

ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. И.А. БУНИНА



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.В.01.03 Методы оптимизации**

**Направление подготовки:** 44.03.04 Профессиональное обучение (по отраслям)

**Направленность (профиль):** Искусственный интеллект и робототехнические системы

**Квалификация (степень):** *бакалавр*

**Форма обучения:** *очная*

**Институт:** математики, естествознания и техники

**Кафедра:** математики, информатики, физики и методики обучения

	очная форма	очно-заочная форма	заочная форма
Курс	3		
Семестр/триместр	5, 6		

Лекции	22		
Лабораторные занятия			
Практические (семинарские) занятия	38		
Консультации	-		
Форма(ы) промежуточной аттестации	зачёт, зачёт		
Контроль	-		
Иные формы работы	-		
Самостоятельная работа	156		

**Всего часов:** 216

**Трудоёмкость:** 6 зачётных единиц

Разработчик(и) рабочей программы: к.п.н., доцент Р.А. Мельников

## I. ОРГАНИЗАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

**Цель изучения дисциплины:** ознакомить обучающихся с основами современных методов оптимизации.

**Задачи изучения дисциплины:**

- 1) формирование представлений о моделях в математическом программировании;
- 2) изучение основ теории оптимизации и основных методов решения задач математического программирования.

**Место дисциплины в структуре ОПОП:** реализуется в рамках части, формируемой участниками образовательных отношений блока Б1. Дисциплины (модули).

**Планируемые результаты обучения по дисциплине:**

Код компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-9	<b>Знать:</b> – понятийный аппарат экономической науки и базовые принципы функционирования экономики; – цели и механизмы основных видов социальной экономической политики.	<b>Знает:</b> – ключевые понятия и методы решения оптимизационных задач.
	<b>Уметь:</b> – планировать, организовать и проводить мероприятия, обеспечивающие формирование гражданской позиции и предотвращение коррупции в обществе.	<b>Умеет:</b> – составлять вычислительные модели оптимизации при решении задач.
	<b>Владеть:</b> – правилами общественного взаимодействия на основе нетерпимого отношения к коррупции.	<b>Владеет:</b> – основными приёмами отбора материала, связанного с методами оптимизации с учётом взаимосвязи урочной и внеурочной форм обучения.
ПКС-2	<b>Знать:</b> - содержание и методики реализации программ профессионального обучения, среднего профессионального образования, дополнительных профессиональных программ в области искусственного интеллекта и робототехники; - способы выявления интересов обучающихся в осваиваемой области искусственного интеллекта и робототехники.	<b>Знает:</b> – ключевые понятия и методы решения оптимизационных задач, применяемых в робототехнике
	<b>Уметь:</b> - осуществлять отбор учебного содержания для реализации в различных формах обучения образовательных	<b>Умеет:</b> – составлять вычислительные модели оптимизации при решении задач, привлекая искусственный

	<p>программ по искусственным интеллектуальным и робототехническим системам;</p> <p>- разрабатывать учебно-методическое обеспечение реализации образовательных программ по искусственным интеллектуальным и робототехническим системам.</p>	интеллект.
	<p>Владеть:</p> <p>- умениями отбора вариативного содержания с учётом взаимосвязи урочной и внеурочной форм обучения искусственному интеллекту и робототехнике</p> <p>- навыками разработки системы оценки достижения планируемых результатов и освоения дополнительных профессиональных программ в области искусственного интеллекта и робототехники.</p>	<p>Владеет:</p> <p>- умениями отбора содержания, связанного с оптимизацией процессов, с учётом взаимосвязи урочной и внеурочной форм обучения искусственному интеллекту и робототехнике</p>

## II. СОДЕРЖАНИЕ И ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

с указанием количества часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по видам учебных занятий) и на самостоятельную работу

### Очная форма обучения

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего	Аудиторные занятия			Сам. раб.
			ЛК	ПЗ	ЛБ	
	<b>Раздел 1. Линейное программирование</b>	<b>144</b>	<b>16</b>	<b>32</b>		<b>96</b>
1.	Тема 1. Введение	10	2	2		6
2.	Тема 2. Графический метод решения задачи линейного программирования	26	2	6		18
3.	Тема 3. Симплекс-метод	32	4	8		20
4.	Тема 4. Двойственность в линейном программировании	22	2	4		16
5.	Тема 5. Целочисленное программирование	22	2	4		16
6.	Тема 6. Методы решения транспортных задач	32	4	8		20
	<i>Форма отчетности</i>	<i>зачёт</i>				
	<i>Итого за 5 семестр</i>		<i>16</i>	<i>32</i>		<i>96</i>
	<b>Раздел 2. Методы</b>	<b>72</b>	<b>6</b>	<b>6</b>		<b>60</b>

	<b>одномерной и многомерной оптимизации</b>					
7.	Тема 7. Минимизация функций одной переменной. Безусловная оптимизация.	24	2	2		20
8.	Тема 8. Оптимизация функций нескольких переменных. Матрица Гессе.	24	2	2		20
9.	Тема 9. Задачи условной оптимизации. Задачи с ограничениями в виде равенств. Условная оптимизация. Метод множителей Лагранжа.	24	2	2		20
	<i>Форма отчётности</i>	<i>зачёт</i>				
	<i>Итого за 6 семестр</i>		6	6		60
	<b>ИТОГО:</b>		<b>22</b>	<b>38</b>		<b>156</b>

**Очно-заочная форма обучения** (не реализуется)

**Заочная форма обучения** (не реализуется)

### **III. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕЙ И ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Текущая аттестация проводится в форме контрольной работы и теста.

**Типовой вариант контрольной работы**

**5 семестр**

1. Решить графическим методом задачу линейного программирования

$$f_{\min} = x_1 - 2x_2 \text{ при } \begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 0, \\ 2x_1 + x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 1, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

2. Симплекс- методом решить задачу линейного программирования

$$f_{\max} = x_1 + x_2 \text{ при } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ -4x_1 + 7x_2 + x_4 = 4, \\ 5x_1 - 6x_2 + x_5 = 6, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

3. Составить и решить двойственную задачу. Сделать вывод о решении исходной задачи

$$f_{\max} = 3x_1 + 3x_2 \text{ при } \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 \geq -2, \\ x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

### 6 семестр

- Исследовать градиентным методом на экстремум функцию  $f(x) = (x^2 + 3)^3$ .
- Найти методом перебора минимальное значение  $f^*$  и точку минимума  $x^*$  функции  $f(x) = \sqrt{1+x^2} + e^{-2x}$  на отрезке  $[0; 1]$ . Точку  $x^*$  найти с погрешностью  $\varepsilon = 0,1$ .

### Примерные варианты тестов

#### Раздел 1.

**№ 1.** В задаче об оптимальном распределении ресурсов критерием оптимальности является

- |                          |                         |
|--------------------------|-------------------------|
| 1. максимальная прибыль  | 3. минимальная прибыль  |
| 2. максимальные издержки | 4. минимальные издержки |

**№ 2.** В задаче «о рационе питания» критерием оптимальности является

- |                                           |                                          |
|-------------------------------------------|------------------------------------------|
| 1. максимальная прибыль                   | 3. минимальная прибыль                   |
| 2. максимальная стоимость рациона питания | 4. минимальная стоимость рациона питания |

**№ 3.** Задачи об оптимальном распределении ресурсов и «о рационе питания» относятся к задачам

- |                                    |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. нелинейного программирования    | 3. динамического программирования |
| 2. целочисленного программирования | 4. линейного программирования     |

**№ 4.** Система ограничений называется стандартной, если она содержит все знаки

- |           |           |
|-----------|-----------|
| 1. $\geq$ | 3. $\leq$ |
| 2. $=$    | 4. $<$    |

**№ 5.** Задача линейного программирования решается безоговорочно графическим способом, если в задаче

- |                    |                      |
|--------------------|----------------------|
| 1. одна переменная | 3. четыре переменные |
| 2. три переменные  | 4. две переменные    |

**№ 6.** Неравенство вида  $a_{i1} + a_{i2} \leq b_i$  описывает

- |                  |               |
|------------------|---------------|
| 1. прямую        | 3. окружность |
| 2. полуплоскость | 4. плоскость  |

**№7.** Областью допустимых решений задачи ЛП является

- |                           |                     |
|---------------------------|---------------------|
| 1. вся плоскость          | 3. круг             |
| 2. выпуклый многоугольник | 4. координатные оси |

**№ 8.** Максимум или минимум целевой функции находится

- |                                                 |                                                |
|-------------------------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. на сторонах выпуклого многоугольника решений | 3. внутри выпуклого многоугольника решений     |
| 2. в начале координат                           | 4. в вершинах выпуклого многоугольника решений |

**№9.** Для приведения задачи ЛП к каноническому виду вводятся

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. фиктивные переменные     | 3. искусственные переменные |
| 2. отрицательные переменные | 4. нулевые переменные       |

**№10.** Если ограничение задано со знаком « $\geq$ », то дополнительная переменная вводится в это ограничение с коэффициентом

- |       |      |
|-------|------|
| 1. -1 | 3. 0 |
| 2. 1  | 4. M |

**№11.** В целевую функцию дополнительные переменные вводятся с коэффициентами

- |       |      |
|-------|------|
| 1. -1 | 3. 0 |
| 2. 1  | 4. M |

### Раздел 1. Симплекс-метод

**№1.** Задача ЛП решается симплексным методом, если в каноническом виде матрица коэффициентов системы ограничений

- |                                     |                                   |
|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. содержит единичную подматрицу    | 3. содержит нулевую подматрицу    |
| 2. не содержит единичной подматрицы | 4. не содержит нулевой подматрицы |

**№2.** Значения базисных переменных оптимального плана задачи ЛП находятся в

- |                      |                  |
|----------------------|------------------|
| 1. строке оценок     | 3. столбце $b$   |
| 2. последнем столбце | 4. первой строке |

**№3.** Если все искусственные переменные выведены из базиса (метод искусственного базиса) и план не является оптимальным, то для задачи ЛП на  $\min$  разрешающий столбец выбирается

- |                                                             |                                                             |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 1. по наибольшему положительному числу в $(m+2)$ -й строке  | 3. по наибольшему отрицательному числу в $(m+1)$ -ой строке |
| 2. по наименьшему отрицательному числу в $(m+1)$ -ой строке | 4. по наибольшему положительному числу в $(m+1)$ -ой строке |

**№4.** Метод искусственного базиса используется, если матрица коэффициентов при неизвестных системы ограничений в каноническом виде

- |                                     |                                        |
|-------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. содержит единичную подматрицу    | 3. содержит диагональную подматрицу    |
| 2. не содержит единичную подматрицу | 4. не содержит диагональную подматрицу |

**№5.** При решении задачи ЛП методом искусственного базиса первоначальный опорный план содержит

- |                                     |                                              |
|-------------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. только дополнительные переменные | 3. искусственные и дополнительные переменные |
| 2. только свободные переменные      | 4. дополнительные и свободные переменные     |

**№6.** При решении задачи ЛП методом искусственного базиса оценки  $Z_j - C_j$  размещаются в

- |                 |                    |
|-----------------|--------------------|
| 1. одной строке | 3. трех строках    |
| 2. двух строках | 4. четырех строках |

**№7.** Оптимальность плана в симплексной таблице определяется

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| 1. по столбцу $b$        | 3. по разрешающей строке   |
| 2. по строке $Z_j - C_j$ | 4. по разрешающему столбцу |

**№8.** Если при решении задачи ЛП на тах симплексным методом в строке оценок все разности  $Z_j - C_j \geq 0$ , то соответствующий план будет

- |                    |                  |
|--------------------|------------------|
| 1. неотрицательным | 3. невырожденным |
| 2. оптимальным     | 4. отрицательным |

## Раздел 1. Двойственность

**№1.** Если исходная задача ЛП имеет вид  $Z_{\max} = CX, AX \leq B; X \geq 0$ , то ограничения симметричной двойственной задачи имеют вид

- |                          |                          |
|--------------------------|--------------------------|
| 1. $YA \leq C, Y \leq 0$ | 3. $YA \leq B, X \geq 0$ |
| 2. $YA \geq C, Y \geq 0$ | 4. $YA \geq B, Y \geq 0$ |

**№2.** Коэффициентами при неизвестных целевой функции двойственной задачи являются

- |                                                                 |                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1. коэффициенты при неизвестных целевой функции исходной задачи | 3. неизвестные исходной задачи                                      |
| 2. свободные члены системы ограничений исходной задачи          | 4. коэффициенты при неизвестных системы ограничений исходной задачи |

**№3.** Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются

- |                                                 |                                                 |
|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. неизвестные исходной задачи                  | 3. свободные члены исходной задачи              |
| 2. коэффициенты при неизвестных исходной задачи | 4. коэффициенты целевой функции исходной задачи |

**№4.** Если исходная задача ЛП была на максимум целевой функции, то двойственная задача будет

- |                                      |                                                  |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------|
| 1. тоже на максимум                  | 3. смешанного типа (и на максимум, и на минимум) |
| 2. либо на максимум, либо на минимум | 4. на минимум                                    |

**№5.** Если исходная задача ЛП была на минимум целевой функции, то двойственная задача будет

- |                |                                                  |
|----------------|--------------------------------------------------|
| 1. на максимум | 3. смешанного типа (и на максимум, и на минимум) |
|----------------|--------------------------------------------------|

2. либо на максимум, либо на минимум      на минимум)  
4. тоже на минимум

**№6.** При составлении симметричной пары двойственных задач, если исходная задачи ЛП  $Z_{max} = CX, AX \leq B, X \geq 0$ , то двойственная задача имеет вид

- |                                        |                                        |
|----------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. $T_{max} = YB, YA = C, Y \leq 0$    | 3. $T_{min} = BY, YA \geq C, Y \geq 0$ |
| 2. $T_{min} = YB, YA \geq C, Y \geq 0$ | 4. $T_{min} = BY, YA \leq C, Y \geq 0$ |

**№7.** При решении прямой задачи ЛП решение двойственной задачи в симплекс-таблице с оптимальным планом получается

- |                                                            |                                                                                   |
|------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| 1. на пересечении столбца свободных членов и строки оценок | 3. на пересечении строки оценок и столбцов, соответствующих начальному базису ЗЛП |
| 2. на пересечении последнего столбца и строки оценок       | 4. на пересечении первой строки и столбцов, соответствующих начальному базису ЗЛП |

**№8.** Если одна из пары двойственных задач обладает оптимальным планом, то другая

- |                                                                            |                                                                   |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1. имеет оптимальное решение и $Z_{min} = T_{max}$ или $Z_{max} = T_{min}$ | 3. имеет оптимальное решение и $Z_{min} = T_{min}$                |
| 2. не имеет решения и $Z_{min} \neq T_{max}$ или $Z_{max} \neq T_{min}$    | 4. не имеет решения и $Z_{min} = T_{max}$ или $Z_{max} = T_{min}$ |

**№9.** Если исходная задача ЛП имеет вид  $Z_{max} = CX, AX \leq B, X \geq 0$ , то целевая функция симметричной двойственной задачи имеет вид

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| 1. $T_{max} = BX$ | 3. $T_{max} = BY$ |
| 2. $T_{min} = YB$ | 4. $T_{max} = YB$ |

**№10.** Если в исходной задаче ЛП система ограничений в матричной форме имеет вид  $AX \leq B$ , то в двойственной задаче она примет вид

- |                |                |
|----------------|----------------|
| 1. $AX \geq B$ | 3. $YA \leq B$ |
| 2. $YA \geq C$ | 4. $YA \leq C$ |

Промежуточная аттестация обучающихся осуществляется в форме зачёта с использованием следующих оценочных материалов:

### Вопросы к зачёту (5 семестр, очная форма обучения)

1. Основные понятия. Простейшие задачи линейного программирования.
2. Примеры текстовых задач, приводящих к задачам линейного программирования.
3. Общая задача линейного программирования.
4. Каноническая задача линейного программирования.
5. Выпуклые множества.
6. Графический метод решения задачи линейного программирования.
7. Геометрическая интерпретация графического метода решения задачи линейного программирования.

8. Свойства решений задачи линейного программирования.
9. Сведение задачи линейного программирования с количеством переменных, большим двух, к задаче, решаемой графическим методом.
10. Основные понятия, связанные с симплекс-методом решения задач линейного программирования: базисные и свободные переменные, начальный допустимый вектор, смена базиса, разрешающий элемент.
11. Симплекс-таблица и правила работы с ней.
12. Приемы сведения задачи линейного программирования к канонической задаче и решение её симплекс-методом.
13. Решение задачи об использовании сырья симплекс-методом.
14. Геометрическая интерпретация симплекс-метода.
15. Симплекс-метод решения задачи линейного программирования.
16. Метод искусственного базиса.
17. Понятие двойственности. Двойственность при графическом решении задачи линейного программирования.
18. Несимметричные двойственные задачи.
19. Симметричные двойственные задачи.
20. Виды математических моделей двойственных задач. Теоремы двойственности.
21. Постановка целочисленной задачи и метод Гомори. Полностью целочисленные задачи
22. Постановка транспортной задачи и ее математическая модель, построение первоначального опорного плана. Закрытая модель транспортной задачи.
23. Понятие о матрице планирования. Построение первоначального опорного плана.
24. Метод северо-западного угла, метод минимальной стоимости.
25. Метод двойного предпочтения.
26. Метод Фогеля. Метод потенциалов.

### **Вопросы к зачёту (6 семестр, очная форма обучения)**

1. Численные методы минимизации функции одной переменной. Унимодальные функции.
2. Метод перебора.
3. Метод деления интервала пополам.
4. Метод золотого сечения.
5. Задача безусловной оптимизации.
6. Дифференцируемость функций на  $R^n$ .
7. Матрица Гессе.
8. Необходимое и достаточное условие минимума в задаче без ограничений.
9. Задачи с ограничениями в виде равенств.
10. Условная оптимизация. Метод множителей Лагранжа.

## IV. ПЕРЕЧЕНЬ ЛИТЕРАТУРЫ, НЕОБХОДИМОЙ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1. Основная литература

1. Балдин К.В. Математическое программирование : учебник / К.В. Балдин, Н.А. Брызгалов, А.В. Рукоусев ; под общ. ред. К.В. Балдина. – 2-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2018. – 218 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112201>(дата обращения: 02.04.2024)
2. Фомина Т.П. Методы оптимизации : учебно-методическое пособие : [16+] / Т.П. Фомина ; Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского». – Липецк : Липецкий государственный педагогический университет имени П.П. Семенова-Тян-Шанского, 2017. – 128 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=576642>(дата обращения: 02.04.2024)

### 4.2. Дополнительная литература

1. Самков Т.Л. Математические методы исследования экономики и математическое программирование : учебное пособие : [16+] / Т.Л. Самков ; Новосибирский государственный технический университет. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2018. – 115 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=575280>(дата обращения: 02.04.2024)
2. Шапкин А.С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию : учебное пособие / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 9-е изд., стер. – Москва : Дашков и К°, 2020. – 432 с. : ил. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573151>(дата обращения: 02.04.2024)

## V. ПЕРЕЧЕНЬ РЕСУРСОВ ИНФОРМАЦИОННО-ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОЙ СЕТИ «ИНТЕРНЕТ», НЕОБХОДИМЫХ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

№ пп	Ссылка на информационный ресурс	Наименование разработки в электронной форме	Доступность
1.	<a href="http://exponenta.ru">http://exponenta.ru</a>	Образовательный математический сайт	Свободный доступ
2.	<a href="http://ilib.mccme.ru">http://ilib.mccme.ru</a>	ЭБ с книгами по математике.	Неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети Интернет

## VI. СОВРЕМЕННЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ БАЗЫ ДАННЫХ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ СПРАВОЧНЫЕ СИСТЕМЫ

1.	<a href="http://www.biblioclub.ru">http://www.biblioclub.ru</a>	Электронно-библиотечная система (ЭБС) Университетская библиотека онлайн	Регистрация через любой университетский компьютер. В дальнейшем индивидуальный неограниченный доступ из любой точки, в которой имеется доступ к сети
----	-----------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

			Интернет
2.	<a href="http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm">http://eqworld.ipmnet.ru/indexr.htm</a>	EqWorld Мир математических уравнений	Свободный доступ

## **VII. ЛИЦЕНЗИОННОЕ И СВОБОДНО РАСПРОСТРАНЯЕМОЕ ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

При реализации учебной дисциплины применяется следующее лицензионное и свободно распространяемое программное обеспечение:

- Microsoft Windows;
- Microsoft Office;
- LibreOffice и др.

## **VIII. ОБОРУДОВАНИЕ И ТЕХНИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ОБУЧЕНИЯ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

Учебные занятия проводятся в аудиториях, укомплектованных специализированной мебелью, в том числе стационарными или переносными техническими средствами обучения (проектор, экран, компьютер/ноутбук).

Самостоятельная работа проводится в кабинетах, оснащенных компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду университета.