МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

КАФЕДРА ТЕХНОЛОГИЧЕКИХ ПРОЦЕССОВ В МАШИНОСТРОЕНИИ
И АГРОИНЖЕНЕРИИ

С.С. Бунеев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Елец – 2020

УДК 517.9
ББК 22.161.6
Б 91

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 28. 01. 2020 г., протокол № 1

Рецензенты:

А.А.Зайцев, кандидат физико-математических наук, доцент

(ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»)

С.А. Рощупкин, кандидат физико-математических наук, доцент

(ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»)

С.С. Бунеев

Б 91 Дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2020. – 45 с.
ISBN 978-5-00151-122-9

Пособие разработано в соответствии с требованиями ФГОС ВО подготовки бакалавров по направлению 35.03.06 – «Агроинженерия», с профилем подготовки «Технические системы в агробизнесе» очной и заочной формы обучения 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

ISBN 978-5-00151-122-9

Введение

Основное открытие Ньютона, которое он счёл нужным засекретить и опубликовал лишь в виде анаграммы, состоит в следующем: «Data aequatione quotcunque fluentes quantitae involvente fluxiones invenire et vice versa». В переводе на современный математический язык это означает: «Полезно решать дифференциальные уравнения».

В настоящее время теория дифференциальных уравнений представляет собой трудно обозримый конгломерат большого количества разнообразных идей и методов, в высшей степени полезный для всевозможных приложений и постоянно стимулирующий теоретические исследования во всех отделах математики.

В настоящем пособии излагаются основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и методы интегрирования отдельных типов уравнений первого и второго порядков. Изложение сопровождается многочисленными обстоятельно разобранными примерами.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка

Изоклины. Задача Коши. Теорема существования и единственности задачи Коши

Уравнения, в которые неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называются дифференциальными уравнениями. Подобными уравнениями описываются многие явления и процессы.

Примеры. 1) $\dfrac{dx}{dt} = -kx$ –

уравнение радиоактивного распада (k – постоянная распада, x – количество неразложившегося вещества в момент времени t, скорость распада $\dfrac{dx}{dt}$ пропорциональна количеству распадающегося вещества).

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$ –

уравнение Пуассона, задающее зависимость между многими физическими величинами.

Мы будем рассматривать уравнения, где неизвестная функция является функцией одной переменной. Такие уравнения называются **обыкновенными дифференциальными уравнениями**.

Уравнение вида

$$F(x,u(x),u'(x),u''(x),...,u^{(n)}(x))=0 \qquad (1)$$

называется **обыкновенным дифференциальным уравнением *n*-го порядка**. При этом **порядком** уравнения называется максимальный порядок входящей в него производной.

Функция, которая при подстановке в уравнение (1) обращает его в тождество, называется **решением** дифференциального уравнения.

1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y). \qquad (2)$$

Можно показать, что общее решение такого уравнения зависит от одной произвольной постоянной. С геометрической точки зрения уравнение (2) устанавливает зависимость между координатами точки на плоскости и угловым коэффициентом $\frac{dy}{dx}$ касательной к графику решения в той же точке. Следовательно, уравнение (2) определяет некоторое поле направлений, и задача его решения состоит в том, чтобы найти кривые, называемые **интегральными кривыми**, направление касательных к которым в каждой точке плоскости совпадает с направлением этого поля.

Примеры. 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$.

В каждой точке, кроме начала координат, угловой коэффициент к искомой интегральной кривой равен $\frac{y}{x}$, то есть тангенсу угла, образованного с осью Оx прямой, проходящей через данную точку и начало координат. Следовательно, интегральными кривыми в данном случае будут прямые вида $y=cx$ (рис.1).

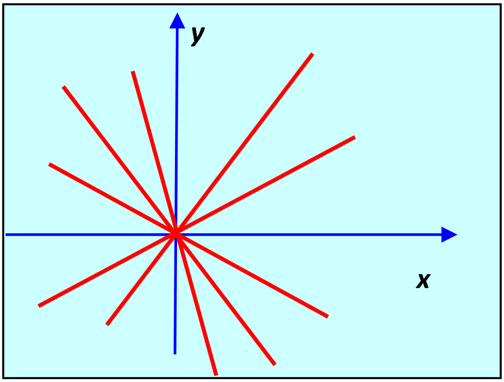

Рис. 1

2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$.

В этом случае касательная в каждой точке плоскости перпендикулярна направлению прямой, проходящей через эту точку и начало координат, так как угловые коэффициенты этих прямых удовлетворяют условию ортогональности:

$-\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}=-1.$

Поэтому направление касательной в данной точке совпадает с направлением касательной к окружности с центром в начале координат, на которой лежит выбранная точка. Такие окружности и являются интегральными кривыми данного уравнения (рис. 2).

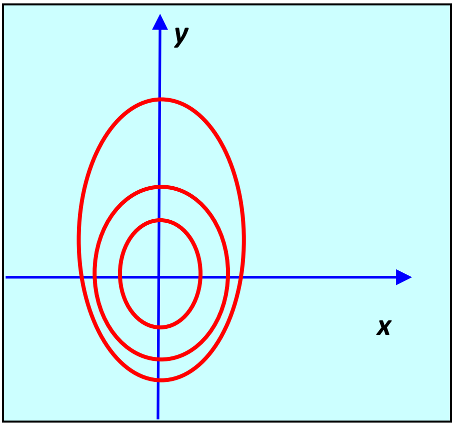

Рис. 2

Часто для построения интегральных кривых удобно предварительно найти геометрическое место точек, в которых касательные к искомым интегральным кривым сохраняют постоянное направление. Такие линии называются **изоклинами**.

Пример. Изоклины уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}$

задаются уравнениями $\sqrt{x^2 + y^2} = k \quad или \quad x^2 + y^2 = k^2$, так как на каждой изоклине производная $\frac{dy}{dx}$ должна сохранять постоянное значение. Полученные уравнения задают семейство концентрических окружностей с центром в начале координат, а угловой коэффициент касательной к интегральной кривой равен радиусу проходящей через данную точку окружности.

1.3. Задача Коши для уравнения первого порядка

Как уже было сказано, общим решением уравнения (2) является все множество функций, обращающих при подстановке рассматриваемое уравнение в тождество. Пусть теперь требуется найти решение этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0, \qquad (3)$$

называемому **начальным условием**. Если общее решение уравнения (2) задается формулой

$$y = \varphi(x, C), \qquad (4)$$

то значение постоянной C, соответствующее поставленному начальному условию, можно определить, подставив в равенство (4) $x = x_0$ и $y = y_0$. Задача выбора из общего решения (4) уравнения (2) решения, удовлетворяющего начальному условию (3), называется **задачей Коши**, а выбранное решение называется **частным решением** уравнения (2).

Замечание. Если воспринимать множество всех решений уравнения (2) как множество интегральных кривых на плоскости, то ставится задача поиска той из них, которая проходит через точку с координатами (x_0 , y_0). Выясним, при каких условиях такая кривая существует и является единственной.

1.4 Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Рассмотрим предварительно метод приближенного решения дифференциальных уравнений, обоснование которого будет дано в приведенной ниже теореме.

Метод Эйлера

Метод Эйлера заключается в том, что искомая интегральная кривая уравнения (2), проходящая через точку (x_0 , y_0), заменяется ломаной, каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек (рис. 3).

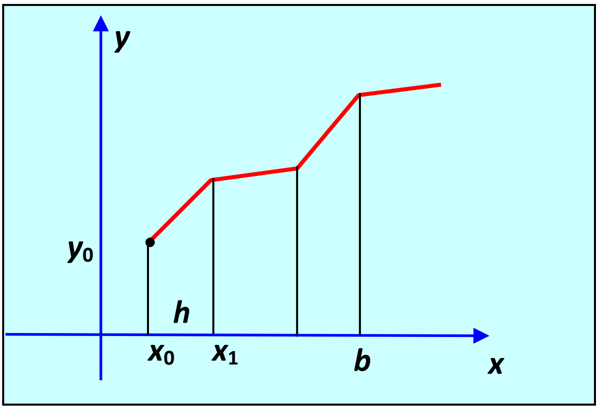

Рис. 3

Пусть требуется найти приближенное значение искомого решения при $x = b$. Разделим отрезок $[x_0, b]$ на n равных частей (полагаем, что $b>x_0$) и назовем шагом вычисления h длину отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Заменим на отрезке $[x_0, x_1]$ интегральную кривую отрезком ее касательной в точке (x_0, y_0). Ордината этого отрезка при $x = x_1$ равна $y_1 = y_0 + hy_0'$, где $y_0' = f(x_0, y_0)$. Так же найдем

$$y_2 = y_1 + hy_1', \quad где \quad y_1' = f(x_1, y_1);$$

$$y_3 = y_2 + hy_2', \quad где \quad y_2' = f(x_2, y_2);$$

....

$$y_n = y_{n-1} + hy_{n-1}', \quad где \quad y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Можно предположить, что при $h \to 0$ построенные таким образом **ломаные Эйлера** приближаются к графику искомой кривой. Доказательство этого утверждения будет дано в следующей теореме:

Теорема 1 (теорема существования и единственности решения). Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

функция $f(x,y)$ непрерывна в прямоугольнике D:

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b \qquad (5)$$

и удовлетворяет в D **условию Липшица**:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N |y_1 - y_2|, \qquad (6)$$

где N – постоянная, то существует единственное решение

$$y = \bar{y}(x), \quad x_0 - H \le x \le x_0 + H,$$

уравнения (2), удовлетворяющее условию (3) , где

$$H < \min(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}), \quad M = \max f(x,y) \quad в \quad D.$$

Замечание 1. Нельзя утверждать, что искомое решение будет существовать при $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$, так как интегральная кривая может выйти из прямоугольника (5), и тогда решение может быть не определено.

Замечание 2. Условие Липшица (6) можно заменить более сильным требованием

$$|f'_y(x,y)| \leq N \quad в \quad D.$$

Тогда по теореме Лагранжа

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = f'_y(x,\xi)\,|y_1 - y_2|, \quad где \quad y_1 \leq \xi \leq y_2.$$

Таким образом,

$$\xi \in D \quad и \quad |f'_y(x,\xi)| \leq N.$$

Поэтому

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq N\,|y_1 - y_2|.$$

Доказательство теоремы 1. Заменим уравнение (2) с начальным условием (3) эквивалентным интегральным уравнением

$$y = y_0 + \int_{x_o}^{x} f(x,y)dx. \qquad (7)$$

Легко проверить, что функция, обращающая в тождествоуравнение (2), будет решением и уравнения (7).

Построим ломаную Эйлера $y = y_n(x)$, исходящую из точки (x_0, y_0) с шагом $h_n = \dfrac{H}{n}$ на отрезке $[x_0,\ x_0 + H]$ (аналогично можно доказать существование решения на $[x_0 - H,\ x_0]$). Такая ломаная не может выйти за пределы D, так как угловые коэффициенты каждого ее звена по модулю меньше M. Теперь докажем последовательно три утверждения:

1) Последовательность $y = y_n(x)$ равномерно сходится.
2) Функция

$$\overline{y}(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

является решением интегрального уравнения (7).
3) Решение $\overline{y}(x)$ уравнения (7) единственно.

Доказательство **1)**. По определению ломаной Эйлера

$$y_n'(x) = f(x_k, y_k) \quad при \quad x_k \le x \le x_{k+1}, k = 0,1,\dots,n-1,$$

или

$$y_n'(x) = f(x, y_n(x)) + (f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)). \qquad (8)$$

Обозначим

$$f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x)) = \eta_n(x),$$

тогда в силу равномерной непрерывности $f(x)$ в D

$$|\eta_n(x)| = |f(x_k, y_k) - f(x, y_n(x))| < \varepsilon_n \qquad (9)$$

при $n > N(\varepsilon_n)$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как

$$|x - x_k| \le h_n, \quad a \quad |y_k - y_n(x)| < Mh_n,$$
$$и \quad h_n = \frac{H}{n} \to 0 \quad при \quad n \to \infty.$$

Интегрируя (8) по x в пределах от x_0 до x и учитывая, что $y_n(x_0) = y_0$, получим:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt. \qquad (10)$$

Так как n – любое целое положительное число, то для любого $m > 0$

$$y_{n+m}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n+m}(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt,$$

откуда

$$|y_{n+m}(x) - y_n(x)| =$$
$$= \left| \int_{x_0}^{x} (f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t))dt + \int_{x_0}^{x} \eta_{n+m}(t)dt - \int_{x_0}^{x} \eta_n(t)dt \right| \le$$

$$\le \int_{x_0}^{x} | f(t, y_{n+m}(t)) - f(t, y_n(t)) | dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_{n+m}(t)| dt + \int_{x_0}^{x} |\eta_n(t)| dt.$$

Тогда из (9) и условия Липшица следует, что

$$|y_{n+m}(x)-y_n(x)|\le N\int_{x_0}^{x}|y_{n+m}(t)-y_n(t)|\,dt+(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n)H.$$

Следовательно,

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_{n+m}(x)-y_n(x)|\le$$

$$\le N\max\int_{x_0}^{x}|y_{n+m}(t)-y_n(t)|\,dt+(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n)H,$$

откуда

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}|y_{n+m}(x)-y_n(x)|\le\frac{(\varepsilon_{n+m}+\varepsilon_n)H}{1-NH}<\varepsilon$$
$$\forall\varepsilon>0\quad при\quad n>N_1(\varepsilon),$$

то есть последовательность непрерывных функций $y_n(x)$ равномерно сходится при $x_0\le x\le x_0+H$ к непрерывной функции $\overline{y}(x)$. Итак, утверждение 1) доказано.

Доказательство 2). Перейдем в (10) к пределу при $n\to\infty$:

$$\lim_{n\to\infty}y_n(x)=\overline{y}(x)=y_0+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}f(t,y_n(t))dt+\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x}\eta_n(t)dt.\quad(11)$$

В силу равномерной сходимости $y_n(x)$ к $\overline{y}(x)$ и равномерной непрерывности $f(x,y)$ в D

последовательность $f(x, y_n(x))$ равномерно сходится к $f(x, \overline{y}(x))$. Действительно,

$$|f(x,\overline{y}(x)) - f(x,y_n(x)| < \varepsilon \quad при \quad |\overline{y}(x) - y_n(x)| < \delta(\varepsilon),$$

что выполняется при $\quad n > N_1(\delta(\varepsilon)) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + H].$

Следовательно, возможен переход к пределу под знаком интеграла. Учитывая, что

$$|\eta_n(\varepsilon)| < \varepsilon_n, \quad где \quad \varepsilon_n \to 0 \quad при \quad n \to \infty,$$

получим из (11):

$$\overline{y}(x) = y_0 + \int_{x_o}^{x} f(x, \overline{y}(x))dx,$$

то есть $\overline{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (7). Утверждение 2) доказано.

Доказательство 3). Предположим, что существуют два различных решения уравнения (7): $y_1(x)$ и $y_2(x)$, то есть

$$\max_{x_0 \le x \le x_0 + H} |y_1(x) - y_2(x)| \ne 0.$$

Тогда, подставляя эти функции в (7) и вычитая полученные равенства друг из друга, получим:

$$y_1(x) - y_2(x) \equiv \int_{x_0}^{x} (f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)))dx,$$

откуда

$$\max_{x_0 \le x \le x_0+H} \left| y_1(x) - y_2(x) \right| =$$

$$= \max_{x_0 \le x \le x_0+H} \left| \int_{x_0}^{x} (f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)))dx \right| \le$$

$$\le \max_{x_0 \le x \le x_0+H} \left| \int_{x_0}^{x} | f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)) | \, dx \right|.$$

Применим к этому неравенству условие Липшица:

$$\max_{x_0 \le x \le x_0+H} | y_1(x) - y_2(x) | \le$$

$$\le N \max_{x_0 \le x \le x_0+H} \left| \int_{x_0}^{x} | y_1(x) - y_2(x) | \, dx \right| \le$$

$$\le N \max_{x_0 \le x \le x_0+H} | y_1(x) - y_2(x) | \cdot \max_{x_0 \le x \le x_0+H} \left| \int_{x_0}^{x} dx \right| =$$

$$= NH \max_{x_0 \le x \le x_0+H} | y_1(x) - y_2(x) |.$$

Если

$$\max_{x_0 \le x \le x_0+H} \left| y_1(x) - y_2(x) \right| \ne 0,$$

то полученное равенство:

$$\max_{x_0 \le x \le x_0+H} | y_1(x) - y_2(x) | \le NH \max_{x_0 \le x \le x_0+H} | y_1(x) - y_2(x) |$$

противоречиво, так как по условию теоремы $H<1/N$. Следовательно,

$$\max_{x_0\le x\le x_0+H}\left|y_1(x)-y_2(x)\right|=0,\quad \textit{то}\quad \textit{есть}\quad y_2\equiv y_1.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Найти общее решение уравнения $y'''=x$.

Указание

Найдите *y*'': $y''=\int y'''dx+C_1$ *и т.д.*

Решение

$$y''=\int y'''dx=\int xdx=\frac{x^2}{2}+C_1;$$

$$y'=\int y''dx=\int\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)dx=\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2;$$

$$y=\int y'dx=\int\left(\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\right)dx=\frac{x^4}{24}+\frac{C_1}{2}x^2+C_2x+C_3=$$

$$=\frac{x^4}{24}+\tilde{C}_1x^2+C_2x+C_3.$$

Ответ: $y=\dfrac{x^4}{24}+C_1x^2+C_2x+C_3.$

Задача 2. Решить задачу Коши: $y' = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad y(0) = 2.$

Указание

Найдите общее решение уравнения: $y = \int y' dx + C,$

а затем определите C из условия $y(0) = 2$.

Решение

Общее решение уравнения: $y = \int \dfrac{1}{x^2+1} dx = arctgx + C;$

$$2 = arctg0 + C \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y_{частн} = arctgx + 2.$$

Ответ: $y = arctgx + 2.$

Задача 3. Найдите интегральную кривую уравнения
$yy' = x + 5,$

проходящую через точку (1;-5).

Указание

Запишите левую часть уравнения в виде $\left(y^2/2\right)'$.

Решение

$$\left(\frac{y^2}{2}\right)' = x + 5, \quad \frac{y^2}{2} = \int (x+5) dx = \frac{x^2}{2} + 5x + C,$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 + 10x + 2C}; \quad -5 = -\sqrt{x^2 + 10x + 2C};$$

$$2C + 11 = 25, \quad C = 7, \quad y = -\sqrt{x^2 + 10x + 14}.$$

Ответ: $y = -\sqrt{x^2 + 10x + 14}.$

Задача 4. Изоклинами уравнения $y' = 1 + xy$ являются

Указание

Уравнение изоклин имеет вид: $1 + xy = C$.

Решение

Уравнение изоклин имеет вид:

$$1 + xy = C \Rightarrow xy = C - 1, \quad y = \frac{C-1}{x} \quad -\ \text{гиперболы.}$$

Ответ: гиперболы.

1.5. Методы решения простейших дифференциальных уравнений первого порядка (с разделяющимися переменными, однородных, линейных и сводящихся к ним).

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \qquad (1)$$

называются **уравнениями с разделяющимися переменными**. Тогда любое решение $y(x)$ этого уравнения будет удовлетворять и уравнению

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + c, \qquad (2)$$

где c – произвольная постоянная. Если удается найти первообразные функций $f_1(x)$ и $f_2(y)$, выраженные в элементарных функциях, то из (2) можно получить конечное уравнение

$$\Phi(x, y) = C, \qquad (3)$$

которое определяет решение $y(x)$ уравнения (1) как неявную функцию x.

Уравнение вида (3) называется **интегралом** уравнения (1), а если оно определяет все решения (1) – **общим интегралом** этого уравнения.

Пример 1. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy.$

Приведем уравнение к виду (1):

$$\frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \frac{dx}{x}, \quad \textit{откуда} \quad \int \frac{ydy}{\sqrt{y^2+1}} = \int \frac{dx}{x} + C.$$

Проинтегрируем обе части равенства:

$$\sqrt{y^2+1} = \ln|x| + C.$$

Полученное уравнение можно считать общим интегралом или решением исходного уравнения.

Если требуется найти **частное решение** уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, достаточно подставить значения x_0 и y_0 в уравнение (3) и найти значение C, соответствующее начальному условию.

Пример 2. Найти решение уравнения $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$, удовлетворяющее условию $y(0)=-1$.

Разделим переменные: $\int \frac{dy}{2-y} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} + c$,

$$-\ln|2-y| = -\ln|\cos x| - \ln|c|, \quad 2-y = c\cdot\cos x.$$

Подставив в это равенство $x=0$ и $y=-1$, получим, что $c=3$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид: $y = 2 - 3cosx$.

1.6. Уравнения, приводимые к уравнениям с разделяющимися переменными

Если требуется решить уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax+by), \qquad (4)$$

где a и b – постоянные числа, то с помощью замены переменной $z = ax+by$ оно сводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dz}{dx} = a + bf(z), \quad \frac{dz}{a+bf(z)} = dx.$$

Пример 3. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$.

Замена: $z = 4x + 2y - 1$, тогда

$$\int \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = \int dx + c.$$

Вычислим интеграл в левой части равенства: замена

$$u = \sqrt{z}, z = u^2, \quad dz = 2udu$$

приводит к

$$\int \frac{2udu}{4 + 2u} = \int \left(1 - \frac{4}{4 + 2u}\right) du = u - 2\ln|4 + 2u| =$$

$$= \sqrt{z} - 2\ln(4 + 2\sqrt{z}) = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(4 + 2\sqrt{4x + 2y - 1}.$$

Проинтегрировав теперь правую часть равенства, получим общий интеграл:

$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln(4 + 2\sqrt{4x + 2y - 1} = x + c.$$

1.7. Однородные уравнения

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые **однородные дифференциальные уравнения первого порядка**, имеющие вид:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (5)$$

Действительно, замена $t = \dfrac{y}{x}$ или $y = x \cdot t$ приводит к

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dt}{dx} + t, \quad x\frac{dt}{dx} + t = f(t),$$

$$\frac{dt}{f(t)-t}=\frac{dx}{x}, \quad \int\frac{dt}{f(t)-t}=\ln|x|+\ln c, \quad x=ce^{\int\frac{dt}{f(t)-t}}.$$

Еще одной формой однородного уравнения является уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0, \qquad (6)$$

если $M(x,y)$ и $N(x,y)$ – однородные функции одинаковой степени однородности k: $M(tx,\mathrm{t}y)=t^k\cdot M(x,y)$, $N(tx,\mathrm{t}y)=t^k\cdot N(x,y)$. При этом

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}=f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 4. $y^2+x^2y'=xyy'$. Преобразуем уравнение к виду (5):

$$y'(xy-x^2)=y^2, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{(y/x)^2}{\frac{y}{x}-1}.$$

После замены $y=xt$ получим:

$$x\frac{dt}{dx}+t=\frac{t^2}{t-1}, \quad x\frac{dt}{dx}=\frac{t}{t-1}, \quad \frac{(t-1)dt}{t}=\frac{dx}{x},$$

$$\int\left(1-\frac{1}{t}dt\right)=\int\frac{dx}{x}+c, \quad t-\ln|t|=\ln|x|+\ln|C|,$$

$$Cxt=e^t, \quad Cy=e^{\frac{y}{x}}.$$

В однородные можно преобразовать и уравнения вида

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right) \qquad (7)$$

с помощью замены $X = x - x_1$, $Y = y - y_1$, где (x_1, y_1) – решение системы уравнений

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

(С геометрической точки зрения производится перенос начала координат в точку пересечения прямых $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$). Тогда, поскольку $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$, в новых переменных уравнение примет вид:

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) \quad или \quad \frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right) \quad -$$

однородное уравнение.

Пример 5. $(y+2)dx = (2x + y - 4)dy$. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2}{2x+y-4}.$$

Решением системы $y + 2 = 0,\ 2x + y - 4 = 0$ будут $x_1 = 3,\ y_1 = -2$. В новых переменных $X = x - 3,\ Y = y + 2$ получим однородное уравнение

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y}{2X+Y},$$

которое можно решить с помощью обычной замены $Y = Xt$. Тогда

$$X\frac{dt}{dX}+t=\frac{t}{2+t}, \quad -X\frac{dt}{dX}=\frac{t^2+t}{t+2},$$

$$\frac{(t+2)dt}{t(t+1)}=-\frac{dX}{X}, \quad \int\left(-\frac{1}{t+1}+\frac{2}{t}\right)dt=-\int\frac{dX}{X}+c,$$

$$\ln\left|\frac{t^2}{t+1}\right|=-\ln|X|+\ln|C|,$$

и после обратной замены общий интеграл выглядит так:

$$(y+2)^2=C(x+y-1).$$

Заметим, в это общее решение входит при C=0 и частное решение $y=1-x$, которое могло быть потеряно при делении на $y+x-1$.

1.8. Линейные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x), \qquad (8)$$

линейное относительно неизвестной функции $y(x)$ и ее производной. При этом будем предполагать, что $p(x)$ и $f(x)$ непрерывны.

В случае, когда $f(x)=0$, уравнение (8) называется **однородным**. Такое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0, \quad \textit{откуда} \quad \frac{dy}{y}=-p(x)dx,$$

$$\ln|y|=-\int p(x)dx+\ln c,$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx} \qquad (9)$$

При делении на y могло быть потеряно решение $y = 0$, но оно входит в общее решение при $C = 0$.

Для решения неоднородного уравнения (8) применим **метод вариации постоянной**. Предположим, что общее решение уравнения (8) имеет форму (9), в которой C – не постоянная, а неизвестная функция аргумента x:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставив эти выражения в уравнение (8), получим:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - C(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

откуда

$$\frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx}, \quad C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx}dx + c,$$
$$y = ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int f(x)e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (10)$$

Замечание. При решении конкретных задач удобнее не использовать в готовом виде формулу (10), а проводить все указанные преобразования последовательно.

Пример 6.

Найдем общее решение уравнения $y' = 2x(x^2 + y)$. Представим уравнение в виде $y' - 2xy = 2x^3$ и решим соответствующее однородное уравнение $y' - 2xy = 0$.

$$\frac{dy}{dx}=2xy, \quad \frac{dy}{y}=2xdx, \quad \int\frac{dy}{y}=\int 2xdx+C_1,$$

$$\ln|y|=x^2\ln|C|, \quad y=Ce^{x^2}.$$

Применим метод вариации постоянных: пусть решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y=C(x)e^{x^2}, \quad \text{тогда} \quad \frac{dy}{dx}=C'e^{x^2}+C(x)e^{x^2}\cdot 2x.$$

Подставим полученные выражения в уравнение:

$$C'e^{x^2}+C(x)e^{x^2}\cdot 2x-2xC(x)e^{x^2}=2x^3.$$

Следовательно,

$$C'=2x^3e^{-x^2},$$

$$C(x)=\int 2x^3e^{-x^2}dx=\int x^2e^{-x^2}dx^2=$$

$$=\int te^{-t}dt=-te^{-t}+\int e^{-t}dt=$$

$$=-te^{-t}-e^{-t}+c=-x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+c.$$

При этом общее решение исходного уравнения

$$y=(-x^2e^{-x^2}-e^{-x^2}+c)e^{x^2}=ce^{x^2}-x^2-1.$$

К линейным уравнениям можно свести с помощью замены некоторые другие дифференциальные уравнения, например, **уравнение Бернулли**:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=f(x)y^n, \quad n\neq 1. \qquad (11)$$

Разделив на y^n, получим:

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=f(x),$$

а замена

$$z = y^{-n}, \quad \frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

приводит к линейному уравнению относительно z:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Пример 7.

$$y' = y^4 \cos x + y \cdot tgx, \quad y' - y \cdot tgx = y^4 \cos x,$$

$$y^{-4}y' - y^{-3}tgx = \cos x.$$

Сделаем замену: $z = \dfrac{1}{y^3}, \quad \dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{3}{y^4}\dfrac{dy}{dx}.$

Относительноz уравнение стало линейным:

$$-\frac{1}{3}z' - z \cdot tgx = \cos x.$$

Решим однородное уравнение:

$$\frac{dz}{3dx} = -z \cdot tgx, \quad \frac{dz}{z} = \frac{-3\sin x dx}{\cos x}, \quad \ln|z| = 3\ln|\cos x| +$$

$$+\ln C_1, \quad z = C\cos^3 x.$$

Применим метод вариации постоянных:

$$z = C(x)\cos^3 x, \quad \frac{dz}{dx} = C'\cos^3 x - 3C(x)\cos^2 x \sin x.$$

Подставим эти результаты в неоднородное уравнение:

$$-\frac{1}{3}C'\cos^3 x + C(x)\cos^2 x \cdot \sin x - C(x)\cos^3 x \cdot tgx = \cos x,$$

$$C' = -\frac{3}{\cos^2 x}, \quad C(x) = -\int \frac{3dx}{\cos^2 x} = -3tgx + c.$$

Окончательно получаем:

$$y^{-3} = (-3tgx + c)\cos^3 x = c \cdot \cos^3 x - 3\sin x \cdot \cos^2 x.$$

Дополним это общее решение частным решением $y = 0$, потерянным при делении на y^4.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти общее решение уравнения $y' = e^{4x} \cdot y^5$.

Указание

Разделите переменные и приведите уравнение к виду $y^{-5} dy = e^{4x} dx$.

Решение

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{y^5} = e^{4x} dx, \quad \int \frac{dy}{y^5} = \int e^{4x} dx, \quad \frac{y^{-4}}{-4} = \frac{1}{4} e^{4x} - \frac{C}{4},$$

$$e^{4x} + y^{-4} = C.$$

Ответ: $e^{4x} + y^{-4} = C$.

Задача 2. Решить задачу Коши:

$(2x + 2y - 1)dx + (x + y - 2)dy = 0, \quad y(-1) = 2.$

Указание

Сделайте замену: $t = x + y$.

Решение

Обратим внимание на то, что коэффициенты при x и y в выражениях $2x + 2y - 1$ и $x + y - 2$ пропорциональны. Поэтому можно ввести новую неизвестную функцию, относительно которой исходное уравнение станет уравнением с разделяющимися переменными: $t = x + y$. Тогда $dy = d(t - x) = dt - dx$,

и уравнение примет вид:

$(2t-1)dx + (t-2)(dt - dx) = 0,\ (t-2)dt = -(t+1)dx,$

$$\frac{(t-2)dt}{t+1} = -dx, \quad \int\left(1 - \frac{3}{t+1}\right)dt = -\int dx,$$

$$t - 3\ln|t+1| = -x - \ln|C|, \quad (t+1)^3 = Ce^{x+t},$$

$$(x+y+1)^3 = Ce^{2x+y}.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y(-1) = 2 \Rightarrow (-1+2+1)^3 = Ce^{-2+2}, \quad 8 = Ce^0, \quad C = 8,$$

$(x+y+1)^3 = 8e^{2x+y}$ – искомое частное решение.

Ответ: $(x+y+1)^3 = 8e^{2x+y}$.

Задача 3. Найти общее решение уравнения

$y' = \dfrac{y}{x} + 2\dfrac{x^2 + y^2}{x^2}$.

Указание

Сделайте замену $t = \dfrac{y}{x}$.

Решение

Сделаем стандартную замену, применяемую при решении однородных уравнений:

$$t = \frac{y}{x}, \quad y = tx, \quad y' = t'x + t.$$

Тогда уравнение примет вид:

$$t'x + t = t + 2(1+t^2), \quad \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{2dx}{x}, \quad \operatorname{arctg} t = 2\ln|x| + \ln|C|,$$

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln(Cx^2), \quad y = x \cdot \operatorname{tg}\left(\ln(Cx^2)\right).$$

Ответ: $y = x \cdot \operatorname{tg}\left(\ln(Cx^2)\right)$.

Задача 4. Решить задачу Коши:

$$(12x + 5y - 9)dx + (5x + 2y - 3)dy = 0, \quad y(0) = 3.$$

Указание

Сделайте замену: $\bar{x} = x - x_0, \quad \bar{y} = y - y_0,$

где $\left(x_0, y_0\right)$ – решение системы $\begin{cases} 12x + 5y - 9 = 0, \\ 5x + 2y - 3 = 0. \end{cases}$

Решение

Решим систему $\begin{cases} 12x+5y-9=0 \\ 5x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x_0=-3, \quad y_0=9,$

и перейдем к новым переменным: $\overline{x}=x+3, \quad \overline{y}=y-9.$

При этом $d\overline{x}=dx, \quad d\overline{y}=dy,$

и уравнение становится однородным:

$$(12\overline{x}+5\overline{y})d\overline{x}+(5\overline{x}+2\overline{y})d\overline{y}=0,$$

$$\frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}=-\frac{12\overline{x}+5\overline{y}}{5\overline{x}+2\overline{y}}=-\frac{12+5\dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}}{5+2\dfrac{\overline{y}}{\overline{x}}}, \quad t=\frac{\overline{y}}{\overline{x}},$$

$$t'\overline{x}+t=-\frac{12+5t}{5+2t}, \quad t'\overline{x}=-\frac{2t^2+10t+12}{5+2t},$$

$$-\int\frac{(5+2t)dt}{t^2+5t+6}=2\int\frac{d\overline{x}}{\overline{x}}, \quad -\int\frac{d(t^2+5t+6)}{t^2+5t+6}=2\int\frac{d\overline{x}}{\overline{x}},$$

$$-\ln|t^2+5t+6|=2\ln|\overline{x}|-\ln|C|,$$

$$\overline{x}^2(t^2+5t+6)=C, \quad \overline{x}^2\left(\frac{\overline{y}^2}{\overline{x}^2}+5\frac{\overline{y}}{\overline{x}}+6\right)=C,$$

$$\overline{y}^2+5\overline{xy}+6\overline{x}^2=C,$$

$$(y-9)^2+5(x+3)(y-9)+6(x+3)^2=C,$$

$$6x^2+5xy+y^2-9x-3y=C.$$

Найдем частное решение:

$$y(0)=3, \quad 9-9=C, \quad C=0,$$
$$6x^2+5xy+y^2-9x-3y=0.$$

Ответ: $6x^2+5xy+y^2-9x-3y=0.$

Задача 5. Найти общее решение уравнения
$y'=8xy+4e^{4x^2}\sin 2x.$

Указание

Найдите решение однородного уравнения $y'=8xy,$

а затем примените метод вариации постоянных.

Решение

Найдем решение однородного уравнения:

$$y'=8xy, \quad \int\frac{dy}{y}=\int 8xdx, \quad \ln|y|=4x^2+\ln|C|,$$
$$y_{одн}=Ce^{4x^2}.$$

Применим метод вариации постоянных:

$$y_{неодн}=C(x)e^{4x^2}, \quad y'=C'e^{4x^2}+8Cxe^{4x^2},$$
$$C'e^{4x^2}+8Cxe^{4x^2}=8xCe^{4x^2}+4e^{4x^2}\sin 2x,$$
$$C'=4\sin 2x, \quad C=4\int\sin 2xdx=-2\cos 2x+\bar{C};$$
$$y=e^{4x^2}(C-2\cos 2x).$$

Ответ: $y = e^{4x^2}(C - 2\cos 2x)$.

Задача 6. Решить задачу Коши:
$y' - \dfrac{3y}{x} + x^3 y^2 = 0, \quad y(1) = 7.$

Указание

Сделав замену $z = 1/y$, вы получите линейное уравнение для z.

Решение

Разделим обе части равенства на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{3}{x}\cdot\frac{1}{y} + x^3 = 0, \quad -\frac{y'}{y^2} + \frac{3}{x}\cdot\frac{1}{y} = x^3.$$

$$z = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2}y' \Rightarrow z' + \frac{3z}{x} = x^3 \quad -$$

линейное уравнение. Найдем решение однородного уравнения:

$$z' + \frac{3z}{x} = 0, \quad \int\frac{dz}{z} = -3\int\frac{dx}{x},$$

$$\ln|z| = -3\ln|x| + \ln|C|, \quad z_{одн} = \frac{C}{x^3}.$$

Применим метод вариации постоянных:

$$z_{неодн} = \frac{C(x)}{x^3}, \quad z' = C'x^{-3} - 3Cx^{-4} = \frac{C'x - 3C}{x^4},$$

$$\frac{C'x - 3C}{x^4} + \frac{3C}{x^4} = x^3, \quad C' = x^6, \quad C = \frac{x^7}{7} + \frac{\bar{C}}{7},$$

$$z = \frac{x^7 + C}{7x^3}, \quad y = \frac{7x^3}{x^7 + C}.$$

Найдем частное решение:

$$y(1) = 7, \quad \frac{7}{C+1} = 7, \quad C = 0, \quad y = \frac{7}{x^4}.$$

Ответ: $y = \frac{7}{x^4}$.

2. Дифференциальные уравнения высших порядков. Системы линейных дифференциальных уравнений

2.1. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Понятие о краевых задачах для дифференциальных уравнений. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка:

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \quad (1)$$

где F предполагается непрерывной функцией всех своих аргументов. Тогда по теореме осуществовании неявной функции можно разрешить это уравнение относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}\right) \quad (2)$$

и сформулируем для него (без доказательства) теорему существования и единственности решения:

Теорема 1. Существует единственное решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \ \ldots, \ \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (3)$$

если в окрестности начальных значений (x_0 , y_0 , y'_0 **,…,** $y_0^{(n-1)}$) функция f является непрерывной функцией всех своих аргументов и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго.

Замечание 1. Так же, как и для дифференциального уравнения 1-го порядка, задача отыскания решения уравнения (2), удовлетворяющего условиям (3), называется **задачей Коши**.

Замечание 2. Теорема 1 утверждает существование частного решения уравнения (2), удовлетворяющего данным начальным условиям. С геометрической точки зрения это соответствует существованию интегральной кривой, проходящей через точку $\left(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$. Но, используя эту теорему, можно доказать и существование **общего решения** уравнения (2), содержащего n произвольных постоянных и имеющего вид:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \quad (4)$$

или, в неявной форме:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) будем называть **общим интегралом** уравнения (1) или (2).

2.2. Уравнения, допускающие понижение порядка

В некоторых случаях порядок дифференциального уравнения может быть понижен, что обычно облегчает его интегрирование. Рассмотрим несколько типов подобных уравнений.

1. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных по порядок (k – 1) включительно:

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (6)$$

В этом случае можно сделать замену $p = y^{(k)}$, которая позволяет понизить порядок уравнения до $n - k$, так как после замены уравнение примет вид

$$F(x, p, p', \ldots, p^{(n-k)}) = 0.$$

Из этого уравнения можно найти $p = p\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$, а затем найти y с помощью интегрирования k раз функции $p = p\,(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-k})$.

Пример 1.Уравнение

$$y''' = y''^2$$

при замене

$$p(x) = y''$$

становится уравнением первого порядка относительно p:

$$p' = p^2, \quad \textit{откуда} \quad \frac{dp}{p^2} = dx,$$

$$-\frac{1}{p} = x + C_1, \quad p = -\frac{1}{x + C_1}.$$

Тогда

$$y' = \int p(x)dx = -\int \frac{dx}{x + C_1} = -\ln(x + C_1) + C_2,$$

$$y = \int y'dx = -\int (\ln(x + C_1) - C_2)dx =$$

$$= -\int \ln(x + C_1)dx + C_2 x + C_3 =$$

$$= -x\ln(x + C_1) + \int \frac{x}{x + C_1}dx + C_2 x + C_3 =$$

$$= -x\ln(x + C_1) + x - C_1\ln(x + C_1) + C_2 x + C_3 =$$

$$= C_3 + \bar{C}_2 x - (x + C_1)\ln(x + C_1).$$

2. Уравнение не содержит независимой переменной:

$$F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0. \quad (7)$$

Порядок такого уравнения можно понизить на единицу заменой $y' = p(y)$. При этом производные функции $f(x)$ по аргументу x нужно выразить через производные p по y:

$$\frac{dy}{dx}=p(x),\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\cdot p' \quad и\, т.\partial.$$

Пример 2. Уравнение $y''=2yy'$.

Пусть $y'=p(y), \quad y''=p\cdot p', \quad тогда \quad pp'=2yp.$

Отметим частное решение p = 0, то есть $y'=0, \quad y=C.$ Если $p\neq 0,$ после сокращения на p получим

$$\int dp=\int 2ydy,$$

$$p=y^2+C_1,\int\frac{dy}{y^2+C_1}=\int dx,\frac{1}{C_1}arctg\frac{y}{C_1}=$$

$$=x+C_2,y=C_1tg(C_1x+\bar{C}_2).$$

3. Уравнение $F\,(x, y, y',..., y^{(n)})=0$ однородно относительно аргументов $y, y',..., y^{(n)}$, то есть справедливо тождество

$$F(x,ky,ky',ky'',...,ky^{(n)})=k^pF(x,y,y',y'',...,y^{(n)}).$$

В этом случае можно понизить порядок уравнения на единицу, вводя новую неизвестную функцию z, для которой $y=e^{\int zdx}$. Тогда

$$y'=e^{\int zdx}z, \quad y''=e^{\int zdx}(z^2+z') \quad и\, т.\partial.$$

Примеры решения задач

Задача 1. Найти общее решение уравнения $y'''\sin^4 x=\sin 2x.$

Указание

Используйте то, что $y''=\int y'''dx \quad и\, т.\partial.$

Решение

$$y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x}, \quad y'' = \int y''' dx = \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x} dx =$$

$$= \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{d(\sin^2 x)}{(\sin^2 x)^2} = C_1 - \frac{1}{\sin^2 x};$$

$$y' = \int y'' dx = \int \left(C_1 - \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = C_1 x + ctgx + C_2;$$

$$y = \int y' dx = \int \left(C_1 x + ctgx + C_2 \right) dx =$$

$$= \frac{C_1}{2} x^2 + \ln|\sin x| + C_2 x + C_3 =$$

$$= \ln|\sin x| + \tilde{C}_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \ln|\sin x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$

Задача 2. Найти общее решение уравнения $(1 - x^2) y'' - x y' = 2.$

Указание

Сделайте замену: $y' = p(x), \quad y'' = p'(x).$

Решение

$$y' = p(x), \quad y'' = p'(x);$$

$$(1 - x^2) p' - x p = 2.$$

Однородное уравнение:

$$(1-x^2)p' - xp = 0, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{xdx}{1-x^2},$$

$$\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + \ln|C_1|, \quad p_{одн} = \frac{C_1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$p_{неодн} = \frac{C_1(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad p' = C_1'(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}C_1(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x) =$$

$$= \frac{C_1'(1-x^2) + C_1 x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{C_1'(1-x^2) + C_1 x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{C_1 x}{\sqrt{1-x^2}} = 2;$$

$$C_1' = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad C_1 = \int \frac{2dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2\arcsin x + \overline{C}_1.$$

$$p = \frac{2\arcsin x + \overline{C}_1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad y' = \frac{2\arcsin x + \overline{C}_1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y = \int \left(\frac{2\arcsin x + \overline{C}_1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx =$$

$$= \arcsin^2 x + 2\overline{C}_1 \arcsin x + C_2 =$$

$$= \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2.$$

Ответ: $y = \arcsin^2 x + C_1 \arcsin x + C_2.$

Задача 3. Найти общее решение уравнения
$2xy'''y'' = y'' - 1.$

Указание

Сделайте замену: $y'' = p(x), \quad y''' = p'(x).$

Решение

$$y'' = p(x), \quad y''' = p'(x);$$

$$2xp'p = p^2 - 1, \quad \int \frac{2pdp}{p^2 - 1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|p^2 - 1| = \ln|x| + \ln|C_1|,$$

$$p = \pm\sqrt{C_1x + 1}, \quad y'' = \pm\sqrt{C_1x + 1};$$

$$y' = \pm\int\sqrt{C_1x + 1}dx = \pm\frac{2}{3C_1}(C_1x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2;$$

$$y = \int\left(\pm\frac{2}{3C_1}(C_1x + 1)^{\frac{3}{2}} + C_2\right)dx = \pm\frac{4}{15C_1^2}(C_1x + 1)^{\frac{5}{2}} + C_2x + C_3.$$

Ответ: $y = \pm\frac{4}{15C_1^2}(C_1x + 1)^{\frac{5}{2}} + C_2x + C_3.$

Задача 4. Решить задачу Коши:

$$yy'' - y'^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

Указание

Сделайте замену: $y' = p(y), \quad y'' = pp'.$

Решение

Сделаем замену: $y' = p(y), \quad y'' = pp'.$

Тогда

$$ypp' - p^2 = 0, \quad \int \frac{dp}{p} = \int \frac{dy}{y}, \quad \ln|p| = \ln|y| + \ln|C|,$$

$$p = Cy, \quad p(0) = 2, \quad y(0) = 1 \Rightarrow 2 = C \cdot 1 \Rightarrow C = 2,$$

$$p = 2y, \quad y' = 2y, \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2dx,$$

$$\ln|y| = 2x + \ln|C|, \quad y = Ce^{2x}, \quad y(0) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = Ce^0, \quad C = 1, \quad y = e^{2x}.$$

Ответ: $y = e^{2x}$.

Список литературы

1. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: учеб. пособие для вузов / В.П. Минорский. – 14-е изд., спр. – М.: Изд-во физ.мат. лит., 2001. – 336 с.
2. Шипачев В.С. Основы высшей математики: учеб. пособие для втузов / В.С. Шипачев. – М.: Высш. шк., 1994. – 479 с.
3. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 295 с.
4. Митягина Н.А. Дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие для вузов / Н.А. Митягина, П.В. Садчиков. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2006. – 19 с.
5. Письменный Л.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. – М.: Айрис Пресс, 2006. – 608 с.
6. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т. 3. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Дрофа, 2003. – 512 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – Т. 2. – М.: Интеграл-Пресс, 2006. – 544 с.
8. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Эдиториал УРСС, 2004. – 472 с.
9. Ибрагимов Н.Х. Практический курс дифференциальных уравнений и математического моделирования. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2007. – 421 с.
10. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: РХД, 2000. – 176 с.

Содержание

Учебно-методическое издание

Бунеев Сергей Сергеевич

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Технический редактор – О. А. Ядыкина
Техническое исполнение – В. М. Гришин

Формат 60 x 84 1/16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 2,8 Уч.-изд.л. 2,7
Тираж 300 экз. Заказ 38

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1