * W_4 + W_1 * W_3 * W_5}.$$

2.7. Алгебраические критерии устойчивости

Теория.

Основное условие устойчивости: для того, чтобы непрерывная система управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни ее характеристического уравнения имели отрицательную вещественную часть.

На комплексной плоскости корни, имеющие отрицательную вещественную часть, располагаются в левой полуплоскости и поэтому называются левыми, корни, имеющие положительную вещественную часть, располагаются в правой полуплоскости и называются правыми, а корни, расположенные на мнимой оси – нейтральными. Поэтому основное условие устойчивости можно сформулировать еще так: для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения были левыми.

Необходимое условие устойчивости. Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все коэффициенты ее характеристического уравнения

$a_0 * \lambda^n + a_1 * \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0$

были строго одного знака:

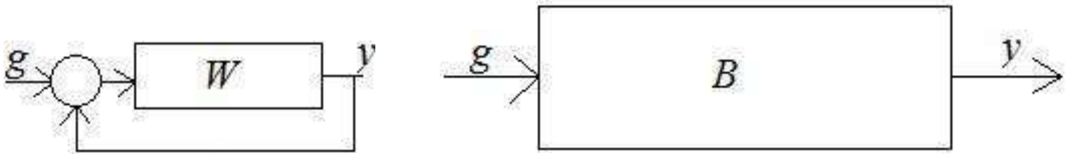
$$a_0 > 0, a_1 > 0, \dots . a_n > 0 \text{ или } a_0 < 0, a_1 < 0 \dots . a_n < 0.$$

Характеристическое уравнение

Характеристический полином $Q(\lambda)$ (левая часть характеристического уравнения $Q(\lambda)=0$) получается из собственного оператора $Q(p)$ простой заменой оператора p на комплексную переменную λ. Если дано уравнение системы управления в символической форме, то дифференциальный оператор при выходной переменной и будет собственным оператором.

Если дана передаточная функция, то собственный оператор (с точностью до обозначения переменной) совпадает с ее знаменателем.

При исследовании замкнутой системы (рис. 17 а) нет необходимости находить ее передаточную функцию, если известна передаточная функция $W(p)=R(p)/S(p)$ разомкнутой системы (рис. 17 б)



а) б)

Рис. 17. замкнутые и разомкнутые системы

Ее собственный оператор $Q(p)$ равен сумме операторов числителя и знаменателя передаточной функции разомкнутой системы: $Q(p) = R(p) + S(p)$.

При проведении исследования устойчивости с помощью алгебраических критериев следует, прежде всего, записав характеристическое уравнение, проверить выполнение необходимого условия устойчивости, так как его проверка не требует никаких вычислений и в то же время при его невыполнении не надо проводить дальнейших исследований.

Определители Гурвица. Из коэффициентов характеристического полинома

$$Q(\lambda)=a_0 * \lambda^n + a_1 * \lambda^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Составим определитель *n-го* порядка следующим образом:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_5 \end{vmatrix}.$$

На главной диагонали выписываются элементы $a_1, a_2, \dots a_n$. Затем, двигаясь от этих элементов вверх, помещаются коэффициенты в порядке возрастания индексов, вниз – в порядке убывания. Например, при построении i-го столбца, двигаясь от элемента a_i вверх, записываются коэффициенты $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$, вниз – коэффициенты $a_{i-1}, a_{i-2}, \dots$ При этом, если индекс превышает n или принимает отрицательное значение, то вместо соответствующего коэффициента записывается нуль.

Определитель Δ_n и его главные миноры

$$\Delta_1 = a_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots,$$

называется определителем Гурвица

Критерии Гурвица (Hurwitz, 1895). Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица, составленные из коэффициентов ее характеристического уравнения, при $a_0 > 0$ были больше 0.

$$a_0 > 0, \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Критерии Льерна-Шипара (Lienard, Chipard, 1914). При выполнении необходимого условия $a_0 > 0, a_1 > 0, \dots a_n > 0$ для устойчивости системы управления необходимо и достаточно, чтобы все ее определители Гурвица с четными индексами или все ее определители Гурвица с нечетными индексами $a_0 > 0$ были положительными

$$\Delta_2 > 0, \Delta_4 > 0, \Delta_6 > 0 \dots \quad (3\ а)$$

или

$$\Delta_3 > 0, \Delta_5 > 0, \Delta_7 > 0 \dots \quad (3\ б)$$

Для уменьшения вычислений целесообразно при нечетном *n* использовать условие (3.1 а), а при нечетном *n*-условие (3.1 б).

Выпишем необходимые и достаточные условия устойчивости для *n*=1,2,3:

n=1: $a_1 > 0$;

n=2: $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$;

n=3: $a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, \Delta_2 = a_1 * a_2 - a_0 * a_3 > 0.$

Пример 28.

Передаточная функция разомкнутой имеет вид

$$W(p) = \frac{k}{p^3 + 0{,}5p^2 + 4p + 1}, \ k=0{,}5;2.$$

Исследовать устойчивость разомкнутой и замкнутой системы.

<u>Решение:</u>

Характеристический полином разомкнутой системы имеет вид:

$$W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)} = Q(p) = p^3 + 0{,}5p^2 + 4p + 1.$$

$\varphi^3 + 0{,}5\varphi^2 + \varphi 4 + 1.$

Все коэффициенты больше нуля:

$a_0 = 1 > 0, a_1 = 0{,}5 > 0, a_2 = 4 > 0, a_3 = 1 > 0.$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0{,}5 * 4 - 1 * 1 = 1 > 0.$$

Следовательно, по необходимому и достаточному условию устойчивости при *n*=3 (по критерию Льенара-Шипара) разомкнутая система устойчива. Если $W(p) = \frac{R(p)}{Q(p)}$ – ПФ разомкнутой системы, то $Q(p)=R(p)+S(p)$ – для замкнутой системы. Характеристический полином замкнутой системы:

$$Q(\alpha) = \alpha^3 + 0{,}5 * \alpha^2 + 4 * \alpha + 1 + k.$$

При *k=0,5* имеем:

$Q(\alpha) = \alpha^3 + 0{,}5 * \alpha^2 + 4 * \alpha + 1 + 0{,}5 = \alpha^3 + 0{,}5 * \alpha^2 + 4 * \alpha + +1{,}5;$

$a_0 = 1 > 0, a_1 = 0{,}5 > 0, a_2 = 4 > 0, a_3 = 1{,}5 > 0$

и

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 0{,}5 * 4 - 1 * 1{,}5 = 2 - 1{,}5 = 0{,}5 > 0,$$

следовательно по критерию Льерна-Шипара замкнутая система при *k=0,5* устойчива.

При *k=2* имеем:

$$Q(\alpha) = \alpha^3 + 0{,}5 * \alpha^2 + 4 * \alpha + 1 + 2 = \alpha^3 + 0{,}5 * \alpha^2 + 4 * \alpha + 3$$

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 0{,}5 > 0, a_2 = 4 > 0, a_3 = 3 > 0; \text{ и}$$

$$\Delta_2 = a_1a_2 - a_0a_3 = 0{,}5 * 4 - 1{,}3 = 2 - 3 = -1 < 0,$$

следовательно по критерию Льерна-Шипара замкнутая система неустойчива при *k=2*.

Пример 29.

С помощью критерия Гурвица исследовать устойчивость систем уравнения, у которых характеристическое уравнение имеет следующий вид:

а) $\alpha^4 + 3 * \alpha^3 + 5 * \alpha^2 + 7 * \alpha + 4 = 0.$

Решение:

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 3 > 0, a_2 = 5, a_3 = 7 > 0, a_4 = 4 > 0.$$

необходимое условие устойчивости выполняется.

Составим определитель 4-го порядка

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры имеют вид:

$$\Delta_1 = a_1 = 3 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1a_2 - a_0a_3 = 3 * 5 - 1 * 7 = 15 - 7 = 8 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 3*5*7+7*4*0+1*3*0-$$

$$(5*0*0+3*4*3+1*7*7) = 3*35-3*4*4-1*7*7=105-36-49=20>0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4 * \begin{vmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 * 20 = 80 > 0.$$

Т.к. $a_0 > 0$ и $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$, то система по критерию Гурвица устойчива.

б) $\alpha^4 + 4 * \alpha^3 + 3 * \alpha^2 + 5 * \alpha + 4 = 0.$

Решение:

$a_0 = 1 > 0, a_1 = 4 > 0, a_2 = 3 > 0, a_3 = 5 > 0, a_4 = 4 > 0;$

необходимое условие устойчивости выполняется.

Составим определитель 4-го порядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры имеют вид:

$$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4*3-1*5=7>0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$=4*3*5+4*5*0+1*4*0-(0*3*0+4*4*4+1*5*5)=$$

= 12*5-4*16-25=60-64-25=-4-25=-29<0,

следовательно, по критерию Гурвица система неустойчива

Пример 30.

Исследовать устойчивость систем управления, которые описываются следующими уравнениями (y - выход, u - вход):

а)$\frac{d^4*y}{dt^4} + \frac{3*d^3*y}{dt^3} + \frac{3*d^2*y}{dt^2} + \frac{3*d*y}{dt} + 2*y = \frac{d*u}{dt} + 3*u$

Решение:

p- оператор дифференцирования:

$$(p^4 y + 3*p^3 y + 3*p^2 y + 3*p + 2*y) = p*u + 3*u,$$

$$(p^4 + 3*p^3 + 3*p^2 + 3*p + 2)y = (p+3) \text{ и}$$

$$W(p) = \frac{p+3}{p^4+3*p^3+3*p^2+3*p+2}.$$

Характеристический полином системы уравнения имеет вид:

$$\alpha^4 + 3*\alpha^3 + 3*\alpha^2 + 3*\alpha + 2:$$

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 3 > 0, a_2 = 3 > 0, a_3 = 3 > 0, a_4 = 2 > 0,$$

т.е. все коэффициенты больше нуля (одного знака), следовательно, необходимое условие устойчивости выполняется

n=4 – 4-ой степени полином

$$\Delta_1 = a_1 = a_1 = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} \text{=3*3*3+3*2*0+1*3*0-}$$

-(0*0*3+1*3*3+3*2*3)=21-9-18=0,

=> по т. Льерна-Шипара система неустойчива

б)$\frac{d^4*y}{dt^4} + \frac{4*d^3*y}{dt^3} + \frac{7*d^2*y}{dt^2} + \frac{8*dy}{dt} + 4*y = 3u$

Решение:

Дифференциальный оператор при выходной переменной является собственным оператором, т.е

$$Q(p) = p^4 + 4 * p^3 + 7 * p^2 + 8 * p + 4.$$

Характеристический полином $Q(\alpha)$ (левая часть характеристического уравнения $Q(\alpha)=0$) получается из собственного оператора $Q(p)$ заменой оператора p на комплексную переменную α.

Характеристический полином системы уравнения имеет вид:

$$\alpha^4 + 4 * \alpha^3 + 7 * \alpha^2 + 8 * \alpha + 4.$$

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 4 > 0, a_2 = 7 > 0, a_3 = 8 > 0, a_4 = 4 > 0,$$

следовательно, необходимое условие устойчивости выполняется.

n=4 – 4-я степень характеристического полинома.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 0 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 4 * 7 * 8 + 8 * 4 * 0 +$$

+1*4*0-(0*7*0+1*8*8+4*4*4)=28*8-64-64=224-128=96>0 =>

=> по т. Льерна-Шипара система устойчива.

Пример 31.

Исследовать устойчивость замкнутых систем при следующих передаточных функциях разомкнутой системы:

а) $\dfrac{2*s^2+3*s+1}{s^4+4*s^3+s^2+2*s+3}$.

<u>Решение:</u>

$$W(s) = \frac{2*s^2+3*s+1}{s^4+4*s^3+s^2+2*s+3}$$ -ПФ разомкнутой системы

$$W(s) = \frac{R(s)}{S(s)}$$

Тогда $Q(s)$ – собственный оператор замкнутой системы определяется равенством:

$$Q(s) = R(s) + S(s)$$

$$Q(s) = 2 * s^2 + 3 * s + 1 + s^4 + 4 * s^3 + s^2 + 2 * s + 3 =$$

$=s^4 + 4 * s^3 + 3 * s^2 + 5 * s + 4$ – собственный оператор замкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы.

$$Q(\alpha) = \alpha^4 + 4 * \alpha^3 + 3 * \alpha^2 + 5 * \alpha + 4$$

$$a_0 = 1 > 0, a_1 = 4 > 0, a_2 = 3 > 0, a_3 = 5 > 0, a_4 = 4 > 0,$$

n=4 – 4-я степень характеристического полинома.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$ =4*3*5+5*4*0+1*4*0-

-(0*3*0+5*1*5+4*4*4)=60-25-64= -4-25= -29<0 =>

=> по теореме Льерна-Шипара система неустойчива.

б) W(s) = $\dfrac{6*s^2+9*s+9}{s^4+5*s^3+5*s^2+10*s+9}$.

<u>Решение:</u>

$$W(s) = \frac{R(s)}{S(s)},$$

$$Q(s) = R(s) + S(s),$$

$Q(s) = 6 * s^2 + 9 * s + 9 + s^4 + 5 * s^3 + 5 * s^2 + 10 * s + 9 =$

$=s^4 + 5 * s^3 + 11 * s^2 + 19 * s + 18$ – собственный оператор замкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы:

$$Q(\alpha) = \alpha^4 + 5 * \alpha^3 + 11 * \alpha^2 + 19 * \alpha + 18,$$

$a_0 = 1 > 0, a_1 = 5 > 0, a_2 = 11 > 0, a_3 = 19 > 0, a_4 = 18 > 0,$

n=4 – 4-я степень характеристического многочлена.

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 19 & 0 \\ 1 & 11 & 18 \\ 0 & 5 & 19 \end{vmatrix} = 5*11*19+0*18*18+1*5*0-$$

- (0*11*0+5*5*18+1*19*19)= 1045-450-361= 234>0 =>

=> по теореме Льерна-Шипара система устойчива

Пример 32.

С помощью критериев Гурвица исследовать устойчивость системы уравнения, у которой характеристическое уравнение имеет вид:

$$\alpha^4 + 4 * \alpha^3 + 5 * \alpha^2 + 7 * \alpha + 3 = 0.$$

<u>Решение:</u>

$a_0 = 1 > 0, a_1 = 4 > 0, a_2 = 5 > 0, a_3 = 7 > 0, a_4 = 3 > 0$=>

=> необходимое условие устойчивости выполняется.

Составим определитель 4-го порядка:

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Главные миноры имеют вид:

$$\Delta_1 = a_1 = 4 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3 a_0 = 4 * 5 - 1 * 7 = 13 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 4 * 5 * 7 + 0 * 7 * 3 + 1 * 4 * 0 -$$

-(0*5*0+1*7*7+4*4*3)=140-49-58=140-107=33>0,

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 * \begin{vmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 3*33=99>0.$$

Т.к $a_0 = 1 > 0$ и $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и Δ_4 все > 0 , то по критерию Гурвица система устойчива.

Пример 33.

Исследовать устойчивость системы уравнения, описываемой уравнением (y- выход, u- вход):

$$\frac{d^4*y}{dt^4}+\frac{5*d^3*y}{dt^3}+\frac{6*d^2*y}{dt^2}+\frac{12*dy}{dt}+10*y=7*u.$$

<u>Решение:</u>

Дифференцируемый оператор при выходной переменной yявляется собственным оператором, т.е:

$$Q(p)=p^4+5*p^3+6*p^2+12*p+10.$$

Характеристический полином имеет вид:

$$Q(\alpha)=\alpha^4+5*\alpha^3+6*\alpha^2+12*\alpha+10.$$

$$a_0=1>0, a_1=5>0, a_2=6>0, a_3=12>0, a_4=10>0.$$

следовательно, необходимое условие выполняется.

n=4 – 4-я степень характеристического полинома.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 12 & 0 \\ 1 & 6 & 10 \\ 0 & 5 & 12 \end{vmatrix}=5*6*12+0*12*10+$$

+1*5*0-(0*0*6+5*10*5+1*12*12)=360-250-144=360-394=-34<0, =>

=> по т. Льерна–Шипара система управления неустойчива.

Пример 34.

Исследовать устойчивость замкнутой системы при следующей передаточной функции разомкнутой системы:

$$W(s)=\frac{2*s^2+3*s+5}{s^4+5*s^3+5*s^2+2*s+1}$$

<u>Решение:</u>

$$W(s)=\frac{R(s)}{S(s)},$$

$Q(s)= R(s)+S(s)$;

$Q(s)= 2*s^2+3*s+5+s^4+5*s^3+5*s^2+2*s+1=$

$=s^4+5*s^3+7*s^2+5*s+6$ - собственный оператор замкнутой системы.

Характеристический полином замкнутой системы:

$$Q(\alpha)=\alpha^4+5*\alpha^3+7*\alpha^2+5*\alpha+6$$

$$a_0=1>0, a_1=5>0, a_2=7>0, a_3=5>0, a_4=6>0 \Rightarrow$$

=> необходимое условие устойчивости выполняется.

n=4– 4-я степень характеристического многочлена.

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 7 & 6 \\ 0 & 5 & 5 \end{vmatrix}=5*7*5+5*6*0+1*5*0-$$

- (0*7*0+5*6*5+1*5*5)=35*5-5*6*5-25=175-150-25=0 =>

=> по теореме Льерна–Шипара система неустойчива.

2.8. Частотные критерии устойчивости

Критерий Найквиста (Nyqvist, 1932). Для того чтобы замкнутая система(с отрицательной обратной связью) была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ) разомкнутой системы охватывала $l/2$ раз в положительном направлении точку (-1, j_0), где l – число правых корней характеристического уравнения разомкнутой системы.

Если разомкнутая система устойчива($l = 0$), для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы не охватывала точку (-1,j_0).

Случай наличия нулевых корней. Если характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет нулевые корни, т.е ее передаточная функция может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{k}{p^v} W_0(p), W_0(0) = 1, \nu \geq 1,$$

то АФЧХ при ω → 0 уходит в бесконечность (рис.18). В этом случае АФЧХ дополняется дугой – $\nu(\pi/2)$ окружности большого радиуса (на рис.3.3 - пунктирная линия). И для устойчивости замкнутой системы должна охватывать $l/2$ раз или при l=0 не охватывать точку(-1,j0) дополненная АФЧХ

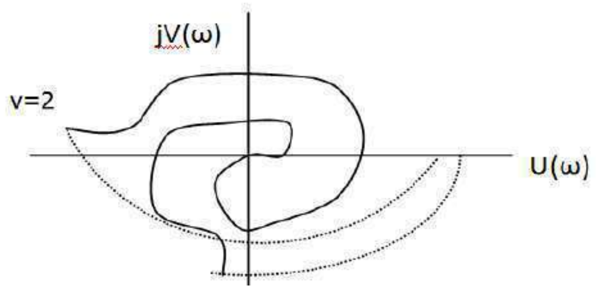


Рис. 18. АФЧХ разомкнутой системы

Пример 35.

Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

а) $W(p) = \frac{5}{p-1}$.

Решение:

Частотные передаточная функция и вещественная и мнимая функции имеет вид:

$$\mathrm{W}(j\omega) = \frac{5}{j\omega - 1} = \frac{5(-j\omega + 1)}{1 + \omega^2} = \mathrm{U}(\omega) + \mathrm{iV}(\omega),$$

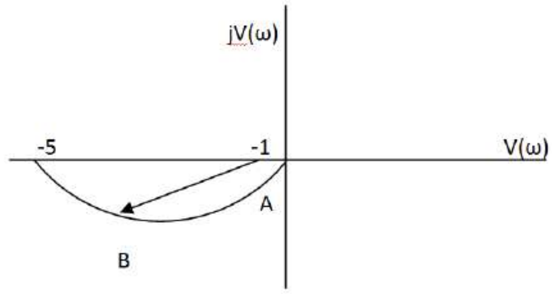
$$U(\omega) = -\frac{5}{1 + \mathrm{w}^2},$$

$$V(\omega) = -\frac{5\omega}{1 + \omega^2}.$$

Для построения АФЧХ нужно определить координаты точек ее пересечения с осями координат и соединить эти точки плавной кривой. Необходимые расчетные данные имеют вид:

ω	0	0< ω<∞	∞
U(ω)	-5	<0	0
V(ω)	0	<0	0

На основе этих данных построим АФЧХ:



Замкнутая система устойчива, т.к. l=1 и АФЧХ охватывает точку (-1,j0) 1/2 раз в положительном направлении.

б)$W(p) = \frac{10}{(p+1)^3}$.

Решение.

Решение.

$$W(j\omega) = \frac{10}{(j\omega+1)^3} = \frac{10}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{10\left(1 - 3\omega^2 - j(3\omega - \omega^3)\right)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega - \omega^3)^2},$$

$$U(\omega) = \frac{10(1-3\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2};$$

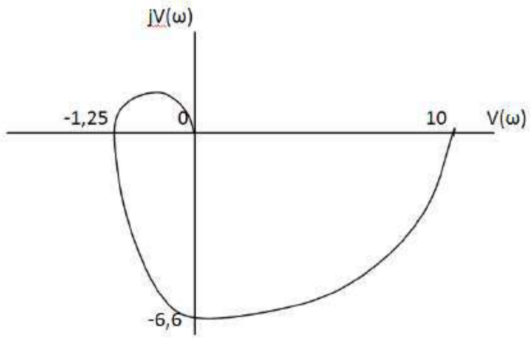
$$V(\omega) = -\frac{10\omega(3-\omega^2)}{(1-3\omega^2)^2 + (3\omega-\omega^3)^2};$$

ω от 0 до +∞

Расчетные данные имеют вид:

ω	0	0< ω<1/√3	1/√3	1/√3< ω<√3	√3	ω>√3	∞
U(ω)	10	>0	0	<0	-1,25	<0	0
V(ω)	0	<0	-6,6	<0	0	>0	0

АФЧХ имеет вид:



Замкнутая система <u>неустойчива</u>, т.к. разомкнутая система устойчива(l=0), а АФЧХ охватывает точку(-1,j0).

в) $$W(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2+s+1}.$$

<u>Решение</u>.

$$W(j\omega) = \frac{j\omega+1}{(j\omega)^3+2(j\omega)^2+j\omega+1} = \frac{j\omega+1}{-j\omega^3-2\omega^2+j\omega+1} =$$

$$= \frac{j\omega+1}{1-2\omega^2+j(\omega-\omega^3)} = \frac{(j\omega+1)(1-2\omega^2-j(\omega-\omega^3))}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$= \frac{j\omega-2j\omega*\omega^2-j^2\omega(\omega-\omega^3)+1-2\omega^2-j(\omega-\omega^3)}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$= \frac{j\omega-2j\omega^3+\omega(\omega-\omega^3)+1-2\omega^2-j(\omega-\omega^3)}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$= \frac{\omega(\omega-\omega^3)+1-2\omega^2+j(\omega-2\omega^3-(\omega-\omega^3))}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$= \frac{\omega^2-\omega^4+1-2\omega^2+j(\omega-2\omega^3-\omega+\omega^3)}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$= \frac{-\omega^2-\omega^4+1+j(-\omega^3)}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},$$

$$U(\omega) = \frac{1-\omega^2-\omega^4}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},$$

$$V(\omega) = -\frac{\omega^3}{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2},$$

$$(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2 = 0,$$

$$1-2\omega^2 = 0, \qquad \omega-\omega^3 = 0,$$

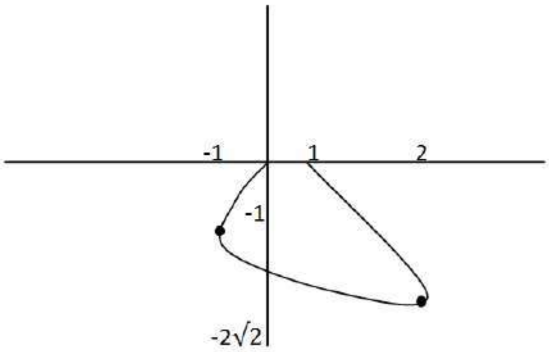
$$2\omega^2 = 1, \qquad \omega(-\omega^2+1) = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2}, \qquad 1-\omega^2 = 0 \text{ или } \omega = 0,$$

$$\omega = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad \omega = \pm 1.$$

Расчетные данные имеют вид:

ω	0	0< ω<1/√2	1/√2	1/√2< ω<1	1	ω>1	∞
U(ω)	1	>0	2	<0	-1	<0	0
V(ω)	0	<0	-2√2	<0	-1	<0	0



Решение.

$$W(j\omega)=\frac{j\omega+5}{(jw)^3+2(j\omega)^2+j\omega}=\frac{j\omega+5}{-j\omega^3-2\omega^2+j\omega}=\frac{jw+5}{-2\omega^2+j(\omega-\omega^3)}$$

$$=\frac{(j\omega+5)(-2\omega^2-j(\omega-\omega^3))}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$=\frac{-2j\omega^3-10\omega^2-j^2\omega(\omega-\omega^3)-5j(\omega-\omega^3)}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$=\frac{-10\omega^2+\omega^2-\omega^4-2j\omega^3-5j(\omega-\omega^3)}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$=\frac{-10\omega^2+\omega^2-\omega^4-2j\omega^3-5j\omega+5j\omega^3}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$=\frac{-\omega^4-9\omega^2+3j\omega^3-5j\omega}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}=\frac{-\omega^2(\omega^2+9)+j(3\omega^3-5\omega)}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}$$

$$U(\omega)=\frac{-\omega^2(\omega^2+9)}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}=\frac{-\omega^2(\omega^2+9)}{4\omega^4+\omega^2(1-\omega^2)^2}=\frac{-\omega^2-9}{4\omega^2+(1-\omega^2)^2},$$

$$V(\omega)=\frac{3\omega^3-5\omega}{4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2}=\frac{3\omega^2-5}{4\omega^3+\omega(1-\omega^2)^2},$$

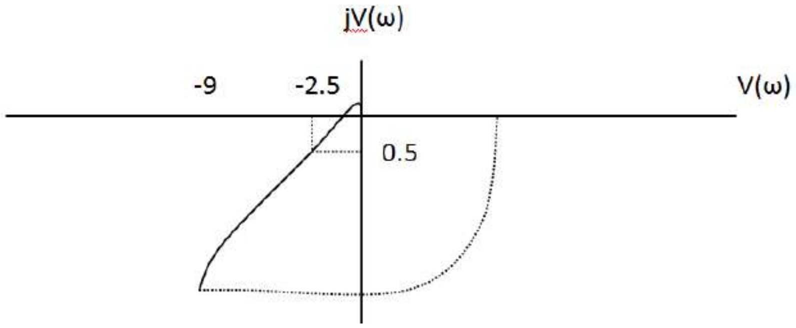
$$4\omega^4+(\omega-\omega^3)^2=0,$$

$$4\omega^4=0,\qquad \omega=0.$$

$$(\omega-\omega^3)^2=0,$$
$$\omega-\omega^3=0,$$
$$\omega(1-\omega^2)=0,$$
$$\omega=0\ \textit{или}\ \omega=\pm1.$$

Расчетные данные имеют вид:

ω	0	0< ω<1	1	ω>1	∞
U(ω)	-9	<0	-2.5	<0	0
V(ω)	∞	<0	-0.5	>0	0



Характеристический многочлен имеет вид:

$$Q(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda,$$
$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = 0,$$
$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0,$$
$$\lambda = 0 \ \textit{или}\ \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0,$$
$$\lambda_1 = -1 \quad \text{правых корней нет} \ => \ e = 0.$$

Имеется нулевой корень. Представим передаточную функцию в виде

$$W(s) = \frac{k}{s^v} W_0(s), W_0(0) = 1, v \geq 1 .$$

Тогда

$$W(s)\frac{s+5}{s^3 + 2s^2 + s} = \frac{s+5}{s^1(s^2 + 2s + 1)};$$
$$W(s) = s^2 + 2s + 1\ W_0(0) = 1, v = 1.$$

Т.к e=0 и АФЧХ отклонения дугой: $v(\pi/2) = -(\pi/2)$ окружности большого радиуса охватывает точку (-1,j0),то система <u>неустойчива</u>.

Пример

Исследовать устойчивость замкнутой системы, если передаточная функция разомкнутой системы имеет вид:

$$W(s) = \frac{2s+1}{s^3 + 3s^2 + s + 2}$$

<u>Решение</u>.

$$W(j\omega) = \frac{2j\omega + 1}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + j\omega + 2} = \frac{2j\omega + 1}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + j\omega + 2}$$
$$= \frac{2j\omega + 1}{2 - 3\omega^2 + j(\omega - \omega^3)} = \frac{(2j\omega + 1)(2 - 3\omega^2 - j(\omega - \omega^3))}{(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$
$$= \frac{4j\omega + 2 - 6j\omega^3 - 3\omega^2 - 2j^2\omega(\omega - \omega^3) - j(\omega - \omega^3)}{(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$
$$= \frac{4j\omega + 2 - 6j\omega^3 - 3\omega^2 + 2\omega(\omega - \omega^3) - j(\omega - \omega^3)}{(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$
$$= \frac{2 - 3\omega^2 + 2\omega^2 - 2\omega^4 + j(4\omega - 6\omega^3 - \omega + \omega^3)}{(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$
$$= \frac{2 - \omega^2 - 2\omega^4 + j(3\omega - 5\omega^3)}{(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2}$$

$$U(\omega) = \frac{2 - \omega^2 - 2\omega^4}{(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2},$$

$$V(\omega) = \frac{3\omega - 5\omega^3}{(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2},$$

$$(2 - 3\omega^2)^2 + (\omega - \omega^3)^2 = 0,$$

$$2 - 3\omega^2 = 0, \qquad \omega - \omega^3 = 0,$$

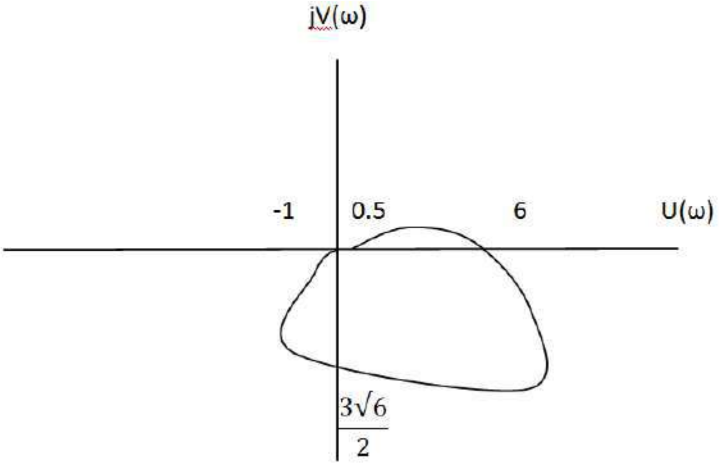
$$3\omega^2 = 2, \qquad \omega(1 - \omega^2) = 0,$$

$$\omega^2 = \frac{2}{3}, \qquad \omega = 0 \textit{ или } \omega = \pm 1.$$

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Расчетные данные имеют вид:

ω	0	$0<\omega<\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{2}{3}} < \omega < 1$	1	$\omega>1$	∞
$U(\omega)$	0,5	>0	6	<0	-1	<0	0
$V(\omega)$	0	>0	$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$	<0	-2	<0	0



Характеристический многочлен разомкнутой системы имеет вид:

$Q(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2$

$\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$

Правых корней нет, =>, l=0.

АФЧХ не охватывает точку (-1,j0).

Следовательно, разомкнутая система устойчива(l=0) и т.к. АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку (-1,j0), то замкнутая система устойчива.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основы теории управления являются одной из наиболее важных общетехнических дисциплин, изучение которой опирается на ряд фундаментальных общеобразовательных и общетехнических дисциплин.

Основная задача данного учебного методического пособия заключается в том, чтобы на конкретных примерах и задачах научить студента практическому использованию приемов и методов, применяемых при анализе и синтезе систем автоматического управления, которые имеют тесную связь с электроникой, электротехникой, математикой и другими разделами науки и техники.

Рассматриваемые вопросы являются наиболее общими и характеризуют с единых позиций процессы, происходящие в системах автоматического управления и регулирования.

Необходимость внедрения и развитие систем автоматического управления способствовали созданию отдельного научно-технического направления, которое включает элементную базу, теоретические вопросы анализа и синтеза, вопросы проектирования и обеспечения требуемой надёжности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цветкова О. Л. Теория автоматического управления: учебник. М.: Директ-Медиа, 2016.
2. Дорофеева Л. И. Основы теории управления: учебно-методический комплекс. М.: Директ-Медиа, 2015.
3. Дмитриева В. В., Певзнер Л. Д. Лабораторный практикум по дисциплине «Теория автоматического управления»: учебное пособие для вузов. М.: Изд-во МГГУ, 2013.
4. Никулин Е. А. Основы теории автоматического управления. М.: ООО «Литрес», 2014.
5. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.1. Линейные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
6. Ким Д.П., Дмитриева Н.Д. Сборник задач по теории автоматического управления. Линейные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
7. Ким Д.П. Теория автоматического управления. Т.2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
8. Ким Д.П., Дмитриева Н.Д. Сборник задач по теории автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
9. Уколов В.Ф. Теория управления: учебное пособие. М.: ЗАО «Издательство «Экономика», 2007.
10. Егоров А.Н. Основы теории управления. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
11. Повзнер Л.Д. Теория систем управления: учебное пособие для вузов. М.: Изд. МГГУ, 2008. - 472 с.
12. Туманов М.П. Теория управления. Теория линейных систем автоматического управления: учебное пособие. М., 2008. 82 с. URL: http://window.edu.ru/window_catalog/files/r24738/5.pdf.
13. Бирюков С.В. Основные понятия теории автоматического управления. - URL: http://bookz.ru/rar/bookz/teacher/tau_ucheb.rar
14. Бессекерский В.А., Изранцев В.В. САУ с микро ЭВМ. М.: Наука, 1981.
15. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975.
16. Воронов А.А. Теория автоматического управления. В 2-х ч. М.: Высшая школа, 1986.
17. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1998.
18. Справочник по теории автоматического управления // Под ред. А.А.Красовского. М.: Наука, 1987.
19. Понтрягин Л.С.и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1976.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Ольга Николаевна Масина,
Ольга Борисовна Гладких

ОСНОВЫ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Техническое исполнение – В. М. Гришин

Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 4,7 Уч.-изд.л. 4,3
Тираж 300 экз. (1-й завод 1-20 экз.). Заказ 109

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1