МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И. А. БУНИНА»

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 3.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Елец – 2017

УДК 511.1
ББК 22.1
Е 59

*Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета имени И.А. Бунина
от 31. 01. 2017 г., протокол № 1*

Рецензенты:

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец).

Томилова Анна Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования (ФГАОУ ВО Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова)

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

Е 59 Элементарная математика. Часть 3. Тригонометрия: учебное пособие. – Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2017. – 100 с.

978-5-94809-943-9 (часть 3)
978-5-94809-852-4

Основная цель учебного пособия – оказать помощь студентам в подготовке к занятиям по дисциплине «Элементарная математика», в написании курсовой и выпускной квалификационной работы.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов физико-математического отделения института математики, естествознания и техники.

Данное издание может полезно преподавателям вузов, а также использоваться учителями средних школ для разработки элективных курсов.

УДК 511.1
ББК 22.1

978-5-94809-943-9 (часть 3)
978-5-94809-852-4

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО И ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛОВ

§ 1.1. Углы

Напомним следующие определения из школьного курса геометрии:

✍Два луча, выходящие из одной точки, образуют фигуру, которая называется ***углом***.

✍Угол называется ***острым***, если его градусная мера заключена между значениями 0° и 90°.

✍Угол является ***прямым***, если он равен 90°.

✍Угол называется ***тупым***, если его градусная мера заключена между 90° и 180°.

✍Угол называется ***развернутым***, если он равен 180°.

Пока мы будем рассматривать только такие углы, так как сначала мы будем давать определения тригонометрических величин, исходя из понятия «*треугольник*», одним из компонентов этой простейшей геометрической является угол.

§ 1.2.Тригонометрические функции острого угла

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC (Рис. 1.2.1) и введём обозначения: $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

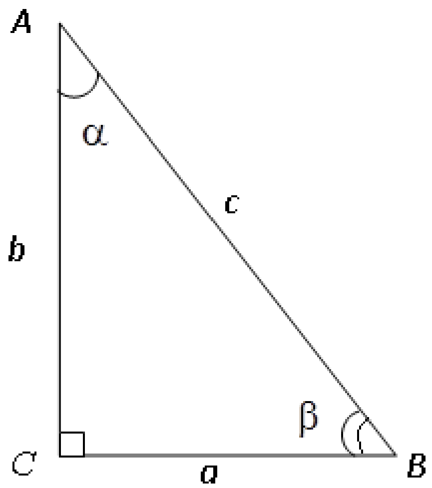


Рис. 1.2.1

Напомним, что если в прямоугольном треугольнике отмечен острый угол, то катет, лежащий напротив этого угла, называется *противолежащим катетом*, а катет, являющийся одной из сторон угла, называют *прилежащим катетом*.

Тригонометрические функции острого угла (α или β)

✍***<u>Синусом</u>*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Пишут: $sin\,\alpha=\dfrac{a}{c}$ или $sin\,\beta=\dfrac{b}{c}$.

✍***Косинусом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Пишут: $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$ или $\cos\beta=\dfrac{a}{c}$.

Ясно, что при этом выполняется равенство $\alpha+\beta=90^{\circ}$ (сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°), то, очевидно, $\sin\alpha=\cos\beta$, а также $\cos\alpha=\sin\beta$.

✍***Тангенсом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

Пишут: $tg\ \alpha=\dfrac{a}{b}$ или $tg\ \beta=\dfrac{b}{a}$.

✍***Котангенсом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.

Пишут: $ctg\ \alpha=\dfrac{b}{a}$ или $ctg\ \beta=\dfrac{a}{b}$.

Очевидно, что имеют место равенства $tg\ \alpha=ctg\ \beta$, а также $ctg\ \alpha=tg\ \beta$.

Кроме введённых четырёх тригонометрических функций (их называют основными тригонометрическими функциями) можно рассмотреть ещё две функции *секанс* и *косеканс*.

✍***Секансом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к прилежащему катету.

Пишут: $\sec\alpha=\dfrac{c}{b}$ или $\sec\beta=\dfrac{c}{a}$.

✍***Косекансом*** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение гипотенузы к противолежащему катету.

Пишут: $cosec\ \alpha=\dfrac{c}{a}$ или $cosec\ \beta=\dfrac{c}{b}$.

Из определений тригонометрических функций следует, что:

$$tg\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \tag{1.2.1}$$

$$ctg\ \alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{1.2.2}$$

Далее можем получить формулы, выражающие связь тангенса и котангенса одного и того же острого угла прямоугольного треугольника:

$$tg\ \alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{1}{ctg\ \alpha}, \tag{1.2.3}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{cos\,\alpha}{sin\,\alpha} = \frac{1}{\frac{sin\,\alpha}{cos\,\alpha}} = \frac{1}{tg\,\alpha}. \qquad (1.2.4)$$

Из формул (1.2.3) и (1.2.4) непосредственно вытекает формула

$$tg\,\alpha \cdot ctg\,\alpha = 1. \qquad (1.2.5)$$

Далее применим к треугольнику *ABC* теорему Пифагора. Имеем равенство

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Разделим обе его части на c^2. Получим

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1.$$

Так как $\frac{a}{c} = sin\,\alpha$ и $\frac{b}{c} = cos\,\alpha$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$(sin\alpha)^2 + (cos\alpha)^2 = 1$$

или

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1. \qquad (1.2.6)$$

Равенство (1.2.6) называют ***<u>основным тригонометрическим тождеством</u>***.

Разделим обе части основного тригонометрического тождества на $cos^2\alpha$ и $sin^2\alpha$ соответственно, получим такие формулы:

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{cos^2\alpha}, \qquad (1.2.7)$$

$$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}. \qquad (1.2.8)$$

Легко заметить, что функция *секанс* непосредственно связана с косинусом, а функция *косеканс* – с синусом следующими соотношениями:

$$sec\,\alpha = \frac{1}{cos\,\alpha}, \qquad (1.2.9)$$

$$cosec\,\alpha = \frac{1}{sin\alpha}. \qquad (1.2.10)$$

Используя соотношения (1.2.9) и (1.2.10) формулы (1.2.7) и (1.2.8) можно соответственно переписать в виде:

$$1 + tg^2\alpha = sec^2\alpha, \qquad (1.2.11)$$

$$1 + ctg^2\alpha = cosec^2\alpha. \qquad (1.2.12)$$

Отметим, что две последние формулы можно переписать в ином виде, роднящем их с основным тригонометрическим тождеством:

$$sec^2\alpha - tg^2\alpha = 1, \qquad (1.2.11^*)$$

$$cosec^2\alpha - ctg^2\alpha = 1. \qquad (1.2.12^*)$$

📖 Заметим теперь, что названия тригонометрических функций попарно созвучны и отличаются лишь наличием или отсутствием приставки «*ко*». По этой причине тригонометрические функции можно разбить на две группы: без приставки «*ко*» (условимся называть их *основными* тригонометрическими функциями) и содержащие приставку «*ко*» (будем назвать их *дополнительными* тригонометрическими функциями).

Представим это в виде схемы.

Тригонометрические функции

Основные

Синус	$\sin\alpha$
Тангенс	$tg\,\alpha$
Секанс	$\sec\alpha$

Дополнительные

$\cos\alpha$	***Косинус***
$ctg\,\alpha$	***Котангенс***
$\operatorname{cosec}\alpha$	***Косеканс***

Название «*косинус*» представляет собой сокращение термина *complementi sinus* (синус дополнения), выражающего тот факт, что $\cos\alpha$ равен синусу угла, дополнительного к α (т.е. составляет в сумме с ним угол, равный 90^0). По такому же принципу образованы названия «*котангенс*» (тангенс дополнения) и «*косеканс*» (секанс дополнения).

Основные и дополнительные тригонометрические функции образуют две группы (по три в каждой) функций. Каждую группу функций по отношению к другой, будем называть «*ко-функциями*».

§ 1.3. *Тригонометрические функции дополнительных углов*

✍Два острых угла, в сумме составляющих прямой угол называются *дополнительными*.

Очевидно, что острые углы прямоугольного треугольника являются дополнительными по отношению друг к другу.

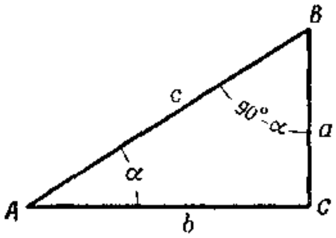


Рис. 1.3.1

Если в прямоугольном треугольнике ΔABC ($\angle C = 90^\circ$), острый угол $\angle BAC = \alpha$, то второй острый угол $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$.

Из Рис. 1.3.1 имеем

$$sin(90^\circ-\alpha)=\frac{b}{c}=cos\,\alpha\,,$$

$$cos(90^\circ-\alpha)=\frac{a}{c}=sin\,\alpha\,,$$

т.е. *синус одного из двух острых углов равен косинусу другого угла*.

Аналогично,

$$tg(90^\circ-\alpha)=\frac{b}{a}=ctg\alpha\,,$$

$$ctg(90^\circ-\alpha)=\frac{a}{b}=tg\alpha\,,$$

т.е. *тангенс одного из двух острых углов прямоугольного треугольника равен котангенсу другого угла*.

Кроме того

$$sec(90^\circ-\alpha)=\frac{c}{a}=cosec\,\alpha\,,$$

$$cosec(90^\circ-\alpha)=\frac{c}{b}=sec\,\alpha\,.$$

Заключаем, что *секанс одного из двух острых углов прямоугольного треугольника равен косекансу другого угла*.

Например, $sin11^\circ=cos79^\circ$, $tg51^\circ=ctg39^\circ$, $sec27^\circ=cosec63^\circ$.

§ 1.4. Значения тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60°

Прежде всего, заметим, что в прямоугольном треугольнике отношение двух его сторон зависит только от величины одного из острых углов и не зависит от линейных размеров сторон. Если изменить угол, то изменится отношение; если изменить отношение, то изменится угол.

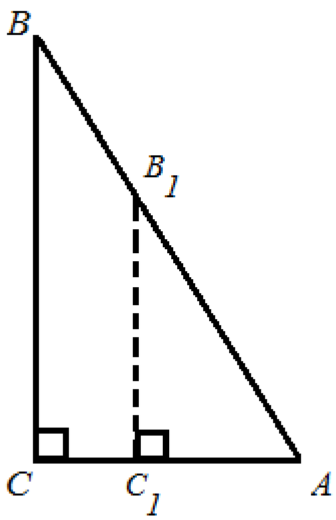


Рис. 1.4.1

Для каждого угла такое отношение постоянно, что легко доказать, используя подобие треугольников ABC и AB_1C_1 (Рис. 1.4.1).

Поэтому числовые значения тригонометрических функций острых углов, найденные, например, для треугольника с гипотенузой, равной единице, будут такими же и для любого другого треугольника с теми же острыми углами.

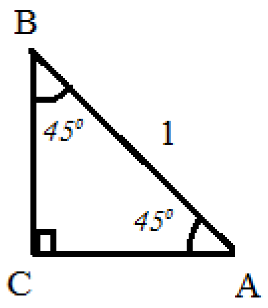


Рис. 1.4.2

Учитывая этот факт, при нахождении значений тригонометрических функций углов 30°, 45°, 60° [1 градус (1°) – это $\frac{1}{90}$ часть плоского прямого угла] будем, для удобства, рассматривать прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной единице.

При таком выборе треугольника противолежащий катет будет равен синусу угла, а прилежащий – косинусу угла.

Итак, рассмотрим сначала равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* (Рис. 1.4.2). Оба острых угла рассматриваемого треугольника равны по 45°. А так как *CB* = *CA*, то по теореме Пифагора $CB^2 + CA^2 = 1$. Значит, $2CA^2 = 1$, откуда $CB = CA = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Таким образом, $sin45^\circ = cos45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, $tg45^\circ = ctg\,45^\circ = 1$.

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник с острыми углами 30° и 60° (Рис. 1.4.3).

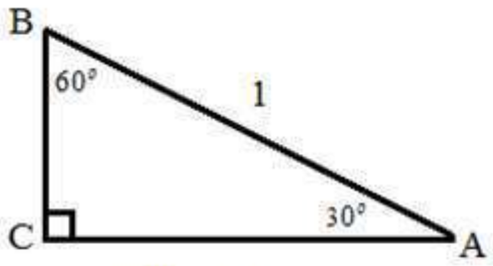


Рис. 1.4.3

Известно, что катет, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы. Поэтому $BC = \frac{1}{2}$ и по теореме Пифагора $CA = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Отсюда следует, что $sin30^\circ = \frac{1}{2}$, $cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg30^\circ = \sqrt{3}$.

С другой стороны, катет *CA*, лежащий против угла 60°, – это синус этого угла, а катет *CB* – косинус угла. Таким образом, $sin60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $cos60^\circ = \frac{1}{2}$, $tg60^\circ = \sqrt{3}$, $ctg60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Обратим внимание на тот факт, что углы 30° и 60°, а также два угла по 45° являются частными случаями, так называемых, взаимно дополнительных углов (см. ***§ 1.3***.).

Для удобства запоминания значений синуса углов 30°, 45°, 60° (а также 0° и 90°) можно использовать *правило ладони*.

Если присвоить каждому из пальцев ладони номер и сопоставить угол (см. Рис. 1.4.4), то для нахождения синуса каждого из этих углов достаточно извлечь квадратный корень из номера пальца, сопоставленного углу, и полученный результат разделить на два.

Итак, $sin\alpha = \frac{\sqrt{n}}{2}$.

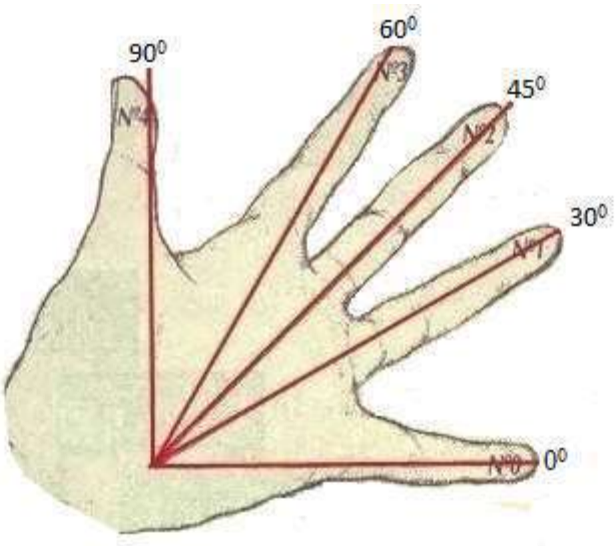


Рис. 1.4.4

Запишем результаты, получаемые с помощью этой формулы и Рис. 1.4.4 в виде таблицы.

Номер и название пальца ладони	n=№	*Угол*	$sin\alpha$
№0 – Мизинец	n=0	0^0	$sin0^{\circ} = \frac{\sqrt{0}}{2} = 0$
№1 – Безымянный	n=1	30^0	$sin30^{\circ} = \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$
№2 – Средний	n=2	45^0	$sin45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
№3 – Указательный	n=3	60^0	$sin60^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
№4 – Большой	n=4	90^0	$sin90^{\circ} = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

Замечание. С помощью «правила ладони» можно находить и значения косинусов тех же самых углов. Для этого надо начать нумерацию пальцев не с мизинца, а с большого пальца.

§ 1.5. Угол как мера поворота подвижного луча вокруг данной точки

Любой угол $\angle AOB$, как геометрическую фигуру можно получить в результате вращения подвижного луча вокруг вершины O от начальной стороны OA угла до его конечной стороны OB. Тогда величину поворота, совершенного этим лучом, измеряют величиной угла, который образуют лучи OA и OB. Луч OA называют началом отсчета угла, а о луче OB говорят, что он определяет угол поворота.

✍Угол называется ***положительным***, если он образован поворотом луча ***против хода часовой стрелки***, и ***отрицательным***, если он образован поворотом луча ***по ходу часовой стрелки***.

Обозначим через φ наименьший неотрицательный угол, образованный лучами OA и OB (Рис. 1.5.1).

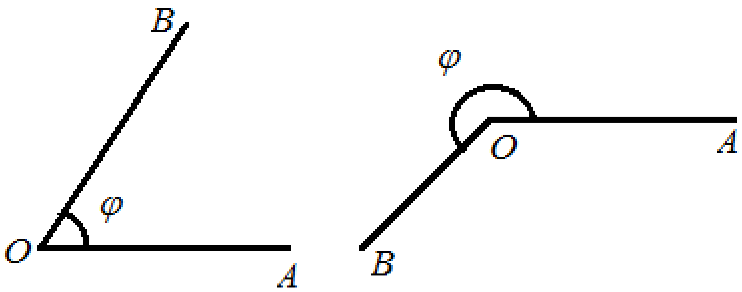


Рис. 1.5.1

Если луч OB совершает дополнительно полный оборот вокруг точки O против хода часовой стрелки (такой поворот считают поворотом на 360^0), то получаем другую величину угла, равную $\varphi + 360^\circ$. А тогда ясно, что любой угол поворота φ, определяемый лучом OB, можно представить в виде

$$\psi = \varphi + 360^\circ \cdot n,$$

где $0^\circ \le \varphi \le 360^\circ$, а $n \in Z$.

📖 На практике уже более трех тысяч лет за единицу измерения величины угла принята $\frac{1}{360}$ часть полного оборота, которую называют ***градусом***.

В технике за единицу измерения углов принимают ***полный оборот***.

В мореплавании за единицу измерения углов принят ***румб***, равный $\frac{1}{32}$ части полного оборота.

Рис. 1.5.2

В артиллерии за единицу измерения углов принята $\frac{1}{60}$ часть полного оборота, которую называют ***большим делением угломера***[1] (0,01 часть большого деления угломера называют малым делением угломера).

§ 1.6. Тригонометрическая окружность

Градусная мера измерения углов привычна, но не является единственной. Существует ещё радианное измерение углов.

Введение радианной (впрочем, как и градусной) меры основано на следующем утверждении:
отношение длины дуги, на которую данный центральный угол опирается, к радиусу окружности определяется лишь только данным углом и не зависят от величины радиуса.

Введём на плоскости прямоугольную систему координат xOy и рассмотрим единичную окружность, т.е. окружность с центром в некоторой точке O и с радиусом, равным единице масштаба. Выберем на этой окружности некоторую точку A (1;0) (см. Рис. 1.6.1), лежащей на этой окружности, называемой «*началом отсчёта*» (не путать с началом координат).

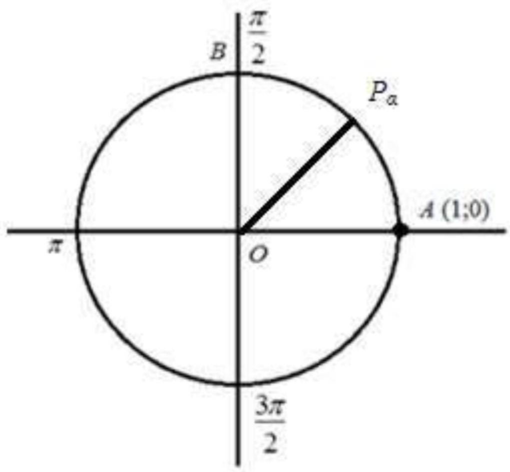


Рис. 1.6.1

Направление обхода по окружности ***против хода*** (***по ходу***) часовой стрелки будем называть ***положительным*** (***отрицательным***) ***направлением обхода***.

✍Введённую таким образом окружность называют ***<u>тригонометрической окружностью</u>***, а круг, который она ограничивает, – ***<u>тригонометрическим кругом</u>***.

По аналогии с числовой прямой каждому числу $\alpha \in (0;2\pi)$ поставим в соответствие точку P_α данной единичной окружности такую, что длина дуги AP_α равна α, причем дуга AP_α откладывается от точки A против часовой стрелки. Числу 0 и числу 2π поставим в соответствие точку A. Таким образом, между точками единичной окружности и числами промежутка [0; 2π) установлена взаимно однозначное соответствие.

✍Число α называется ***радианной мерой*** дуги AP_α и соответственно угла AOP_α.

Из формулы для вычисления длины дуги окружности следует формула, связывающая радианную и градусную меры угла.

[1]***Угломер*** – устройство для измерения углов (см. Рис. 1.5.2)

Действительно, если α – длина дуги единичной окружности, градусная мера которой равна β, то

$$\alpha = \frac{\pi}{180} \cdot \beta. \qquad (1.6.1)$$

Итак, дуга в ***1 радиан*** содержит $\frac{180}{\pi}$ градусов: $\frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45''$. Дуга в 1° содержит $\frac{\pi}{180}$ радиан: $\frac{\pi}{180} \approx 0{,}0175$.

Пример 1.6.1. Найти радианную меру углов 120^0; 320^0.

Решение. Так как $1^\circ = \frac{\pi}{180}$, то:

$$120^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 120 = \frac{2\pi}{3},$$

$$320^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot 320 = \frac{16\pi}{9}.$$

Для перевода меры угла из градусной в радианную и обратно существуют таблицы (например, В. М. Брадис, Четырехзначные математические таблицы).

Приведем таблицу для углов и дуг, которые встречаются наиболее часто.

Градусы	**360°**	**180°**	**90°**	**60°**	**45°**	**30°**	**18°**	**15°**	**10°**	**1°**	$\boldsymbol{\beta^\circ}$
Радианы	2π	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{180}$	$\frac{\pi}{180} \cdot \beta$

Снова рассмотрим единичную окружность с выбранной точкой A (Рис. 1.6.1).

Каждому числу $\alpha \in (-2\pi; 0)$ поставим в соответствие точку P_α данной единичной окружности такую, что длина дуги AP_α равна $|\alpha|$ и дуга AP_α откладывается от точки A по часовой стрелке (Рис. 1.6.2). Числу -2π поставим в соответствие точку A.

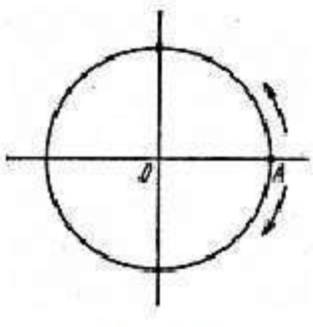


Рис. 1.6.2

Произвольное число α представим следующим образом: $\alpha = \alpha_0 + 2k\pi$, где k – некоторое целое число, а $\alpha_0 \in]-2\pi; 2\pi[$. Заметим, что для любого α такое представление возможно. Теперь числу α поставим в соответствие ту же точку, что и числу α_0, т. е. точки P_α и P_{α_0} совпадают.

Таким образом, выше построено соответствие между действительными числами и точками единичной окружности. Из самого построения этого соответствия следует, что точки $P_{\alpha+2\pi}$, $P_{\alpha-2\pi}$, P_α совпадают. То есть, единичная окружность – это числовая ось в виде тончайшей нерастяжимой нити, мысленно «намотанная» своим положительным лучом на окружность против часовой стрелки.

О точке P_α говорят, что она получается из точки A поворотом на $|\alpha|$ радиан против часовой стрелки, если $\alpha > 0$, и по часовой стрелке, если $\alpha < 0$.

§ 1.7. Тригонометрические функции произвольного аргумента

В предыдущем параграфе было установлено взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством точек единичной окружности. Каждому действительному числу α поставлена в соответствие точка P_α единичной окружности.

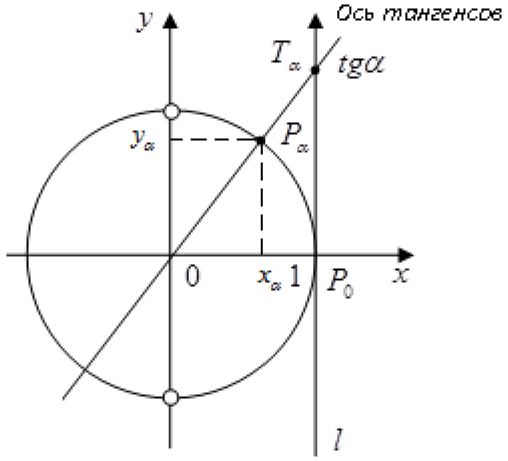


Рис. 1.7.1

✍***<u>Синусом</u>*** произвольного угла (числа) α называется *ордината* точки P_α единичной окружности, т.е.

$$sin\alpha = y_\alpha.$$

Действительно, исходя из определения синуса, приведённого в ***§ 1.2***. синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе, т.е.

$$sin\,\alpha = \frac{y_\alpha}{OP_\alpha} = \frac{y_\alpha}{1} = y_\alpha.$$

✍***<u>Косинусом</u>*** произвольного угла (числа) α называется *абсцисса* точки P_α единичной окружности, т.е.

$$cos\alpha = x_\alpha.$$

Итак, синус и косинус числа (угла) определяются соответственно как *ордината и абсцисса* точки P_α, полученной поворотом точки $P_0(1;0)$ вокруг начала координат на угол α радиан (градусов).

Определения синуса и косинуса носят геометрический характер, так как получаются из прямоугольного треугольника как отношение соответствующих катетов к гипотенузе.

<u>Пример 1.7.1.</u> Найти синус числа $\alpha = \frac{13}{6}\pi$.

Решение. Так как $\frac{13}{6}\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi$, то этому соответствует та же точка P, что и числу $\frac{\pi}{6}$. Опустим из точки *P* перпендикуляр *PM* на ось *Ox*. Тогда имеем |*PM*| = *y*. В прямоугольном треугольнике *POM* длина гипотенузы *OM* равна 1 (так как окружность единичная), длина катета *PM* равна $\frac{1}{2}$ (как катет, лежащий против угла в 30º). Следовательно, ордината точки *M* равна числу 0,5, т. е. *y* = 0,5. Таким образом, $sin\frac{13\pi}{6}=0{,}5$.

Пример 1.7.2. Найти *sin* 1,17.

Решение. Воспользуемся книгой «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса: *sin* 1,17 ≈ 0,9208 (Стр. 62).

Что касается тангенса и котангенса, то их можно определить алгебраически через отношение:

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z; \tag{1.7.1}$$

$$ctg\alpha=\frac{cos\alpha}{sin\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z. \tag{1.7.2}$$

✍***Тангенсом*** угла (числа) *α* называется отношение $\frac{sin\alpha}{cos\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$.

✍***Котангенсом*** угла (числа) *α* называется отношение $\frac{cos\alpha}{sin\alpha},\ \alpha\neq\pi k$.

Во многих случаях геометрические определения более удобны для использования. Поэтому рассмотрим геометрическую интерпретацию определений тангенса и котангенса.

1) Пусть дана единичная окружность. Проведем касательную l к ней в точке P_0 (Рис.1.7.1). Если α - произвольное число такое, что $cos\alpha\neq 0$, т.е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, то прямые l и OP_α пересекаются. Найдем координаты точки T_α пересечения прямых.

Прямая l задается уравнением $x=1$. Прямая OP_α проходит через начало координат $(0;0)$ и точку $P_\alpha(cos\alpha;sin\alpha)$. Поэтому ее уравнение имеет вид: $y=(tg\alpha)\cdot x$.

Решая систему $\begin{cases} x=1 \\ y=x\cdot tg\alpha \end{cases}$, находим координаты точки T_α: $(1;tg\alpha)$.

Выберем на прямой l направление, совпадающее с направлением оси ординат, начало отсчета – точку P_0 ($tg0=0$) и единичный отрезок, равный единичному отрезку основной системы координат. Получим координатную прямую – ось тангенсов. Тогда можно сформулировать следующее *определение.*

✍***Тангенсом*** угла (числа) α называется ***координата на оси тангенсов*** точки пересечения оси тангенсов и прямой OP_α, где O – начало координат, P_α – точка, полученная поворотом точки $(1;0)$ вокруг начала координат на угол α.

<u>Пример 1.7.3</u>. Найти $tg\dfrac{3\pi}{4}$.

Решение. Числу $\dfrac{3\pi}{4}$ на числовой окружности соответствует точка *P*, которая является концом дуги в 135°. Опустим из точки *P* перпендикуляр на ось *Ox*. Треугольник *OPM* прямоугольный и равнобедренный (дополнительный угол равен 45°). Координатами точки *P* будут числа: $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

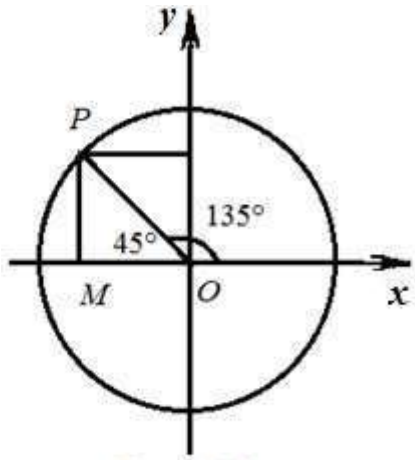


Рис. 1.7.2

Следовательно,

$$tg\,\frac{3\pi}{4}=\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\div\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-1.$$

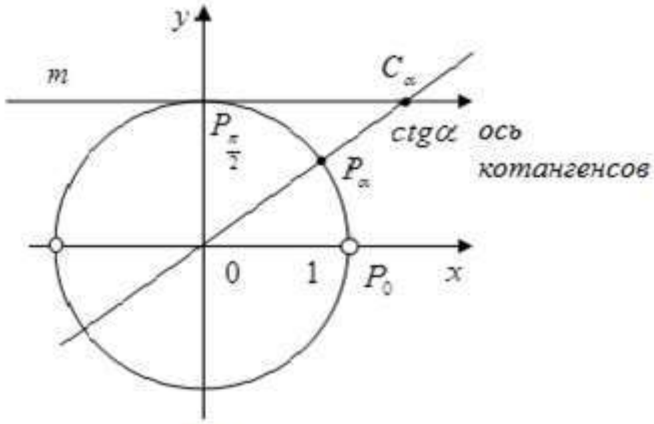


Рис. 1.7.3

2) По аналогии с осью тангенсов получим ось котангенсов. Проведем касательную m к единичной окружности в точке $P_{\frac{\pi}{2}}$ (Рис. 1.7.3). Выберем на прямой m направление, совпадающее с направлением оси абсцисс, начало отсчета – точку $P_{\frac{\pi}{2}}$ $\left(ctg\dfrac{\pi}{2}=0\right)$ и единичный отрезок, равный единичному отрезку основной системы координат. Можно сформулировать следующее *определение.*

✍ ***Котангенсом*** угла (числа) α называется ***координата на оси котангенсов*** точки пересечения оси котангенсов и прямой OP_α, где O - начало координат, P_α - точка, полученная поворотом точки $(1;0)$ вокруг начала координат на угол α.

✍ ***Секансом*** угла (числа) α называется отношение $\dfrac{1}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n$.

✍ ***Косекансом*** угла (числа) α называется отношение $\dfrac{1}{sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$.

На Рис. 1.7.4 и Рис. 1.7.5 изображен тригонометрический круг, на который нанесены наиболее часто встречающиеся углы (в радианах) а также показаны значения основных тригонометрических функций (синуса, косинуса, тангенса и котангенса).

Рис. 1.7.4

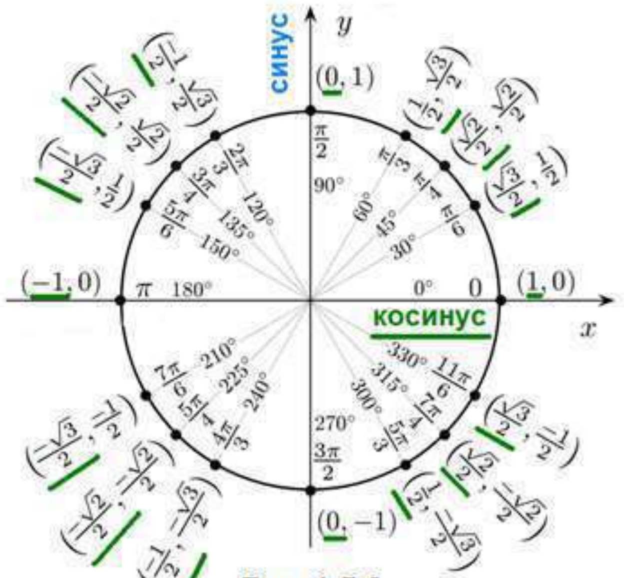


Рис. 1.7.5

§ 1.8. Знаки тригонометрических функций

Прежде всего, напомним, что угол α принадлежит:

1) ***первой*** (**I**) координатной четверти, если $0^\circ < \alpha < 90^\circ$;

2) ***второй*** (**II**) координатной четверти, если $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

3) ***третьей*** (**III**) координатной четверти, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$;

4) ***четвертой*** (**IV**) координатной четверти, если $270^\circ < \alpha < 360^\circ$.

Чтобы определить знаки тригонометрических функций синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс воспользуемся определениями этих функций из предыдущего параграфа.

1) Так из определения синуса произвольного угла α следует, что $sin\alpha = y_\alpha$ (ордината точки P_α на единичной окружности, соответствующая углу α). Поэтому $sin\alpha > 0$, если точка P_α лежит выше оси абсцисс (т.е. в **I** и **II** координатных четвертях), и $sin\alpha < 0$, если точка P_α лежит ниже оси абсцисс (т.е. в **III** и **IV** координатных четвертях).

2) Аналогично, из определения косинуса произвольного угла:

$$cos\alpha = \frac{OB}{OP_\alpha} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha .$$

Значит, $cos\alpha > 0$ в тех четвертях, где абсцисса точки P_α положительна (т.е. т.е. в **I** и **IV** координатных четвертях), соответственно $cos\alpha < 0$ будет во **II** и **III** координатных четвертях.

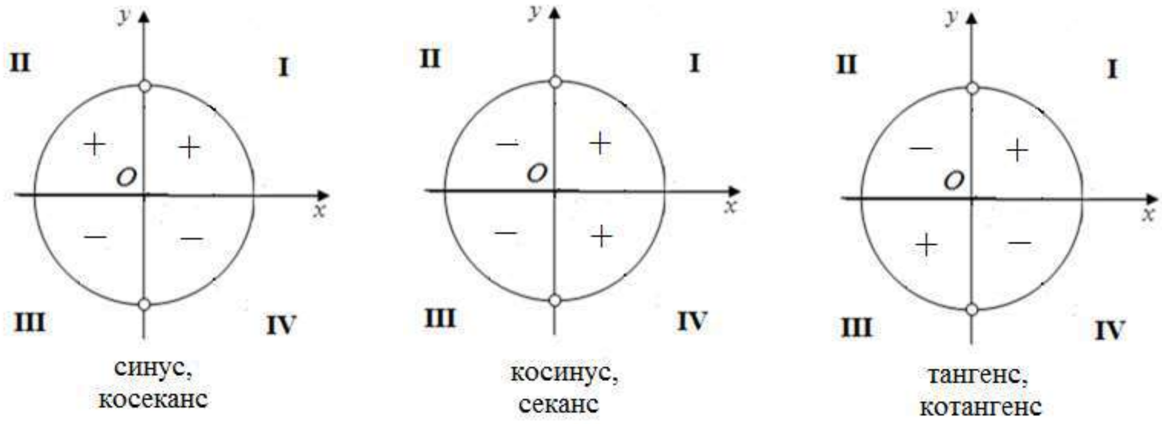


Рис. 1.8.1

3) Что касается знаков тангенса и котангенса, то из определений этих функций следует, что как тангенс, так и котангенс положительны, когда синус и косинус имеют одинаковые знаки (т.е. в **I** и **III** координатных четвертях) и отрицательны, когда синус и косинус имеют разные знаки (т.е. во **II** и **IV** координатных четвертях).

4) Для определения знака секанса достаточно вспомнить, что $sec\alpha = \dfrac{1}{cos\alpha}$, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, т.е. его совпадает со знаком косинуса, а т.к. $cosec\alpha = \dfrac{1}{sin\alpha}$, $\alpha \neq \pi k$, то знак косеканса совпадает со знаком синуса.

Схематическое распределение знаков по координатным четвертям представлено на Рис. 1.8.1.

§ 1.9. Чётность и нечётность тригонометрических функций

Перейдём к рассмотрению такого свойства тригонометрических функций, как чётность.

Рассмотрим треугольник $OBP_{-\alpha}$, в котором угол $BOP_{-\alpha} = -\alpha$ (см. Рис. 1.9.1). Тогда

$$sin(-\alpha) = \frac{BP_{-\alpha}}{OP_{-\alpha}} = \frac{-y_\alpha}{1} = -y_\alpha = -sin\alpha,$$

а это означает нечётность синуса.

Далее

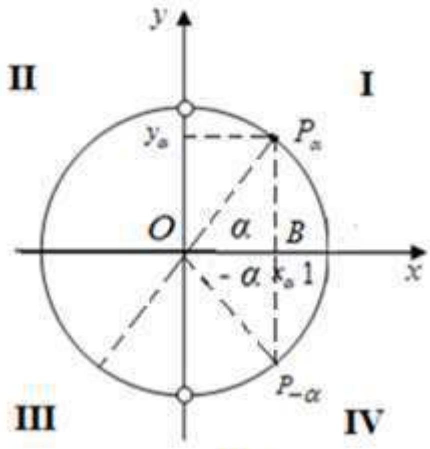


Рис. 1.9.1

$$cos(-\alpha) = \frac{OB}{OP_{-\alpha}} = \frac{x_\alpha}{1} = x_\alpha = cos\,\alpha\,,$$

что свидетельствует о чётности косинуса.

Теперь рассмотрим этот же вопрос для тангенса и котангенса:

$$tg(-\alpha) = = \frac{sin(-\alpha)}{cos(-\alpha)} = \frac{-sin\alpha}{cos\,\alpha} = -\frac{sin\alpha}{cos\,\alpha} = -tg\alpha\,,$$

$$ctg(-\alpha) = = \frac{1}{tg(-\alpha)} = \frac{1}{-tg\alpha} = -\frac{1}{tg\alpha} = -ctg\alpha\,.$$

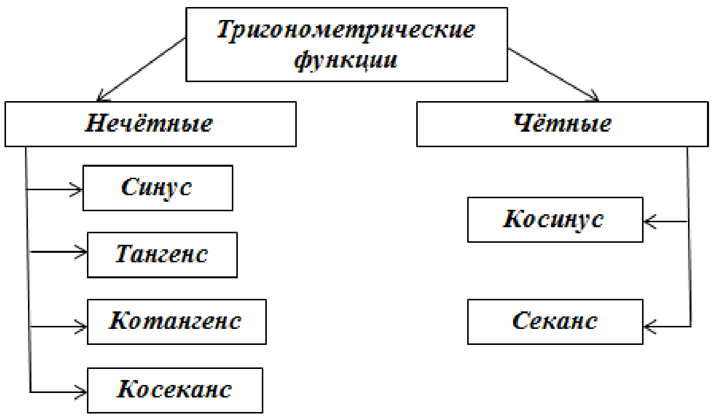
Полученные результаты говорят о том, что тангенс и котангенс обладают свойством нечётности.

Исследуем теперь на чётность и нечётность секанс и косеканс.

$$sec(-\alpha) = = \frac{1}{cos(-\alpha)} = \frac{1}{cos\,\alpha} = sec\,\alpha\,,$$

$$cosec(-\alpha) = = \frac{1}{sin(-\alpha)} = \frac{1}{-sin\alpha} = -\frac{1}{sin\alpha} = -cosec\,\alpha\,.$$

Таким образом, секанс обладает свойством чётности, а косеканс нечётен. Представим полученные результаты в виде схемы



§ 1.10. Периодичность тригонометрических функций

✍Функция $f(x)$ называется ***периодической***, если она задана на периодическом множестве и существует хотя бы одно число $l > 0$, такое, что $\forall x$ значения функции $f(x)$ в точках $x, x+l, x-l$ равны.

Графиком периодической функции является такая линия, у которой можно выделить некоторый участок (звено), который затем «повторяется» бесконечное множество раз.

Уравнение, содержащее периодическую функцию, как правило, имеет бесконечно много корней (бывают случаи, когда множество решений пусто).

Тригонометрические функции являются периодическими функциями.

✧ ***Число 2π является наименьшим положительным периодом для синуса, косинуса, секанса и косеканса***.

Действительно, справедливость этого утверждения следует непосредственно из того, что значение тригонометрических функций определяются с помощью координат вращающейся точки.

Но при вращении этой точки по единичной окружности через каждый оборот она занимает то же самое положение, и, как известно, полный оборот точка совершает тогда, когда приращение аргумента равно 2π.

Следовательно, для точки, совершающей n полных оборотов, справедливы формулы

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin t,$$
$$\cos(t + 2\pi n) = \cos t,$$
$$\sec(t + 2\pi n) = \sec t,$$
$$\operatorname{cosec}(t + 2\pi n) = \operatorname{cosec} t.$$

Докажем, что никаких других периодов функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ не имеют.

Действительно, число $l \neq 0$ служит периодом функции $y = \cos x$ только в том случае, если имеет место тождество: $\cos(x + l) \equiv \cos x$ *или* $\cos(x + l) - \cos x \equiv 0$. Тогда $-2\sin\left(x + \frac{l}{2}\right) \cdot \sin\frac{l}{2} \equiv 0$. Т.к. $\sin\left(x + \frac{l}{2}\right)$ не равен тождественно нулю, то $\sin\frac{l}{2} = 0, \Rightarrow l = 2\pi k$. Что и требовалось доказать.

✧ ***Число π является наименьшим положительным периодом для тангенса и котангенса.***

<u>Пример 1.10.1.</u> С помощью свойства периодичности синуса преобразовать $\sin 2672°$ к более простому виду.

Решение.

$\sin 2672° = \sin(152° + 7 \cdot 360°) = \sin 152°$.

<u>Пример 1.10.2</u>. Найти значение выражения $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3} + tg\frac{11\pi}{6}}{\cos\frac{25}{6}\pi \cdot ctg\frac{13\pi}{4} \cdot \sin\frac{3\pi}{2}}$.

Решение. Для краткости записей обозначим данное выражение буквой A и выразим все углы через углы, находящиеся в пределах одного оборота точки P_0. Далее, используя свойства периодичности, а также чётности и нечётности соответствующих функций, получим:

$$A=\frac{\sin\frac{7\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}+tg\frac{11\pi}{6}}{\cos\frac{25}{6}\pi\cdot ctg\frac{13\pi}{4}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}}=\frac{\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\frac{\pi}{3}+tg\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)\cdot ctg\left(3\pi+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{3}+tg\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}\cdot ctg\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1\cdot(-1)}=\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом, $A=\frac{3-\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}$.

§ 1.11. Формулы приведения

Формулами приведения называют формулы, выражающие значения тригонометрических функций углов вида:

$$\frac{\pi}{2}\pm\alpha,\left(90^\circ\pm\alpha\right);\quad \pi\pm\alpha,\left(180^\circ\pm\alpha\right);\quad \frac{3\pi}{2}\pm\alpha,\left(270^\circ\pm\alpha\right);\quad 2\pi\pm\alpha,\left(360^\circ\pm\alpha\right);\ldots$$

через функции угла α из первой координатной четверти. То есть, формулы приведения позволяют упростить выражение за счёт замены присутствующего в нём угла углом первой четверти, нахождение значений тригонометрических функций для которого не представляет проблемы.

Выводятся формулы приведения разными способами. Мы же остановимся на следующих соображениях. Отметим на тригонометрической окружности (Рис. 1.11.1) точки:

$$A_\alpha, A_{\frac{\pi}{2}-\alpha}, A_{\frac{\pi}{2}+\alpha}, A_{\pi-\alpha},$$

$$A_{\pi+\alpha}, A_{\frac{3\pi}{2}-\alpha}, A_{\frac{3\pi}{2}+\alpha}, A_{2\pi-\alpha},$$

соответствующие углам:

$$\alpha, \frac{\pi}{2}-\alpha, \frac{\pi}{2}+\alpha, \pi-\alpha,$$

$$\pi+\alpha, \frac{3\pi}{2}-\alpha, \frac{3\pi}{2}+\alpha, 2\pi-\alpha$$

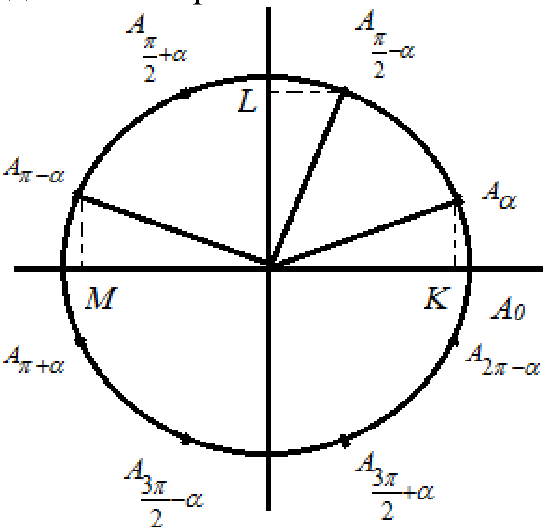


Рис. 1.11.1

Справедливость равенств

$sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cos\alpha$, $cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=sin\alpha$, а также $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\alpha$, $ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=tg\alpha$ вытекает непосредственно из факта, установленного в ***§ 1.3***, касавшегося свойств дополнительных углов.

Далее заметим, что точки A_α и $A_{\pi-\alpha}$ симметричны относительно оси ординат, следовательно, синусы соответствующих им углов равны, т.е.

$$sin(\pi-\alpha)=sin\alpha.$$

В то же время косинусы этих углов отличаются знаком, т.к. точки A_α и $A_{\pi-\alpha}$ имеют равные по модулю, но разные по знаку абсциссы, поэтому

$$cos(\pi-\alpha)=-cos\alpha.$$

Аналогично доказывается справедливость всех остальных формул приведения для функций синус и косинус. Формулы приведения для тангенса, котангенса, секанса и косеканса являются следствиями формул приведения для синуса и косинуса.

Например, $tg(\pi-\alpha)=\frac{sin(\pi-\alpha)}{cos(\pi-\alpha)}=\frac{sin\alpha}{-cos\alpha}=-\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=-tg\alpha$,

$$sec(\pi-\alpha)=\frac{1}{cos(\pi-\alpha)}=\frac{1}{-cos\alpha}=-\frac{1}{cos\alpha}=-sec\alpha.$$

Результаты формул приведения можно собрать в таблицу.

Таблица №1. Формулы приведения

Функция	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
sin	$cos\alpha$	$cos\alpha$	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$
cos	$sin\alpha$	$-sin\alpha$	$-cos\alpha$	$-cos\alpha$	$-sin\alpha$	$sin\alpha$	$cos\alpha$
tg	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
ctg	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
sec	$cosec\alpha$	$-cosec\alpha$	$-sec\alpha$	$-sec\alpha$	$-cosec\alpha$	$cosec\alpha$	$sec\alpha$
cosec	$sec\alpha$	$sec\alpha$	$cosec\alpha$	$-cosec\alpha$	$-sec\alpha$	$-sec\alpha$	$-cosec\alpha$

Если в процессе решения какой-либо задачи возникает потребность применить формулы приведения, то нет необходимости помнить вывод этой формулы и знания соответствующей ячейки из Таблицы №1. Каждую формулу приведения легко восстановить, если воспользоваться следующим правилом, называемым ***мнемоническим***[2] ***правилом***:

1) Если угол откладывается от *горизонтальной оси*, т.е. углы вида:

$$\pi \pm \alpha, \left(180^\circ \pm \alpha\right); 2\pi \pm \alpha, \left(360^\circ \pm \alpha\right); \ldots,$$

то название приводимой (преобразуемой) функции *сохраняется*. Если же угол откладывается от *вертикальной оси*, т.е. углы вида:

$$\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \left(90^\circ \pm \alpha\right); \frac{3\pi}{2} \pm \alpha, \left(270^\circ \pm \alpha\right); \ldots,$$

то название приводимой функции *меняется* на «ко-функцию».

2) Знак перед приведенной (преобразованной) функцией ставится такой, каков знак приводимой функции в соответствующей четверти, если считать угол α острым.

Таким образом, при использовании формул приведения надо следить за двумя моментами: меняется ли название функции или нет, а также меняется ли знак результата приведения или нет.

<u>Пример 1.11.1</u>. Найти значение *cos* 315°.

Решение. *cos* 315° = *cos* (270° + 45°), т.е. угол откладывается от вертикальной оси. Значит, косинус следует заменить на синус 45°.

Так как угол 315° находится в IV координатной четверти, где приводимая функция косинус принимает положительные значения, то перед результатом приведения следует сохранить знак +.

Итак,

$cos\ 315^\circ = cos\ (270^\circ + 45^\circ) = sin\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

<u>Пример 1.11.2</u>. Упростить выражение

$$\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg\left(\pi-\alpha\right)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot sin\left(\pi-\alpha\right)}.$$

Решение.

$$\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot tg\left(\pi-\alpha\right)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot sin\left(\pi-\alpha\right)} = \frac{sin\alpha\cdot cos\alpha\cdot\left(-tg\alpha\right)}{-tg\alpha\cdot sin\alpha} = cos\alpha$$.Ответ: $cos\alpha$.

[2] Происходит от греческого слова ***мнемоника*** (*μνημονικόν* – ***искусство запоминания***)

§ 1.12. Тригонометрические функции действительного аргумента, их свойства и графики

К тригонометрическим функциям относятся: $y = sin\,x$, $y = cos\,x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y = sec\,x$, $y = cosec\,x$.

Происхождение названий тригонометрических функций связано с их геометрическим представлением как отрезков (лат. *синус* – кривизна, *тангенс* – касающийся, *секанс* – секущая).

Рассмотрим **основные свойства** каждой из них.

I) $y = sin\,x$

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = [-1;1]$;
3) функция нечётная, график симметричен относительно начала координат;
4) функция периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$;
5) функция возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, убывает на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$;
6) $max\,y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $min\,y = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$;
7) $y = 0$ при $x = \pi n, n \in Z$;
8) $y' = cos\,x$;
9) График – *синусоида*.

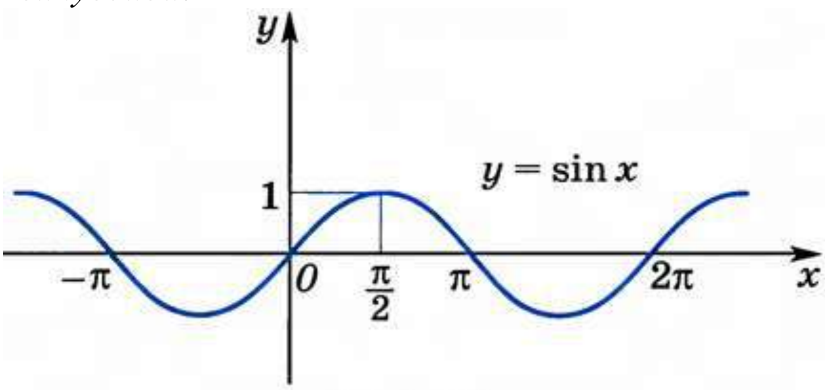


Рис. 1.12.1

II) $y = cos\,x$

1) $D(y) = R$;
2) $E(y) = [-1;1]$;
3) функция чётная, график симметричен относительно оси Oy;
4) функция периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$;

5) функция возрастает на $(-\pi+2\pi n;2\pi n)$, убывает на $(2\pi n;\pi+2\pi n), n\in Z$;

6) $max\, y=1$ при $x=2\pi n$, $min\, y=-1$ при $x=\pi+2\pi n, n\in Z$;

7) $y=0$ при $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$;

8) $y'=-sin\, x$;

9) График – *косинусоида*.

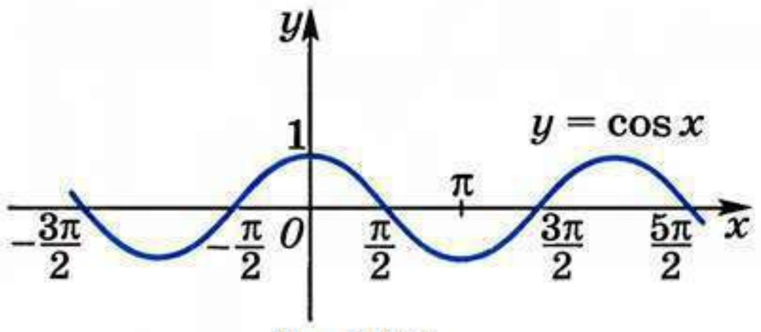


Рис. 1.12.2

III) $y=tgx$

1) $D(y)=\left\{x / x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right\}$;

2) $E(y)=R$;

3) функция нечётная, график симметричен относительно начала координат;

4) функция периодическая с периодом $T_0=\pi$;

5) функция возрастает на $\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$, то есть на всей области определения;

6) экстремумов нет;

7) $y=0$ при $x=\pi n, n\in Z$;

8) $y'=\dfrac{1}{cos^2 x}$;

9) График – *тангенсоида*.

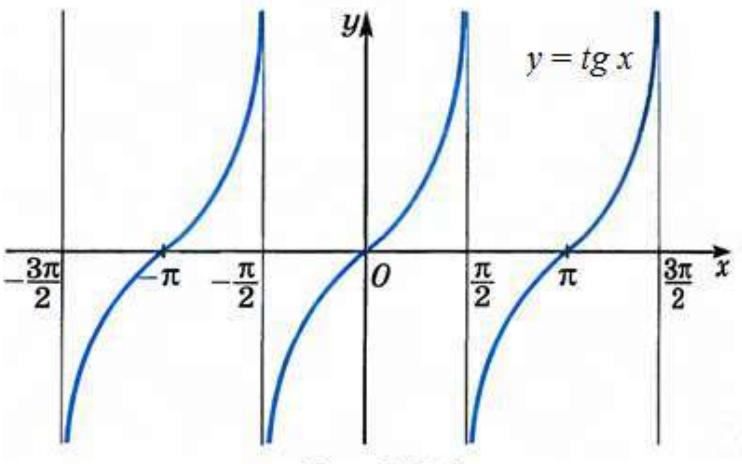


Рис. 1.12.3

IV) $y = ctg\,x$

1) $D(y) = \{x / x \neq \pi n\}$;

2) $E(y) = R$;

3) функция нечётная, график симметричен относительно начала координат;

4) функция периодическая с периодом $T_0 = \pi$;

5) функция убывает на $(\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$, то есть на всей области определения;

6) экстремумов нет;

7) $y = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

8) $y' = -\frac{1}{sin^2 x}$;

9) График – *котангенсоида*.

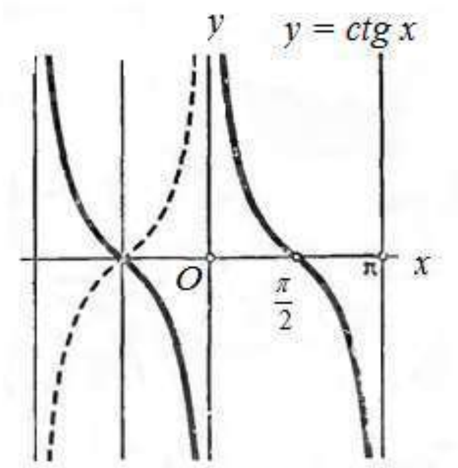


Рис. 1.12.4

V) $y = sec\,x$

1) $D(y) = \left\{x / x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n\right\}$;

2) $E(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;

3) функция чётная, график симметричен относительно *Oy;*

4) функция периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$;

5) функция возрастает на $\left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, функция убывает на $\left(-\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right)$;

6) $max\,y = -1$ при $x = \pi + 2\pi n$, $min\,y = 1$ при $x = 2\pi n, n \in Z$;

7)

8) $y \neq 0$;

9) $y' = \left(\frac{1}{cos\,x}\right)' = \frac{sin\,x}{cos^2 x} = tg\,x \cdot sec\,x$;

10) График – *секансоида*.

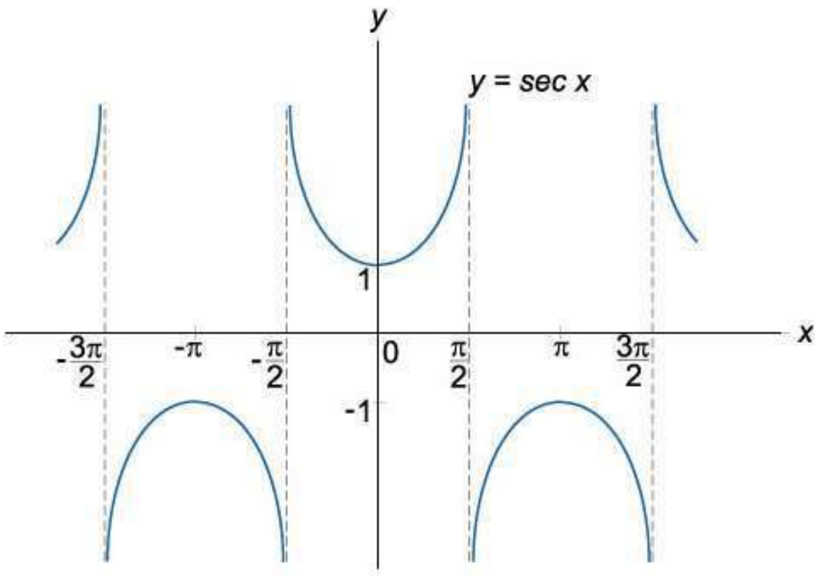


Рис. 1.12.5

VI) $y = co\sec x$

1) $D(y) = \{x / x \neq \pi n\}$;

2) $E(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;

3) функция нечётная, график симметричен относительно начала координат;

4) функция периодическая с периодом $T_0 = 2\pi$;

5) функция возрастает на $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right) \cup \left(\pi + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, убывает на $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; 2\pi n\right) \cup \left(2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$;

6) $max\, y = -1$ при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $min\, y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$;

7) $y \neq 0$;

8) $y' = \left(\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} = -ctg\, x \cdot co\sec x$;

9) График – *косекансоида*

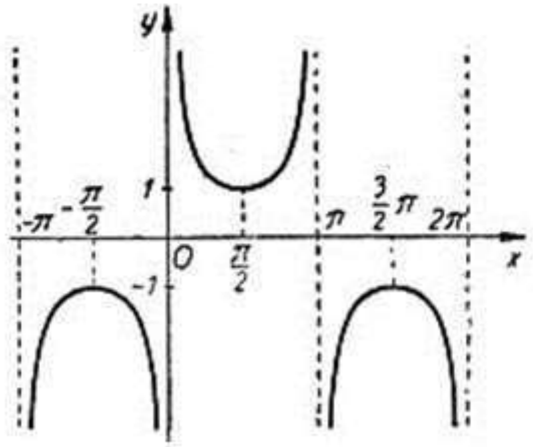


Рис. 1.12.6

Замечание. Кроме описанных шести основных тригонометрических функций, иногда рассматривается ещё одна тригонометрическая функция *синус-версус* (обращённый синус): $ver\,sin\alpha = 1 - cos\alpha$. Но как будет установлено далее, её аналитическая запись может быть представлена через синус половинного аргумента.

Итак, сделаем некоторые выводы, касающиеся способов определения тригонометрических функций. Это может быть дано с помощью:

1) единичного круга:

а) абсцисса (косинус) и ордината (синус) конца радиуса единичного круга, образующего угол α с осью абсцисс;

б) при всех допустимых значениях угла α тангенс этого угла равен ординате точки, в которой ось тангенсов пересекается с продолжением радиуса единичной окружности, образующего угол α с осью абсцисс;

2) круга произвольного радиуса: косинус и синус при этом – суть отношения абсциссы и ординаты конца радиус-вектора к радиусу круга;

3) векторной интерпретации: косинус угла есть отношение проекции вектора, образующего угол α с осью абсцисс ан эту ось, к длине вектора.

4) геометрической интерпретации: косинус острого угла есть отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Тригонометрическую функцию можно рассматривать как функцию, для которой значениями аргумента являются углы, а значениями функции – числа. Тригонометрическую функцию можно рассматривать как функцию дуги (здесь дуга – угол), значит, тригонометрическую функцию можно рассматривать как функцию числового аргумента.

Аргумент тригонометрической функции называется *дугой* или *углом*, но под ним подразумевается не сама дуга, угол, а число, их измеряющее.

❍ Элементарная математика вынуждена строить тригонометрию на базе геометрической теории, так как построить формулы, выражающие значения тригонометрических функций посредством только лишь алгебраических действий над аргументом, невозможно.

Из школьного курса нам известны значения основных тригонометрических функций углов первой единичной окружности (от 0^0 до 90^0), дополним эту таблицу значениями секанса и косеканса:

Таблица № 2. Значения тригонометрических функций наиболее важных углов

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$	$sec\alpha$	$cosec\alpha$
0^0 (0)	0	1	0	– (нет)	1	– (нет)
15^0 $\left(\frac{\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
18^0 $\left(\frac{\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5}+1$
30^0 $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
36^0 $\left(\frac{\pi}{5}\right)$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5}-1$	$\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5}$
45^0 $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
54^0 $\left(\frac{3\pi}{10}\right)$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{5}$	$\sqrt{5}-1$
60^0 $\left(\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
75^0 $\left(\frac{5\pi}{12}\right)$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90^0 $\left(\frac{\pi}{2}\right)$	1	0	– (нет)	0	– (нет)	1

Тригонометрия играет очень важную роль при решении геометрических задач. Рассмотрим одно из таких приложений. Если известна сторона a_n правильного n-угольника, вписанного в единичный круг, то легко вычислить значения тригонометрических функций от угла $\frac{\pi}{n} = \frac{180^\circ}{n}$.

Для этого примем за начальный, радиус, делящий пополам сторону вписанного n-угольника, тогда $\frac{a_n}{2}$ является синусом угла $\frac{\pi}{n}$, а апофема $l_n = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}$ – его синусом.

Итак, $sin\frac{\pi}{n} = \frac{a_n}{2}$, $cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{1 - \frac{a_n^2}{4}}$.

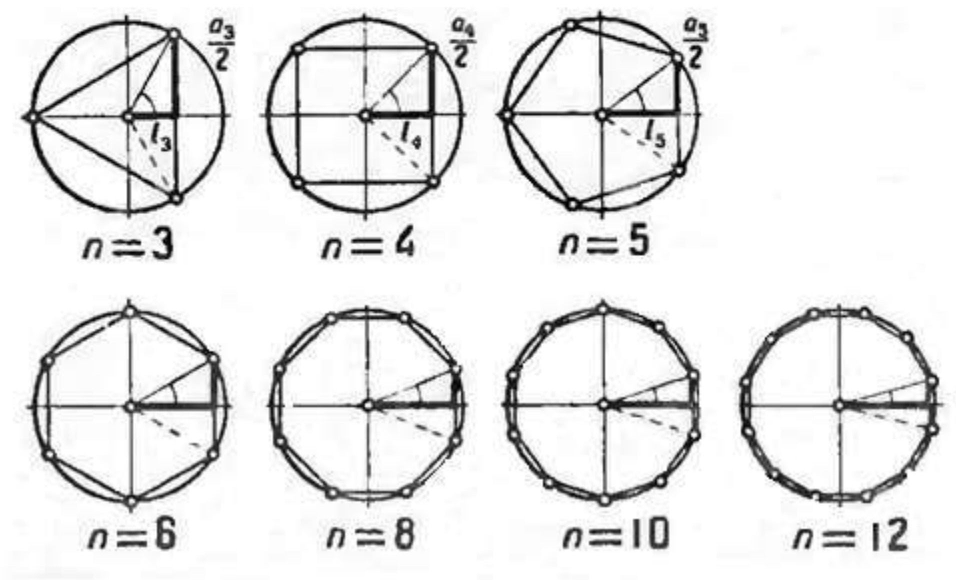


Рис. 1.12.7

Тригонометрия играет важную роль при решении физических задач. Особенно это касается теории колебаний.

В математике ***простым гармоническим или синусоидальным колебанием*** называется всякая функция (а также график) вида $y = Asin(\omega x + \alpha), A \neq 0, \omega > 0$.

✧Функция $y = Asin(\omega x + \alpha)$ является периодической с наименьшим положительным периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Простейшее гармоническое колебание с заданным периодом T можно представить в виде $y = Asin\left(\frac{2\pi \cdot x}{T} + \alpha\right)$.

Многие процессы, рассматриваемые в физике и технике, могут быть изучены с помощью гармонических колебаний. Это: распространение волн, движение механизмов паровой машины, сила и напряжение переменного электромагнитного поля и т. д.

Рассмотрим гармоническое колебание в общем виде: $y = A sin\omega\left(x + \dfrac{\alpha}{\omega}\right)$. Здесь: A – амплитуда, $A\,sin\,x$ – преобразование амплитуды, α – начальная фаза, $sin(x+\alpha)$ – сдвиг фазы, $sin\,\omega x$ – преобразование периода.

График этой функции получается из обыкновенной синусоиды $y = \sin x$ путем последовательного выполнения простейших преобразований:

1) $x_1 = \omega x', y_1 = sin\,\omega x'$ – преобразование периода;

2) $x_2 = x + \dfrac{\alpha}{\omega}, y_2 = sin(\omega x + \alpha)$ – перенос начала координат в точку $\left(-\dfrac{\alpha}{\omega}\right)$, то есть, сдвиг фазы;

3) $y_3 = Ay_2 = A sin(\omega x + \alpha)$ – преобразование амплитуды.

Если два гармонических колебания $y_1 = A_1\,sin(\omega_1 x + \alpha_1)$ и $y_2 = A_2\,sin(\omega_2 x + \alpha_2)$ имеют один и тот же период *T*, то $\omega_1 = \omega_2$.

Сумма двух гармонических колебаний $y_1 + y_2$ – гармоническое колебание, равное $y_1 + y_2 = a\,sin\,\omega x + b\,cos\,\omega x$, где $a = A_1\,cos\,\alpha_1 + A_2\,cos\,\alpha_2$, $b = A_1\,sin\,\alpha_1 + A_2\,sin\,\alpha_2$.

Следовательно, $y_1 + y_2 = A sin(\omega x + \alpha)$, где

$$A = \sqrt{\left(A_1\,cos\,\alpha_1 + A_2\,cos\,\alpha_2\right)^2 + \left(A_1\,sin\,\alpha_1 + A_2\,sin\,\alpha_2\right)^2} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\,cos(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

и

$$cos\,\alpha = \frac{A_1\,cos\,\alpha_1 + A_2\,cos\,\alpha_2}{A}, \quad sin\,\alpha = \frac{A_1\,sin\,\alpha_1 + A_2\,sin\,\alpha_2}{A}.$$

Сумма двух гармонических колебаний с различными периодами (наименьшими положительными) является периодической функцией в том и только том случае, если их периоды соизмеримы (имеют общую меру).

Общим периодом суммы двух гармонических колебаний с соизмеримыми периодами является общее кратное их периодов.

Наименьшим положительным периодом суммы двух гармонических колебаний является наименьшее общее кратное наименьших положительных периодов.

При сложении двух гармонических колебаний с несоизмеримыми периодами получается непериодическая функция.

Тригонометрические функции – трансцендентные. Из рассмотренных нами в первой части пособия трансцендентными (от лат. *transcendens*; в нашем случае – выходящий за пределы понимания) являются показательная и логарифмическая функции.

✧(*свойство трансцендентности тригонометрических функций*): ни одна из тригонометрических функций не удовлетворяет никакому алгебраическому уравнению.

Следствие. Закон соответствия тригонометрических функций не может быть выражен посредством алгебраических действий над аргументами.

Действительно, известное из математического анализа представление тригонометрических функций при помощи степенных рядов, кроме алгебраических действий над аргументом, содержит операции предельного перехода (суммирование бесконечного ряда).

§ 1.13. Формулы суммы и разности аргументов тригонометрических функций

Теоремы сложения аргументов тригонометрических функций демонстрируют, что тригонометрические функции от суммы (разности) двух слагаемых выражаются алгебраически через значения тригонометрических функций от этих слагаемых. Наиболее важные формулы вытекают из теоремы сложения. Большинство формул тригонометрии можно получить как её следствия.

Доказательство теорем сложения заключается в установлении соответствующих формул:

$$cos\left(\alpha+\beta\right)=cos\alpha\,cos\beta-sin\alpha\,sin\beta; \qquad (1.13.1)$$

$$cos\left(\alpha-\beta\right)=cos\alpha\,cos\beta+sin\alpha\,sin\beta; \qquad (1.13.2)$$

$$sin\left(\alpha+\beta\right)=sin\alpha\,cos\beta+cos\alpha\,sin\beta; \qquad (1.13.3)$$

$$sin\left(\alpha-\beta\right)=sin\alpha\,cos\beta-cos\alpha\,sin\beta; \qquad (1.13.4)$$

$$tg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}; \qquad (1.13.5)$$

$$tg\left(\alpha-\beta\right)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}; \qquad (1.13.6)$$

$$ctg\left(\alpha+\beta\right)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}; \qquad (1.13.7)$$

$$ctg\left(\alpha-\beta\right)=\frac{ctg\alpha\cdot ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}. \qquad (1.13.8)$$

Приведём доказательство одной из представленных формул.

Например, докажем формулу *косинуса разности* (1.13.2), смысл которой можно сформулировать следующим образом: ***косинус разности двух углов равен произведению косинусов этих углов, сложенному с произведением их синусов***.

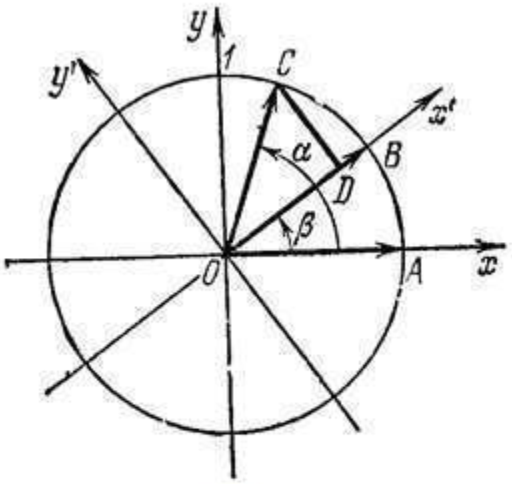


Рис. 1.13.1

Предположим, что углы α и β удовлетворяют следующим условиям:

1) $0\le\alpha<2\pi$;
2) $0\le\beta<2\pi$;
3) $\alpha\ge\beta$.

На Рис. 1.13.1 изображены углы α ($\angle AOC$)и β ($\angle AOB$). Точки A, *B*, *C* лежат на единичной окружности (*OA*= *OB*= *OC* = 1). Заметим, что $\angle BOC=\alpha-\beta$. Кроме системы координат *xOy* будем рассматривать ещё новую систему координат $x'Oy'$, получаемую из старой системы координат поворотом на угол β. В дальнейшем будем использовать тот факт, что расстояние *BC*, вычисленное в старой системе координат *xOy* и в новой системе координат $x'Oy'$, будет одинаково.

В системе координат *xOy* точка *B* имеет координаты $\left(cos\beta;sin\beta\right)$, а точка $C\left(cos\alpha;sin\alpha\right)$.

Из школьного курса геометрии известна формула, позволяющая находить расстояние между двумя точками в декартовой системе координат. Используя её, найдём расстояние между точками *B* и *C*.

$$BC^2=\left(cos\beta-cos\alpha\right)^2+\left(sin\beta-sin\alpha\right)^2;$$

$$BC^2=cos^2\beta-2cos\beta cos\alpha+cos^2\alpha+sin^2\beta-2sin\beta sin\alpha+sin^2\alpha=$$

$$=2-2\left(cos\beta cos\alpha+sin\beta sin\alpha\right)=2\left(1-cos\beta cos\alpha-sin\beta sin\alpha\right) \quad (*).$$

В системе координат $x'Oy'$ точка *B*(1;0), а точка $C\left(cos(\alpha-\beta);sin(\alpha-\beta)\right)$. Найдём BC^2 в новой системе координат:

$$BC^2=\left(cos\left(\alpha-\beta\right)-1\right)^2+sin^2\left(\alpha-\beta\right);$$

$$BC^2=cos^2\left(\alpha-\beta\right)-2cos\left(\alpha-\beta\right)+1+sin^2\left(\alpha-\beta\right)=2\left(1-cos\left(\alpha-\beta\right)\right) \quad (**).$$

Приравнивая правые части формул (*) и (**), получаем

$$2\left(1-cos\left(\alpha-\beta\right)\right)=2\left(1-cos\beta cos\alpha-sin\beta sin\alpha\right).$$

Откуда

$$cos\left(\alpha-\beta\right)=cos\,\alpha\,cos\,\beta+sin\,\alpha\,sin\,\beta\,.$$

Для доказательства формулы *косинуса суммы* (1.13.1) достаточно в доказанной формуле (1.13.2) заменить β на $-\beta$.

Действительно,

$$cos\left(\alpha+\beta\right)=cos\left(\alpha-\left(-\beta\right)\right)=cos\,\alpha\,cos\left(-\beta\right)+sin\,\alpha\,sin\left(-\beta\right)=$$

$$=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta.$$

При этом мы воспользовались свойством чётности косинуса и нечётности синуса.

Формулу синуса суммы (1.13.3) можно легко получить, используя формулу приведения.

Действительно,

$$sin\left(\alpha+\beta\right)=cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\beta\right)\right]=cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right]=$$

$$=cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)cos\,\beta+sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)sin\,\beta=sin\,\alpha\,cos\,\beta+cos\,\alpha\,sin\,\beta.$$

При некоторых частных предположениях относительно значений α и β формулы сложения можно установить различными способами, в том числе, непосредственно геометрически. Эти способы часто встречаются в школьных учебниках, но доказательствами теоремы сложения служить не могут, так как в них высказываются только частные предположения об аргументах.

Эти геометрические рассуждения – не доказательства, а только интерпретации теоремы сложения:

1) α и β – острые углы ΔABC:

Пусть $\angle B=\alpha+\beta$, $\angle(c,h)=\alpha$, $\angle(a,h)=\beta$ (Рис. 1.13.2). Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot sin(\alpha+\beta).$$

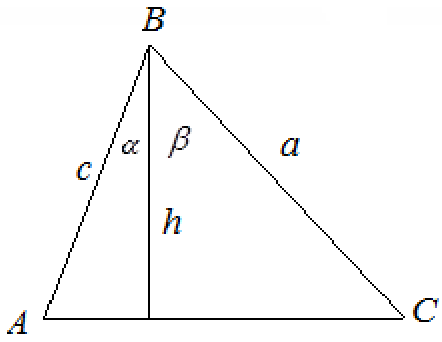


Рис. 1.13.2

С другой стороны,

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{DBC}=\frac{1}{2}AD\cdot h+\frac{1}{2}CD\cdot h,$$

где $h=a\,cos\,\beta=c\,cos\,\alpha$, $AD=c\,sin\,\alpha$, $CD=a\,sin\,\beta$. Тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}c\,sin\,\alpha\cdot a\,cos\,\beta+\frac{1}{2}a\,sin\,\beta\cdot c\,cos\,\alpha=\frac{1}{2}ac\left(sin\,\alpha\,cos\,\beta+sin\,\beta\,cos\,\alpha\right).$$

Сравнивая результаты вычисления площади треугольника двумя способами, заключаем, что $sin(\alpha+\beta)=sin\alpha cos\beta+cos\alpha sin\beta$. Тем самым мы ещё раз подтвердили справедливость формулы (1.13.3).

2) Для интерпретации теоремы сложения можно исходить из непосредственного построения тригонометрических линий суммы (разности) углов:

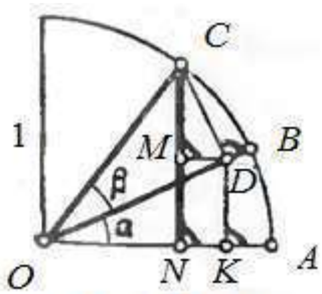


Рис. 1.13.3

Внесём дополнительные построения в Рис. 1.13.1. Построим следующие отрезки $CD\perp OB$, $DM\perp CN$, $CN\perp OA,\Rightarrow\angle MCD=\alpha$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами) (см. Рис. 1.13.3).

Имеем: $sin(\alpha+\beta)=CN=CM+MN$,

$$MN=DK,$$
$$DK=ODsin\alpha=cos\beta sin\alpha,$$
$$MC=CDcos\alpha=cos\alpha sin\beta,$$
$$\Rightarrow sin(\alpha+\beta)=cos\alpha sin\beta+cos\beta sin\alpha.$$

3) Можно интерпретировать теорему сложения при помощи ***теоремы Птолемея***, согласно которой: *произведение диагоналей выпуклого четырёхугольника равно сумме произведений противоположных сторон* (см. Рис. 1.13.4).

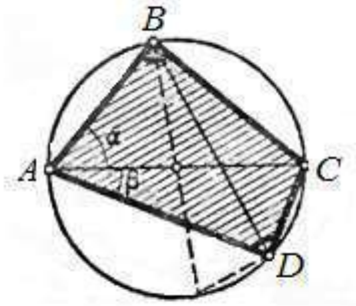


Рис. 1.13.4

Действительно, пусть одна из диагоналей четырёхугольника *ABCD*, вписанного в единичную окружность равна *AC*, т.е. *AC* = 2 и пусть $\angle BAC=\alpha$, $\angle DAC=\alpha$. Тогда угол $\angle BDC=\alpha$, т.к. он опирается на ту же дугу *BC*, что и угол $\angle BAC=\alpha$. Угол $\angle CBD=\beta$, так он опирается на дугу *CD*.

Пусть точка *O* – центр окружности. Тогда $\angle BOC=2\alpha$, т.к. он является центральным углом, опирающимся на дугу *BC*, поэтому $\angle BOA=180^\circ-2\alpha$, как смежный углу $\angle BOC=2\alpha$.

Так как треугольник *ABD* вписан в окружность, то по следствию из теоремы синусов можем записать $\frac{BD}{sin(\alpha+\beta)}=2R$, а т.к. *R* = 1, то $BD=2sin(\alpha+\beta)$.

Треугольник *AOB* – равнобедренный, т.к. *AO* = *OB* (радиусы). Угол при вершине этого треугольника $\angle BOA=180^\circ-2\alpha$ – центральный, следовательно, угол $\angle BDA=90^\circ-\alpha$.

Аналогично имеем:

$$\frac{AB}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}=2\text{, т.е. } AB=2\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=2\cos\alpha .$$

Так как треугольник BCD вписан в окружность, диаметр которой равен 2, то по теореме синусов можем записать

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=2,\ \frac{CD}{\sin\beta}=2.$$

Из чего получаем

$$BC=2\sin\alpha,\ CD=2\sin\beta .$$

Для возможности применения теоремы Птолемея осталось найти AD. Рассмотрим треугольник AOD. Он является равнобедренным, т.к. AO = OD =1 (радиусы) и угол при основании равен β, тогда угол $AOD=180^\circ-2\beta$.

Значит, $AD=2\cos\beta$.

Запишем теорему Птолемея для нашего случая:

$$AC\cdot BD=AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

Подставим найденные ранее длины соответствующих отрезков, получаем

$$2\cdot 2\sin\left(\alpha+\beta\right)=2\cos\alpha\cdot 2\sin\beta+2\sin\alpha\cdot 2\cos\beta .$$

Сокращая обе части последнего равенства на число 4, получим формулу синуса суммы двух углов

$$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta .$$

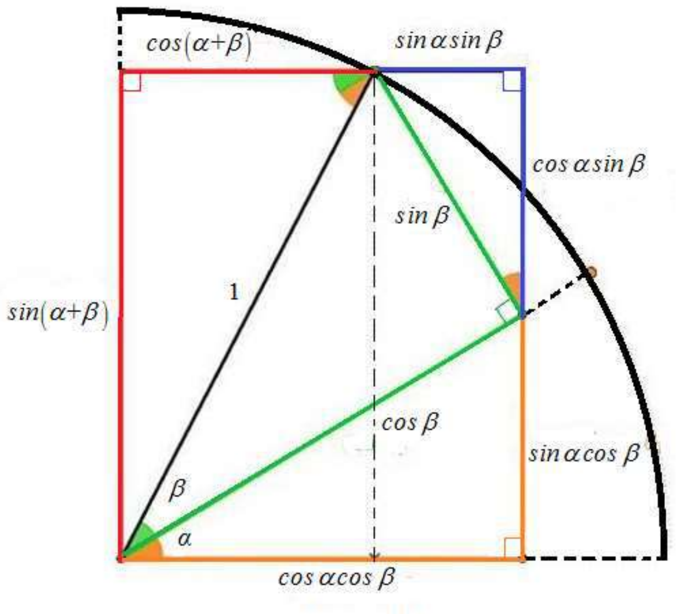


Рис. 1.13.5

На Рис. 1.13.5. представлена ещё одна геометрическая интерпретация сразу двух формул синуса суммы и косинуса суммы.

Пример 1.13.1. Вычислить $\dfrac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \sin 20^\circ}{\cos 19^\circ \cos 11^\circ - \sin 19^\circ \sin 11^\circ}$.

Решение. Воспользуемся формулами *синуса суммы* и *косинуса суммы*, получим

$$\frac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \sin 20^\circ}{\cos 19^\circ \cos 11^\circ - \sin 19^\circ \sin 11^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = tg 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Замечание. Можно доказать справедливость ***обобщенных теорем сложения:***

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\sin\sum_{i=1}^{n} a_i = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n \cdot \left[p_1 - p_3 + p_{5..} - \ldots \right] \qquad (1.13.3^*)$$

где $p_1 = tg\alpha_1 + tg\alpha_2 + \ldots,\ p_2 = tg\alpha_1 tg\alpha_2 + tg\alpha_1 tg\alpha_3 + \ldots.$

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma) = \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$\cos\sum_{i=1}^{n} a_i = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \ldots \cos\alpha_n \cdot \left[1 - p_2 + p_{4..} - \ldots \right] \qquad (1.13.1^*)$$

$$tg(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{tg\alpha + tg\beta + tg\gamma - tg\alpha tg\beta tg\gamma}{1 - tg\alpha tg\beta - tg\alpha tg\gamma - tg\beta tg\gamma}.$$

§ 1.14. Формулы кратного аргумента

В тождественных преобразованиях тригонометрических выражений, а также при решении тригонометрических уравнений и неравенств важную роль играют так называемые ***формулы двойного аргумента***:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \qquad (1.14.1)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \qquad (1.14.2)$$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha},\ \alpha \ne \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \alpha \ne \frac{\pi}{2} + \pi n, k, n \in Z; \qquad (1.14.3)$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha},\ \alpha \ne \frac{\pi k}{2}, \alpha \ne \pi n, k, n \in Z. \qquad (1.14.4)$$

Приведём доказательства каждой из этих формул.

Для доказательства формулы (1.14.1) можем воспользоваться формулой *синуса суммы*.

Действительно, положим в формуле

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$\beta=\alpha$, будем иметь

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

или

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

что и доказывает справедливость формулы синуса двойного угла.

Перейдём к доказательству формулы (1.14.2), для этого воспользуемся формулой *косинуса суммы*.

Действительно, положим в формуле

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$\beta=\alpha$, будем иметь

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

или

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,$$

тем самым получили результат, соответствующий формуле (1.14.2).

Замечание 1. С помощью основного тригонометрического тождества формула косинуса двойного угла может быть модифицирована, причём дважды. Сначала можно получить аналог формулы (1.14.2), в правой части которого будет присутствовать только функция косинус, а затем – только синус.

Т.к. основное тригонометрическое тождество имеет два следствия:

$$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha \text{ и } \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\text{, то}$$

заменим сначала в формуле (1.14.2) слагаемое $\sin^2\alpha$ на равное ему $1-\cos^2\alpha$, получим

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\left(1-\cos^2\alpha\right)=2\cos^2\alpha-1.$$

Итак,

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

Аналогично, заменив слагаемое $\cos^2\alpha$ на $1-\sin^2\alpha$, получим

$$\cos 2\alpha=1-\sin^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

В связи с эти формулу косинуса двойного аргумента следует переписать в виде

$$\cos 2\alpha = \left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \\ 2\cos^2\alpha - 1, \\ 1 - 2\sin^2\alpha. \end{array}\right. \tag{1.14.2*}$$

Перейдем к доказательству формулы *тангенса двойного аргумента*.

$$tg2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}.$$

Тем самым получили формулу (1.14.3). Следует отметить, что эта формула справедлива не для всех значений аргумента, а лишь для тех, которые удовлетворяют условиям $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, k, n \in Z$.

Аналогично,

$$ctg2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}{\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}.$$

Тем самым получили формулу (1.14.4). Эта формула также имеет ограничения в плане её применимости. Она верна лишь для тех аргументов, которые удовлетворяют условиям $\alpha \neq \frac{\pi k}{2}, \alpha \neq \pi n, k, n \in Z$.

Замечание 2. Формулы тангенса и котангенса двойного аргумента также могут быть модифицированы, их можно переписать в виде:

$$tg2\alpha = \frac{2}{ctg\alpha - tg\alpha}, \tag{1.14.3*}$$

$$ctg2\alpha = \frac{ctg\alpha - tg\alpha}{2}. \tag{1.14.4*}$$

Формулы (1.14.3*) и (1.14.4*) следуют непосредственно из формул (1.14.3) и (1.14.4) путем деления числителя и знаменателя их правых частей на $tg\alpha$ и $ctg\alpha$ соответственно. Следует помнить, что область применимости модифицированных формул также ограничена.

Пример 1.14.1. Доказать справедливость равенства

$$\cos\frac{\pi}{65}\cdot\cos\frac{2\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\pi}{65} = \frac{1}{64}.$$

Решение. Обозначим левую часть доказываемого равенства через *A*. Умножим и разделим одновременно *A* на $2\sin\frac{\pi}{65}$, получим

$$A=\frac{2\sin\frac{\pi}{65}\cos\frac{\pi}{65}\cdot\cos\frac{2\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\pi}{65}}{2\sin\frac{\pi}{65}}.$$

Замечаем, что в числителе дроби появилась формула синуса двойного угла. Применяя её, а также деля и умножая на 2 полученное выражение, будем иметь

$$A=\frac{2\sin\frac{2\pi}{65}\cdot\cos\frac{2\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\pi}{65}}{4\sin\frac{\pi}{65}}.$$

Поступая так и далее, получим цепочку похожих равенств:

$$A=\frac{2\sin\frac{4\pi}{65}\cdot\cos\frac{4\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\pi}{65}}{8\sin\frac{\pi}{65}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{8\pi}{65}\cdot\cos\frac{8\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\pi}{65}}{16\sin\frac{\pi}{65}}=\frac{2\sin\frac{16\pi}{65}\cdot\cos\frac{16\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\pi}{65}}{32\sin\frac{\pi}{65}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{32\pi}{65}\cdot\cos\frac{32\pi}{65}}{64\sin\frac{\pi}{65}}=\frac{\sin\frac{\pi}{65}}{64\sin\frac{\pi}{65}}=\frac{1}{64}.$$

Итак, $A=\frac{1}{64}$, что и требовалось доказать.

Немаловажную роль в тригонометрии играют ещё и ***формулы тройного аргумента***:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha; \qquad (1.14.5)$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha; \qquad (1.14.6)$$

$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{6}(2n+1), n\in Z; \qquad (1.14.7)$$

$$ctg3\alpha=\frac{3ctg\alpha-ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi k}{3}, k\in Z. \qquad (1.14.8)$$

Докажем сначала первые две из представленных формул. Имеем:

$$\sin 3\alpha = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos\alpha =$$
$$= \sin\alpha\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) + 2\sin\alpha\cos^2\alpha = \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cdot\left(1 - \sin^2\alpha\right) =$$
$$= \sin\alpha - 2\sin^3\alpha + 2\sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Тем самым показана справедливость формулы (1.14.5).

$$\cos 3\alpha = \cos(\alpha + 2\alpha) = \cos\alpha\cos 2\alpha - \sin\alpha\sin 2\alpha =$$
$$= \cos\alpha\left(2\cos^2\alpha - 1\right) - 2\sin^2\alpha\cos\alpha = 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\left(1 - \cos^2\alpha\right)\cos\alpha =$$
$$= 2\cos^3\alpha - \cos\alpha - 2\cos\alpha + 2\cos^3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha.$$

Доказана также справедливость формулы (1.14.6).

Далее докажем формулу (1.14.7):

$$tg3\alpha = tg(2\alpha + \alpha) = \frac{tg2\alpha + tg\alpha}{1 - tg2\alpha\cdot tg\alpha} = \frac{\dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} + tg\alpha}{1 - \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}\cdot tg\alpha} =$$
$$= \frac{\left(2tg\alpha + tg\alpha - tg^3\alpha\right)\cdot\left(1 - tg^2\alpha\right)}{\left(1 - tg^2\alpha\right)\cdot\left(1 - tg^2\alpha - 2tg^2\alpha\right)} = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1 - 3tg^2\alpha}.$$

Аналогично доказывается формула котангенса тройного аргумента.

Следует отметить, что существуют альтернативные формулы тройного аргумента. Приведём их без доказательства.

$$\sin 3\alpha = 4\sin\alpha\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right); \qquad (1.14.9)$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos\alpha\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right); \qquad (1.14.10)$$

$$tg3\alpha = tg\alpha\cdot tg\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cdot tg\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right); \qquad (1.14.11)$$

$$ctg3\alpha = ctg\alpha\cdot ctg\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cdot ctg\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right). \qquad (1.14.15)$$

Пример 1.14.2. Проверить справедливость равенства

$$tg^6 20^\circ - 33\cdot tg^4 20^\circ + 27\cdot tg^2 20^\circ = 3.$$

Решение. Положим сначала $tg^2 20^\circ = y$. Тогда данное равенство можем переписать в виде

$$y^3 - 33\cdot y^2 + 27\cdot y = 3 \text{ или } y^3 - 6y^2 - 27y^2 + 9y + 18y = 3.$$

Далее

$$y^3 - 6y^2 + 9y = 3 - 18y + 27y^2,$$

$$y\left(y^2 - 6y + 9\right) = 3\left(1 - 6y + 9y^2\right),$$

$$y(y-3)^2 = 3(1-3y)^2,$$

$$\frac{y(y-3)^2}{(1-3y)^2} = 3,$$

Извлечём квадратный корень из обеих частей последнего равенства

$$\sqrt{\frac{y(y-3)^2}{(1-3y)^2}} = \sqrt{3},$$

$$\sqrt{y} \cdot \frac{y-3}{1-3y} = \sqrt{3},$$

Подставим вместо y обратно $tg^2 20^\circ$, получим

$$\sqrt{tg^2 20^\circ} \cdot \frac{tg^2 20^\circ - 3}{1 - 3 \cdot tg^2 20^\circ} = \sqrt{3},$$

$$tg 20^\circ \cdot \frac{tg^2 20^\circ - 3}{1 - 3 \cdot tg^2 20^\circ} = \sqrt{3},$$

$$\frac{tg^3 20^\circ - 3 \cdot tg 20^\circ}{1 - 3 \cdot tg^2 20^\circ} = \sqrt{3}.$$

В левой части последнего равенства стоит формула тангенса тройного угла, поэтому

$$tg\left(3 \cdot 20^\circ\right) = \sqrt{3},$$

$$tg 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{3},$$

Тем самым получили верное числовое равенство, что и доказывает справедливость исходного равенства.

Формулы двойного аргумента можно получить из формул сложения аргументов. Мы покажем, как получить более общие формулы.

Чтобы вывести общее выражение для $cos\, n\alpha$ и $sin\, n\alpha$, достаточно в формулах сложения (1.13.1) и (1.13.3) все α_i заменить на α, то есть, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha$, тогда:

$$cos\, n\alpha = cos^n \alpha - C_n^2 sin^2 \alpha\, cos^{n-2} \alpha + C_n^4 sin^4 \alpha\, cos^{n-4} \alpha - \ldots \qquad (1.14.16)$$

Последний член в этой формуле равен $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\ n\cdot cos\alpha\cdot sin^{n-1}\alpha$ для нечётного n или $(-1)^{\frac{n}{2}} sin^n\alpha$ для чётного n.

$$cos\,n\alpha = cos^n\alpha - C_n^2 sin^2\alpha\, cos^{n-2}\alpha + C_n^4 sin^4\alpha\, cos^{n-4}\alpha - ... \qquad (1.14.17)$$

Последний член в этой формуле равен $(-1)^{\frac{n-1}{2}}\ sin^n\alpha$ для нечётного n или $(-1)^{\frac{n-2}{2}}\ n\cdot sin^{n-1}\alpha$ – для чётного n.

Замечание 3: для формул (1.14.16) и (1.14.17)в классической литературе можно встретить специальные обозначения $C_n\alpha$ и $S_n\alpha$ соответственно.

Эти формулы можно получить другим способом, воспользовавшись формулой Муавра из теории комплексных чисел: $(cos\alpha + i\,sin\alpha)^n = cos\,n\alpha + i\,sin\,n\alpha$. Левую часть этой формулы преобразовывают по формуле бинома Ньютона. Затем приравнивают действительную и мнимую части комплексных чисел, стоящих в левой и правой частях равенства. Из рассмотрения формул $cos\,n\alpha$ и $sin\,n\alpha$ (левых частей), следует, что их можно преобразовать в однородные многочлены (однородным называется многочлен, каждый член которого имеет одинаковую степень переменной) степени n относительно $cos\alpha$ и $sin\alpha$. Левая часть тождества для $cos\,n\alpha$ содержит только чётные степени синуса, их можно выразить через косинус: $sin^{2k}\alpha = \left(1-cos^2\alpha\right)^k$. Тогда формула для $cos\,n\alpha$ примет вид:

$$cos\,n\alpha = cos^n\alpha - C_n^2 cos^{n-2}\alpha(1-cos^2\alpha) + C_n^4 cos^{n-4}\alpha(1-cos^2\alpha)^2 - ...$$

Если в этой формуле $cos\alpha$ заменить на x, то получается многочлен, который называется *n-м полиномом Чебышева*:

$$T_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4 x^{n-4}(1-x^2)^2 - ...$$

Значит, $cos\,n\alpha = T_n(cos\alpha)$.

Далее,

$sin\,n\alpha = sin\alpha(C_n^1 cos^{n-1}\alpha - C_n^3 sin^2\alpha\, cos^{n-3}\alpha + C_n^5 sin^4\alpha\, cos^{n-5}\alpha - ...)$ Выражение в скобках содержит синусы только в чётных степенях, значит, его можно представить в виде многочлена относительно косинуса: $U_n(x) = C_n^1 x^{n-1} - C_n^3(1-x^2)x^{n-3} + C_n^5(1-x)^2 x^{n-5}$. Это выражение носит название *n-го полинома Чебышева II-го рода.* Значит, $sin\,n\alpha = sin\alpha\cdot U_n(cos\alpha)$.

Многочлен $T_n(x)$ имеет n-ю, а $U_n(x)$ n-*1*-ю степень.

Многочлены Чебышёва – это две последовательности многочленов, названные в честь русского математика и механика Пафнутия Львовича Чебышёва. Они могут дать наиболее точное приближение функции. Ошибка этого приближения очень мала. Многочлены (их чаще называют полиномами) Чебышёва используют для корректировки разложения функции в ряд Тейлора.

§ 1.15. Формулы половинного аргумента (*формулы понижения степени*)

Под *формулами половинного аргумента* понимают формулы:

$$sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}\,, \tag{1.15.1}$$

$$cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{2}}\,, \tag{1.15.2}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{1+cos\,\alpha}}\,, \tag{1.15.3}$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+cos\,\alpha}{1-cos\,\alpha}}\,. \tag{1.15.4}$$

Для доказательства формул (1.15.1) и (1.15.2) будем использовать формулу (1.14.2*) из ***§ 1.14***.

Действительно, возьмём соотношение

$$cos\,2\alpha = 1-2sin^2\alpha.$$

Откуда получаем

$$sin^2\alpha = \frac{1-cos\,2\alpha}{2}.$$

Заменим в последнем равенстве α на $\frac{\alpha}{2}$ и 2α на α соответственно, получим

$$sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-cos\,\alpha}{2}.$$

Извлекая корень квадратный из обеих частей этого равенства, будем иметь

$$sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-cos\,\alpha}{2}}.$$

Тем самым формула (1.16.1) *синуса половинного аргумента* доказана.

Возьмём теперь соотношение

$$cos\,2\alpha = 2cos^2\alpha - 1.$$

Откуда

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Делая замену α на $\frac{\alpha}{2}$ и 2α на α соответственно, получим

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Извлекая теперь корень квадратный из обеих частей этого равенства, будем иметь

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Тем самым показана справедливость формулы *косинуса половинного аргумента* (1.15.2).

Для получения формулы *тангенса половинного аргумента* поступим следующим образом:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

Таким образом, мы получили формулу (1.15.3).

Далее воспользуемся соотношением, связывающим тангенс и котангенс одного и того же аргумента

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{tg\frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Получена формула (1.15.4).

<u>Замечание 1</u>. Формулы (1.15.3) и (1.15.4) могут быть представлены в несколько ином виде, а именно:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad (1.15.3^*)$$

$$ctg\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}. \qquad (1.15.4^*)$$

Приведём лишь доказательство формулы (1.15.3*), ибо формула (1.15.4*) может быть получена аналогичным способом.

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{sin\frac{\alpha}{2}}{cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2sin\frac{\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha}{2}}{2cos\frac{\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)}{2cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{sin\alpha}{1+cos\alpha}=\frac{sin\alpha\cdot(1-cos\alpha)}{(1+cos\alpha)\cdot(1-cos\alpha)}=$$

$$=\frac{sin\alpha\cdot(1-cos\alpha)}{1-cos^2\alpha}=\frac{sin\alpha\cdot(1-cos\alpha)}{sin^2\alpha}=\frac{1-cos\alpha}{sin\alpha}.$$

Из формул половинного аргумента непосредственно вытекают так называемые ***формулы понижения степени***.

Действительно, формулы (1.15.1) и (1.15.2), записанные соответственно виде

$$sin^2\alpha=\frac{1-cos\,2\alpha}{2} \qquad (1.15.5)$$

и

$$cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+cos\,\alpha}{2} \qquad (1.15.6)$$

представляют собой формулы понижения степени.

Пример 1.15.1. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения $sin^4\alpha+cos^4\alpha$.

Решение. Воспользуемся формулами понижения степени

$$sin^4x+cos^4x=\left[\frac{(1\text{-}cos2x)}{2}\right]^2+\left[\frac{(1+cos2x)}{2}\right]^2=\frac{(1\text{-}cos2x)^2+(1\text{-}cos2x)^2}{4}=$$

$$=\frac{1-2cos2x+cos^2 2x+1+2cos2x+cos^2 2x}{4}=\frac{2+2cos^2 2x}{4}=\frac{1+cos^2 2x}{2}.$$

Теперь ясно, что наибольшее значение достигается при $cos^2 2x=1$, а наименьшее – при $cos^2 2x=0$. Итак, наибольшее значение выражения равно 1, а наименьшее равно 0,5.

***Замечание* 2**. К формулам понижения степени можно отнести также:

$$sin^3\alpha=\frac{1}{4}(3sin\alpha-sin3\alpha) \qquad (1.15.7)$$

и

$$cos^3\alpha=\frac{1}{4}(3cos\alpha+cos3\alpha), \qquad (1.15.8)$$

которые непосредственно вытекают из формул синуса и косинуса тройного аргумента.

Пример 1.15.2. Упростите выражение $sin^3\frac{x}{3}+3sin^3\frac{x}{9}+9sin^3\frac{x}{27}$.

Решение.

$$sin^3\frac{x}{3}+3sin^3\frac{x}{9}+9sin^3\frac{x}{27}=\frac{1}{4}\left(3sin\frac{x}{3}-sin\,x\right)+3\cdot\frac{1}{4}\left(3sin\frac{x}{9}-sin\frac{x}{3}\right)+$$

$$+9\cdot\frac{1}{4}\left(3sin\frac{x}{27}-sin\frac{x}{9}\right)=\frac{3}{4}sin\frac{x}{3}-\frac{1}{4}sin\,x+\frac{9}{4}sin\frac{x}{9}-\frac{3}{4}sin\frac{x}{3}+\frac{27}{4}sin\frac{x}{27}-\frac{9}{4}sin\frac{x}{9}=$$

$$=\frac{27}{4}sin\frac{x}{27}-\frac{1}{4}sin\,x=\frac{1}{4}\left(sin\frac{x}{27}-sin\,x\right).$$

§ 1.16. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

Важную роль играют ещё и формулы, позволяющие выполнять обратные действия по отношению к формулам, иллюстрирующим теорему сложения, – так называемые ***формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение***:

$$cos\,x\,cos\,y=\frac{1}{2}\big(cos(x-y)+cos(x+y)\big); \qquad (1.16.1)$$

$$sin\,x\,sin\,y=\frac{1}{2}\big(cos(x-y)-cos(x+y)\big); \qquad (1.16.2)$$

$$sin\,x\,cos\,y=\frac{1}{2}\big(sin(x+y)+sin(x-y)\big). \qquad (1.16.3)$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму можно получить, почленно складывая или вычитая формулы сложения аргументов.

Докажем первую из представленных формул. Имеем:

$$cos(x-y)+cos(x+y)=cos\,x\cdot cos\,y+sin\,x\cdot sin\,y+cos\,x\cdot cos\,y-sin\,x\cdot sin\,y=$$

$$=cos\,x\cdot cos\,y+cos\,x\cdot cos\,y=2cos\,x\cdot cos\,y,\Rightarrow cos\,x\cdot cos\,y=\frac{1}{2}(cos(x-y)+$$

$$+cos(x+y)).$$

Тем самым показана справедливость формулы (1.16.1).

Остальные формулы доказываются аналогично.

Следствие: Последовательным применением формул суммы аргументов, их перемножением, можно любое произведение $cos\,\alpha_1\cdot\ldots\cdot cos\,\alpha_n\cdot sin\,\beta_1\cdot\ldots\cdot sin\,\beta_m$ преобразовать в сумму косинусов и синусов.

<u>Пример 1.16.1</u>. Вычислить произведение

$$sin\,20^\circ\cdot sin\,40^\circ\cdot sin\,80^\circ$$

Решение. Применим сначала формулу (1.16.2):

$$sin20^\circ \cdot sin80^\circ = \frac{1}{2}\left(cos60^\circ - cos100^\circ\right).$$

Тогда данное выражение можно переписать в виде $sin20^\circ \cdot sin40^\circ \cdot sin80^\circ =$

$$\frac{1}{2}\left(cos60^\circ - cos100^\circ\right)\cdot sin40^\circ = \frac{1}{2}cos60^\circ \cdot sin40^\circ - \frac{1}{2}cos100^\circ \cdot sin40^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}sin40^\circ - \frac{1}{2}cos100^\circ \cdot sin40^\circ = \frac{1}{4}sin40^\circ - \frac{1}{2}cos100^\circ \cdot sin40^\circ =$$

$$= \frac{1}{4}sin\left(180^\circ - 140^\circ\right) - \frac{1}{4}\left(sin140^\circ - sin60^\circ\right) = \frac{1}{4}sin140^\circ - \frac{1}{4}sin140^\circ + \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Заметим, что формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму здесь применяются дважды (сначала (1.16.2), а затем (1.16.3)).

§ 1.17. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

Под формулами ***преобразования суммы тригонометрических функций в произведение*** понимают следующие:

$$sin\,x \pm sin\,y = 2sin\frac{x \pm y}{2}cos\frac{x \mp y}{2}; \qquad (1.17.1)$$

$$cos\,x + cos\,y = 2cos\frac{x + y}{2}cos\frac{x - y}{2}; \qquad (1.17.2)$$

$$cos\,x - cos\,y = -2sin\frac{x + y}{2}sin\frac{x - y}{2};. \qquad (1.17.3)$$

$$tg\alpha \pm tg\beta = \frac{sin(\alpha \pm \beta)}{cos\,\alpha\, cos\,\beta} \qquad (1.17.4)$$

Действительно, используем формулы (1.13.3) и (1.13.4):

$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha\, cos\beta + cos\alpha\, sin\beta \quad (*)$$

$$sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\, cos\beta - cos\alpha\, sin\beta \quad (**).$$

В результате почленного сложения и вычитания этих равенств получим:

$$sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha + \beta) = 2sin\alpha\, cos\beta$$

$$sin(\alpha + \beta) - sin(\alpha + \beta) = 2cos\alpha\, sin\beta.$$

Положим в этих равенствах $\alpha + \beta = x, \alpha - \beta = y$. Решая эти уравнения относительно α и β, получим $\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$.

В (*) и (**) подставим выражения для $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, α и β. Получим (1.17.1).

Остальные формулы доказываются аналогично.

Пример 1.17.1. Найти значение дроби $\frac{\sin 4x+\sin 5x+\sin 6x}{\cos 4x+\cos 5x+\cos 6x}$.

Решение. Применим формулы (1.17.1) и (1.17.2), получим:

$$\frac{\sin 4x+\sin 5x+\sin 6x}{\cos 4x+\cos 5x+\cos 6x}=\frac{2\sin 5x\cos x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos x+\cos 5x}=tg5x\frac{2\cos x+1}{2\cos x+1}=tg5x,$$

при условии $x\neq\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$, $x\neq\frac{\pi}{10}(2m+1), m\in Z$.

§ 1.18. Тригонометрические многочлены

Среди выражений, в которые входят тригонометрические функции, есть выражения определённого вида, преобразование к которым является самостоятельной задачей.

Выражение вида $P(\alpha)=a_0+(a_1\cos\alpha+b_1\sin\beta)+\ldots+(a_k\cos k\alpha+b_k\sin k\beta)+\ldots$ $+(a_n\cos n\alpha+b_n\sin n\beta)$ называется ***тригонометрическим многочленом n-го порядка***, при этом $|a_n|+|b_n|\neq 0$.

Теорема. Всякая целая неотрицательная степень косинуса и синуса ($\cos^n x$ и $\sin^m x$), а также всякое произведение этих степеней могут быть преобразованы в тригонометрический многочлен.

Теорема. Всякий тригонометрический многочлен может быть преобразован в многочлен относительно косинуса и синуса: $P(\alpha)=Q(\cos\alpha,\sin\alpha)$, где $P(\alpha)$ – тригонометрический многочлен, $Q(x,y)$ – некоторый многочлен от двух аргументов. При этом порядок тригонометрического многочлена $P(\alpha)$ равен степени соответствующего многочлена $Q(x,y)$ и обратно. Это представление не единственно, так как любая содержащаяся в $Q(x,y)$ чётная степень косинуса (синуса) может быть выражена через синус (косинус).

Пример 1.18.1. Преобразовать выражение в тригонометрический многочлен $2\cos\alpha-\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^3\alpha-\sin^4\alpha$.

Решение. Применим формулы (1.14.1) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ и (1.15.8) $\cos^3\alpha=\frac{3}{4}\cos\alpha+\frac{\cos 3\alpha}{4}$.

Кроме того,

$$\sin^4\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{\cos^2 2\alpha}{4} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}(1 + \cos 4\alpha)\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{8}\cos 4\alpha.$$

Заметим, что при преобразовании последнего выражения мы использовали формулу понижения степени.

Итак:

$$2\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^3\alpha - \sin^4\alpha = 2\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{3}{4}\cos\alpha + \frac{\cos 3\alpha}{4} - \frac{3}{8} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{8}\cos 4\alpha = \frac{11}{4}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha - \frac{1}{8}\cos 4\alpha - \frac{3}{8}.$$

§ 1.19. Преобразование тригонометрических выражений

Тригонометрия обладает достаточно большим арсеналом специфических формул, позволяющих упрощать соответствующие выражения, аналитическое выражение соответствующих функций.

Преобразование тригонометрических выражений осуществляется по правилам. Эти правила общие для всех алгебраических выражений, но, кроме того, есть специфические правила, основывающиеся на принципах работы с углами или дугами.

В тождественных преобразованиях тригонометрических выражений могут быть использованы все известные из алгебры приёмы и методы: сложение или вычитание одинаковых слагаемых, вынесение общего множителя за скобку, умножение и деление на одну и ту же величину, применение формул сокращённого умножения, выделение полного квадрата, разложение трехчлена на множители, введение новой переменной с целью упрощения преобразований.

При преобразовании тригонометрических выражений, содержащих дроби, рекомендуется использовать: свойства пропорции, основное свойство дроби, правило приведения дробей к общему знаменателю, выделение целой части в дроби, учёт однородности числителя или знаменателя, представление дроби в виде суммы или разности нескольких более простых дробей.

Основой выполнения тождественных преобразований тригонометрических выражений являются рассмотренные нами выше теоремы сложения и вытекающие из них следствия, а также основные тригонометрические тождества. Но тождественные преобразования тригонометрических выражений, как по цели, так и по методам, весьма разнообразны. Навыки в рациональном выполнении преобразований достигаются практикой.

Итак, в зависимости от используемых методов и приемов, можно выделить несколько групп однотипных задач, относительно преобразования которых можно дать следующие методические указания.

Применяя *метод группировки*, рекомендуется:

- выделить в рассматриваемом выражении те значения тригонометрических функций, у которых аргументы в сумме или разности дают угол, кратный $\frac{\pi}{2}$, затем сгруппировать их соответствующим образом и упростить по формулам приведения;
- определить и соответствующим образом сгруппировать те члены рассматриваемого выражения, которые после преобразований по основным тригонометрическим тождествам дают известные значения тригонометрических функций;
- для членов рассматриваемого выражения, содержащих разновеликие коэффициенты, провести, в случае необходимости, соответствующее выравнивание коэффициентов путем добавления и вычитания одинаковых слагаемых.

<u>Пример 1.19.1</u>. Вычислить сумму $ctg9^0-ctg27^0+ctg81^0-ctg63^0$.

Решение. Сгруппируем слагаемые, руководствуясь предложенными выше рекомендациями, так, чтобы аргументы, попавшие в одну группу, в сумме давали 90^0:

$$(ctg9^0+ctg81^0)-(ctg27^0+ctg63^0)=\left(\frac{\cos9^0}{\sin9^0}+\frac{\cos81^0}{\sin81^0}\right)-\left(\frac{\cos27^0}{\sin27^0}+\frac{\cos63^0}{\sin63^0}\right)=$$

$$=\frac{\cos9^0\cdot\sin81^0+\cos81^0\cdot\sin9^0}{\sin9^0\cdot\sin81^0}-\frac{\cos27^0\cdot\sin63^0+\cos63^0\cdot\sin27^0}{\sin27^0\cdot\sin63^0}=$$

$$=\frac{\sin90^0}{\sin9^0\cdot\sin81^0}-\frac{\sin90^0}{\sin27^0\cdot\sin63^0}=\frac{\sin90^0}{\sin9^0\cdot\sin(90^0-9^0)}-\frac{\sin90^0}{\sin27^0\cdot\sin(90^0-27^0)}=$$

$$=\frac{1}{\sin9^0\cdot\cos9^0}-\frac{1}{\sin27^0\cdot cos27^0}=\frac{2}{\sin18^0}-\frac{2}{\sin54^0}=2\frac{\sin54^0-\sin18^0}{\sin18^0\sin54^0}=$$

$$=4\frac{\sin18^0\cdot\cos36^0}{\sin18^0\sin(90^0-36^0)}=4\frac{\cos36^0}{\cos36^0}=4.$$

Заметим, что, помимо основного, определяющего путь решения, метода группировки, в решении этого примера использовались тригонометрические формулы различных групп.

Метод домножения используется, когда рассматриваемое выражение преобразовывается путем умножения и деления соответствующих членов на подходящую тригонометрическую функцию. Например:

- для произведения вида $cos\,x\,cos\,2x\cdot\ldots\cdot cos\left(2^k x\right)$ рекомендуется умножение и деление на $2^{k+1}\,sin\,x$;

- суммы $\cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$ и $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$ преобразуются умножением и делением на $2\sin\frac{x}{2}$ с последующим применением формул преобразования произведения в сумму или разность.

Пример 1.19.2. Найти сумму $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

Умножим и разделим данное выражение на $2\sin\frac{\pi}{7}$.

Тогда

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{\pi}{7}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cdot\cos\frac{6\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\pi - \sin\frac{5\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

Метод получения уравнений для искомой величины рекомендуется, если, после ряда преобразований, можно свести вычисление рассматриваемого выражения к решению соответствующего уравнения или системы уравнений относительно требуемой величины.

Пример 1.19.3. Вычислить $\sin 18^0$.

Решение. Используем соотношения между дополнительными углами $\sin 36^0 = \sin(90^0 - 54^0) = \cos 54^0$.

Далее используем формулы кратного аргумента:

$$\begin{aligned} \sin 36^0 &= 2\sin 18^0 \cos 18^0 \\ \cos 54^0 &= 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0 \end{aligned}.$$

Затем объединяем полученные результаты:

$$2\sin 18^0 \cos 18^0 = 4\cos^3 18^0 - 3\cos 18^0,$$

$$2\sin 18^0 = 4\cos^2 18^0 - 3,$$

$$2\sin 18^0 = 1 - 4\sin^2 18^0.$$

Преобразования проводились при условии $\sin 18^0 \neq 0$, что очевидно, так как 18^0 – угол первой четверти, отличный от 0.

Далее трактуем запись $2\sin 18^0 = 1 - 4\sin^2 18^0$ как верное числовое равенство (это доказано, так как для вывода его применялись тождества), которое получается при подстановке корня вместо переменной.

Зададимся вопросом – как выглядело уравнение, в которое подставлялся корень $\sin 18^0$. Это уравнение $4a^2 + 2a - 1 = 0$. Значит, число $a = \sin 18^0 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, так как $a > 0$.

Существует такой тип тождественных преобразований, который предполагает *исключение неизвестных из системы уравнений*. Требуется найти необходимые (в общем случае не достаточные) условия в виде уравнений, которым должны удовлетворять значения параметров, чтобы данная система имела решения. То есть, в результате преобразований неизвестные должны «исчезнуть», а останется только равенство, выражающее зависимость между параметрами, если их несколько, или значение параметра, если параметр один. При выполнении таких преобразований надлежит руководствоваться следующими указаниями:

1) допустимы преобразования уравнений, в результате которых множество всех решений системы расширяется (то есть, возможно появление посторонних решений), но недопустимы преобразования, при которых происходит потеря решений;

2) преобразования уравнений выполняются с тем расчётом, чтобы в качестве следствий из данных уравнений получились уравнения между параметрами, не содержащие неизвестных и не обращающиеся в тождество.

<u>Пример 1.19.4</u>. Исключить x из системы уравнений $\begin{cases} tg^2x+ctg^2x=a, \\ tg^4x+ctg^4x=b. \end{cases}$

Решение. Требуется найти соотношение между параметрами a и b, являющиеся необходимым, но не достаточным, при которых выполняются оба данных равенства.

Возведём в квадрат первое равенство: $tg^4x+ctg^4x+2tg^2x\cdot ctg^2x=a^2$.

В силу второго равенства и, учитывая, что $tgx\cdot ctgx=1$, получаем $b+2=a^2$.

Преобразование тригонометрических выражений можно производить, введя новую неизвестную с целью рационализации.

Теорема. Для любой функции $R(\cos x, \sin x)$, рациональной относительно $\cos x$ и $\sin x$, подстановка $t=tg\dfrac{x}{2}$ является рационализирующей, то есть, если функция $R(\cos x,\sin x)$ может быть представлена в виде сложной функции от промежуточного аргумента $t=f(x)$, то есть, $R(\cos x,\sin x)=R_1(t)$, где $R_1(t)$ – рациональная функция.

Доказательство. Докажем, что $\cos x$ и $\sin x$ рационально выражаются через $t=tg\dfrac{x}{2}$.

Так,

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

В ходе доказательства использовалась формула 1.14.2 с последующим делением числителя и знаменателя на одно и то же выражение. В частности, на $\cos^2\frac{x}{2}$.

Замечание: Подстановку $t = tg\frac{x}{2}$ называют *универсальной.*

Не только $t = tg\frac{x}{2}$ является рационализирующей подстановкой. Есть и другие случаи, в которых рационализация может быть достигнута посредствам более простых подстановок:

1) если $R(\cos x, \sin x)$ содержит тригонометрические функции только в четных степенях, то $t = \sin x$ ($t = \cos x$) – рационализирующая подстановка, так как $\cos^{2k} x = \left(1-\sin^2 x\right)^k = \left(1-t^2\right)^k$, $R(\cos^2 x, \sin x) = R\left(1-t^2, t\right)$;

2) если числитель и знаменатель выражения $R(\cos x, \sin x)$, являющегося алгебраической дробью относительно $\cos x$ и $\sin x$, есть однородные многочлены одной и той же степени k относительно $\cos x$ и $\sin x$, то $t = tgx$ ($t = ctgx$) – рационализирующая подстановка; тогда $\sin x = t \cdot \cos x$; после замены все члены числителя и знаменателя будут иметь общий множитель $\cos^k x$, на который и производят сокращение;

3) если все члены числителя и знаменателя выражения $R(\cos x, \sin x)$ имеют чётную (нечётную) степень относительно $\cos x$ ($\sin x$), то подстановка $t = tgx$ – рационализирующая; степени двух различных членов числителя и знаменателя отличаются друг от друга на чётное число единиц, следовательно, можно заменить числитель и знаменатель тождественными однородными многочленами, то есть, умножить члены более низких степеней на некоторую степень тригонометрической единицы;

4) если функция $R(\cos x, \sin x)$– чётная, то подстановка $t = \cos x$– рационализирующая.

Следствие к 4): если $R(\cos x, \sin x)$– нечётная функция, то $\frac{1}{\sin\alpha}R(\cos\alpha, \sin\alpha)$ – чётная функция.

<u>Пример 1.19.5</u>. Выразить через тангенс и котангенс дробь $\frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Решение.

$$\frac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)^2}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + 2\cos^2 x\cdot\sin^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} =$$
$$\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} + 2 + \frac{\sin^4 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = ctg^2 x + tg^2 x + 2.$$

Преобразования посредством *введения вспомогательного угла* в общем виде можно характеризовать следующим образом: данное число или выражение рассматривается как значение тригонометрической функции от некоторого аргумента, называемого вспомогательным углом (вспомогательным аргументом). Из множества всех возможных значений для вспомогательного угла выбирается одно, вполне определённое значение. Этим выбором вспомогательный угол по заданному значению его тригонометрической функции вполне определяется и в дальнейших преобразованиях считается известным.

Итак, рассмотрим равенство $a\sin x + b\cos x = c$, $a^2 + b^2 \neq 0$. Разделим левую и правую части его на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, то существует угол φ, такой, что $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, при этом $\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (или $\varphi = \arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$).

Тогда равенство примет вид: $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\Rightarrow$,

$x + \varphi = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, \Rightarrow$,

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} - \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k, k \in Z.$$

<u>Пример 1.19.6</u>. Докажите, что $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

Решение.

$$\frac{1+sin2\alpha}{cos2\alpha}=\frac{(1+sin2\alpha)\cdot(1-sin2\alpha)}{cos2\alpha\cdot(1-sin2\alpha)}=\frac{1-sin^2 2\alpha}{cos2\alpha\cdot(1-sin2\alpha)}=\frac{cos^2 2\alpha}{cos2\alpha\cdot(1-sin2\alpha)}$$

$$=\frac{cos2\alpha}{1-sin2\alpha}=\frac{cos^2\alpha-sin^2\alpha}{sin^2\alpha-2sin\alpha cos\alpha+cos^2\alpha}=\frac{(cos\alpha-sin\alpha)\cdot(cos\alpha+sin\alpha)}{(cos\alpha-sin\alpha)^2}=$$

$$=\frac{cos\alpha+sin\alpha}{cos\alpha-sin\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}cos\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}sin\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}cos\alpha-s\frac{\sqrt{2}}{2}in\alpha}=\frac{\sqrt{2}cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sqrt{2}sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=ctg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=$$

$$=tg\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

К выбору угла φ в задачах с параметрами надо относиться внимательно, так как выбор $\varphi=arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\varphi=arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ не всегда равносилен.

Введение вспомогательного угла используется при:

1) *переходе к полярным координатам;* если хотя бы одно из чисел a или b отлично от 0, то в $[0,2\pi)$ или $(-\pi,\pi]$ существует единственное значение φ, при котором $a=r\cos\varphi$ и $b=r\sin\varphi$, а $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

Если a и b есть действительная и мнимая части комплексного числа $z=a+bi$, то переход к полярным координатам означает переход к тригонометрической форме комплексного числа: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

2) *преобразовании суммы вида* $a\,sin\alpha x+b\,cos\alpha x$*;* для этого вводят полярные координаты, тогда

$$a\,sin\alpha x+b\,cos\alpha x=r\,sin(\alpha x+\varphi)=r\,cos(\alpha x-\psi).$$

3) *применении различных приемов преобразования алгебраических сумм в произведения, содержащих в качестве множителей известные числа и тригонометрические функции от вспомогательного аргумента;*

1^0. Дано: $a+b$. Введем $\alpha=arctg\frac{b}{a}$, тогда

$$a+b=a\left(1+\frac{b}{a}\right)=a(1+tg\alpha)=\frac{\sqrt{2}a\,sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{cos\alpha}$$

(последний шаг выполнен с использованием одного из следствий формул преобразования суммы тригонометрических функций в произведение).

2^0. $a-b=\dfrac{\sqrt{2}a\,sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{cos\alpha}$.

3^0. Если $ab>0$, то $\frac{b}{a}>0$ и $\alpha=arctg\sqrt{\frac{b}{a}}$, то

$a+b=a(1+tg^2\alpha)=a\,sec^2\alpha,\ a-b=a(1-tg^2\alpha)=a\cdot\frac{cos2\alpha}{sec^2\alpha}$.

4^0. $\frac{a-b}{a+b}=\left[\alpha=arctg\frac{b}{a}\right]=\frac{1-tg\alpha}{1+tg\alpha}=tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

5^0. Если $|b|\le|a|$, вводим $\alpha=arcsin\frac{b}{a}$ и тогда

$$a^2-b^2=a^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=a^2(1-\sin^2\alpha)=a^2\cos^2\alpha$$

Если же $\beta=arccos\frac{b}{a}$, то $a^2-b^2=a^2\,sin^2\beta$.

6^0. Если $|b|\le|a|$, $\beta=arccos\frac{b}{a}$, то $a^2-b^2=b^2\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)=b^2(sec^2\beta-1)=b^2tg^2\beta$.

7^0. Если $\alpha=arctg\frac{b}{a}$, то $a^2+b^2=a^2\,sec^2\alpha$ (используем 3^0).

Введением вспомогательного аргумента пользуются для преобразования некоторых иррациональных выражений в рациональные относительно тригонометрической функции от вспомогательного угла, например:

1) $R(x,\sqrt{a^2-x^2}),a>0,R(u,v)$ – рациональная функция, где $-a\le x\le a$ $x=a\,cost,\ t=arccos\frac{x}{a}$, тогда $\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\cos^2 t)}=a|\sin t|$;

2) $R(x,\sqrt{x^2-a^2})$, причём $|x|\ge a$. Вводится подстановка $x=a\,sect$ или $t=arccos\frac{a}{x}$, тогда $\sqrt{x^2-a^2}=a|tgt|=\begin{cases}atgt, a\le x<+\infty\\ -atgt,-\infty<x\le -a.\end{cases}$

3) $R(x,\sqrt{x^2+a^2})$. Вводится подстановка $x=a\cdot tgt$ и $\sqrt{x^2+a^2}=a\cdot sect$.

Указанные подстановки применяются в математическом анализе при интегрировании выражений и при вычислении суммы косинусов и синусов дуг, образующих арифметическую прогрессию:

$\cos\alpha+\cos(\alpha+h)+\cos(\alpha+2h)+...+ +\cos(\alpha+nh)=\sum\limits_{k=0}^{n}\cos(\alpha+kh)$.

Имеем:

$$sin\frac{h}{2}cos\alpha=\frac{1}{2}\left[sin\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)-sin\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)\right];$$

$$sin\frac{h}{2}cos(\alpha+h)=\frac{1}{2}\left[sin\left(\alpha+\frac{3h}{2}\right)-sin\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)\right]\ldots$$

Сложим почленно и разделим на $sin\frac{h}{2}$, получится:

$$\sum_{k=0}^{n} cos(\alpha+kh)=\frac{1}{2sin\frac{h}{2}}\left[sin\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}h\right)-sin\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)\right]=\frac{cos\left(\alpha+\frac{nh}{2}\right)\cdot sin\frac{n+1}{2}\cdot h}{sin\frac{h}{2}}$$

Если заменить α на $\frac{\pi}{2}-\alpha$, а h на $-h$, то получим

$$\sum_{k=0}^{n} sin(\alpha+kh)=\frac{sin(\alpha+\frac{nh}{2})\cdot sin\frac{n+1}{2}\cdot h}{sin\frac{h}{2}}.$$

ГЛАВА II. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

§ 2.1. Арксинус

Рассмотрим функцию $y = sinx$. Так как её областью определения является вся ось Ox ($-\infty<x<+\infty$), а областью значений – отрезок [–1, 1] оси Oy ($-1\le y\le 1$), то об обратной функции (по отношению к функции $y = sinx$) можно говорить лишь на отрезке [–1, 1] оси Oy.

Рассмотрим, например, значение $y = 0$. Функция $y = sinx$ достигает этого значения на бесконечном множестве (очевидно, что это происходит при значениях аргумента $x=\pi k$, см. Рис. 2.1.1).По данному значению y невозможно найти одно единственное значение x. Значит, на всей оси Ox функция $y = sinx$ обратной (однозначной) функции не имеет.

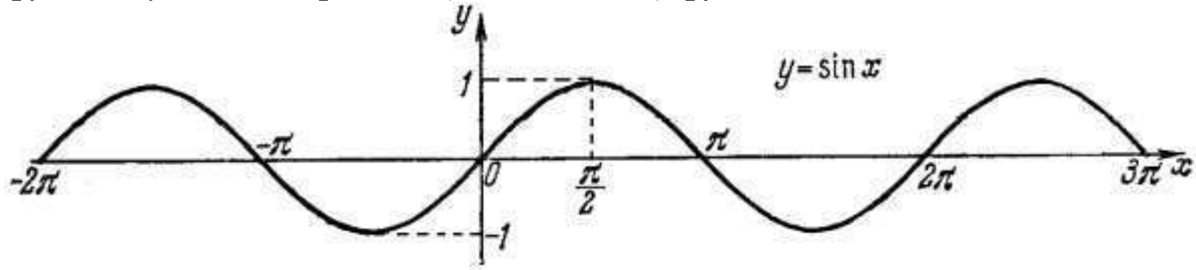


Рис. 2.1.1

Переход к обратной функции станет возможным, если рассматривать $y = sinx$ не при произвольных значениях x, а лишь на каком-либо промежутке, в котором эта функция является монотонной.

В качестве промежутка оси Ox, на котором рассматривается функция $y = sinx$ в купе с обратной к ней функцией, обычно берут отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Очевидно, что на промежутке $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ функция $y = sinx$ возрастает, принимая все значения, изменяющиеся от –1 до +1. Следовательно, для любого y_0 из отрезка [-1, 1] оси Oy найдется, и притом только одно значение, значение x_0 из отрезка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ оси Ox такое, что $y_0=sin x_0$ на указанном отрезке существует обратная (однозначная) функция которую математики условились называть *арксинусом*.

✍Функция, обратная функции $y = sin\, x$, на отрезке $-1\le x\le 1$, называется ***арксинусом*** и обозначается $y=arcsin\, x$.

Иначе говоря, символом $arcsin\, x$ обозначается дуга единичной окружности, взятая на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус которой равен x.

Пример 2.1.1. Найти $\alpha = arc\sin 0{,}5$.

Данный пример подробно можно сформулировать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен 0,5.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, синус которых равен 0,5. Это, например, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{13\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$ и т.д. Нас интересует только тот аргумент, который принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Таким образом, искомым аргументом будет $\frac{\pi}{6}$. Итак, $arc\sin 0{,}5 = \frac{\pi}{6}$.

Замечание. Если же аргумент x тригонометрической функции трактуется как угол или дуга, то и $arc\sin y$ следует понимать как угол или соответствующую дугу.

Используя общее правило построения графика обратной функции, знаем, что он должен быть симметричен с графиком основной функции относительно биссектрисы I и III координатных углов. Поэтому для фрагмента графика функции $y = \sin x$, где $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ построим симметрично ему относительно прямой y=x другой график (см. Рис. 2.1.2). Это и будет график функции $y = arc\sin x$.

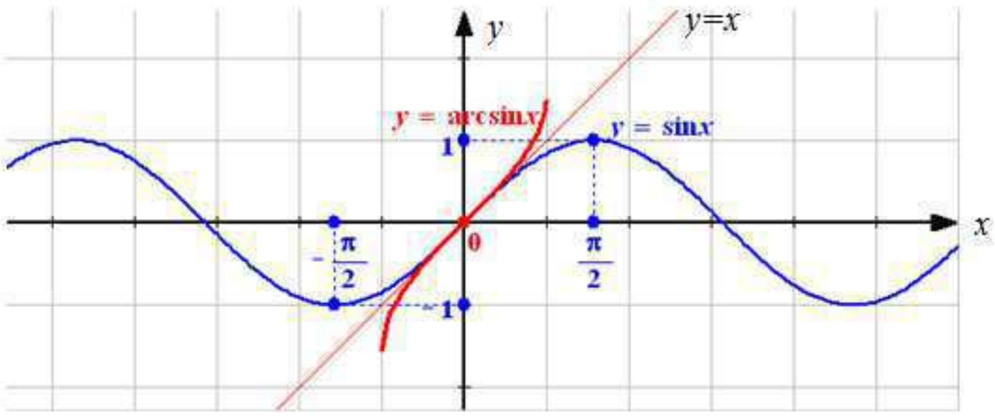


Рис. 2.1.2

Рассмотрим ещё один способ получения арксинуса. В этом случае надо поменять ролями аргумент и функцию в записи $y = \sin x$.

Таким образом, получим

$$x = \sin y,$$

где $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, а $-1 \le x \le 1$.

Затем требуется выразить y через x. С учётом ранее сказанного, очевидно, что $y = arc\sin x$.

Заметим, что выражение $arc\sin x$ само по себе имеет смысл лишь только для тех значений *x*, которые удовлетворяют неравенству $|x| \le 1$. В связи с этим становится очевидным свойство

$$\sin(arc\sin x) = x,\ |x| \le 1. \qquad (2.1.1)$$

Используя Рис. 2.1.2, перечислим далее свойства функции $y = arc\sin x$:

1) $D(y) = [-1, 1]$;

2) $E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

3) Функция нечетная, т.е.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \qquad (2.1.2)$$

Действительно, с одной стороны $\sin(\arcsin(-x)) = -x$ (по формуле (2.1.1)); а с другой: $\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x$ (в силу нечетности синуса). Так правые части записанных равенств совпали, то приравнивая их левые части и отбрасывая синус, получим доказываемую формулу (2.1.2).

4) Функция непериодическая.

Действительно, если функция $y = f(x)$имеет период $T \ne 0$, то для всех $x \in D(y)$ справедливо включение $(x + kT) \in D(y)$, где $k \in Z$, что означает неограниченность области определения функции *f*. Область же определения функции $y = arc\sin x$ является областью ограниченной, а это означает, что эта функция – непериодическая.

5) Точкой пересечения с координатными осями является (0,0). Таким образом, график функции $y = arc\sin x$проходит через начало координат и должен быть симметричен относительно этой точки (в силу свойства нечетности).

6) $\arcsin x \ge 0$ при $0 \le x \le 1$,
$\arcsin x < 0$ при $-1 \le x < 0$.

7) В области определения функция является монотонно *возрастающей*.

Справедливость этого свойства следует из того, что функция $y = \sin x$ является возрастающей на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а, как известно, обратная ей функция $y = arc\sin x$ будет также возрастающей, но на промежутке [–1, 1], который является областью значений для «основной» функции.

8) Наименьшим значением функции является значение $arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$. Наибольшим же значением этой функции является число $arcsin\,1 = \frac{\pi}{2}$.

График функции схематично изображен на Рис. 2.1.3.

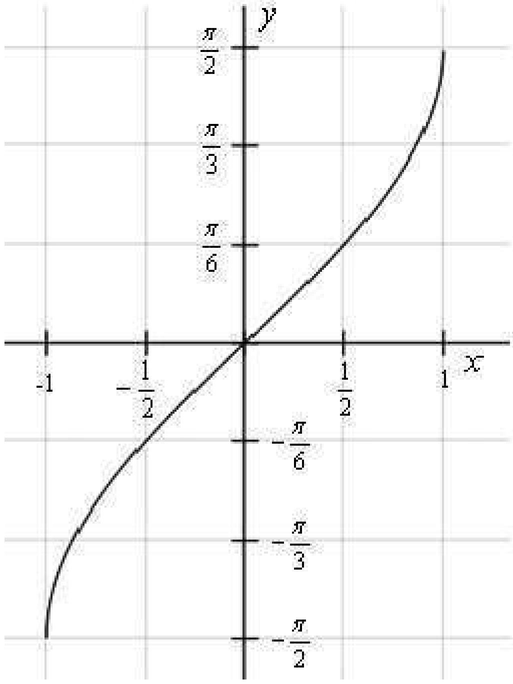


Рис. 2.1.3

§ 2.2. Арккосинус

Рассмотрим функцию $y = cos\,x$ при всех возможных значениях x $(-\infty < x < +\infty)$.

Возьмем, например, значение $y = 0$. Функция $y = cos\,x$ достигает этого значения на бесконечном множестве (очевидно, что это происходит при значениях аргумента $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, см. Рис. 2.2.1). По данному значению y невозможно найти одно единственное значение x. Значит, на всей оси Ox функция $y = cos\,x$ обратной (однозначной) функции не имеет.

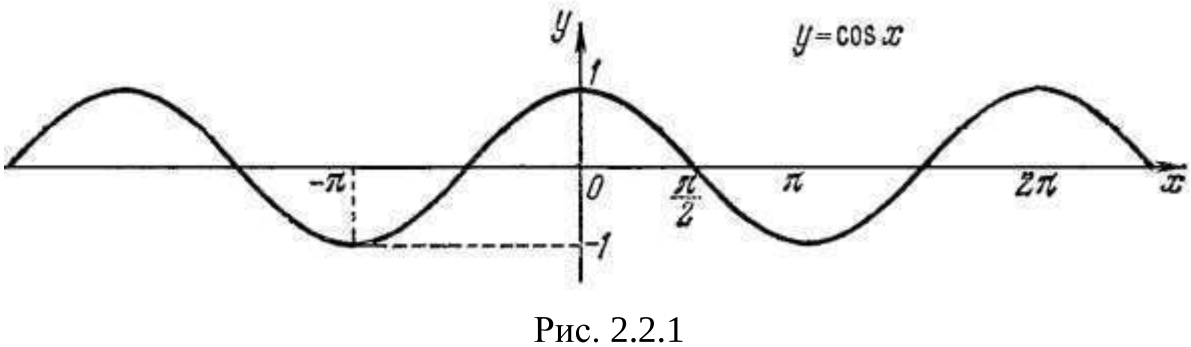


Рис. 2.2.1

Для того чтобы можно было ввести функцию, обратную по отношению к функции $y = cos\,x$, нам нужно взять наибольший отрезок оси Ox, на котором она или монотонно возрастает, или монотонно убывает. Как известно, функция $y = cos\,x$ монотонно возрастает от –1 до +1 на любом отрезке вида $[(2k–1)\pi\,,\ 2\pi k]$, где $k = 0, \pm1, \pm2, ...$ и она монотонно убывает от +1 до –1 на любом отрезке вида $[2\pi k;\ (2k+1)\ \pi\,]$, где $k \in Z$.

В качестве отрезка оси Ox, на котором рассматривается функция $y = cos\,x$ и обратная к ней функция, обычно берут отрезок $\left[0;\pi\right]$. На этом промежутке функция $y = cos\,x$ монотонно убывает, принимая все значения от +1 до –1. Следовательно, для любого y_0 из отрезка [–1, 1] оси Oy найдется, и притом только одно, значение x_0 из отрезка $\left[0;\pi\right]$такое, что $y_0 = cos\,x_0$, т.е. для функции $y = cos\,x$ на указанном отрезке существует обратная (однозначная) функция, которую условились называть *арккосинусом* и обозначать так: $y = arccos\,x$.

✍Функция, обратная функции $y = cos\,x$, на отрезке $-1 \le x \le 1$, называется ***арккосинусом*** и обозначается $y = arccos\,x$.

Иначе говоря, символом $arccos\,x$обозначается дуга единичной окружности, взятая на отрезке $\left[0;\pi\right]$, косинус которой равен x.

__**Пример 2.2.1**__. Найти$\alpha = arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Эту задача можно истолковать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от 0 до π , синус которого равен $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, косинус которых равен $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Это, например, $\dfrac{5\pi}{6}$, $\dfrac{7\pi}{6}$, $-\dfrac{5\pi}{6}$, $-\dfrac{7\pi}{6}$ и т.д. Но нас интересует только тот аргумент, который принадлежит отрезку $\left[0;\pi\right]$. Таким образом, искомым аргументом будет $\dfrac{5\pi}{6}$. Итак, $arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Используя общее правило построения графика обратной функции, знаем, что он должен быть симметричен с графиком основной функции относительно биссектрисы I и III координатных углов. Поэтому для фрагмента графика функции $y = cos\,x$, где $x \in \left[0;\pi\right]$ построим симметрично ему относительно прямой y=x другой график (см. Рис. 2.2.2). Это и будет график функции $y = arccos\,x$.

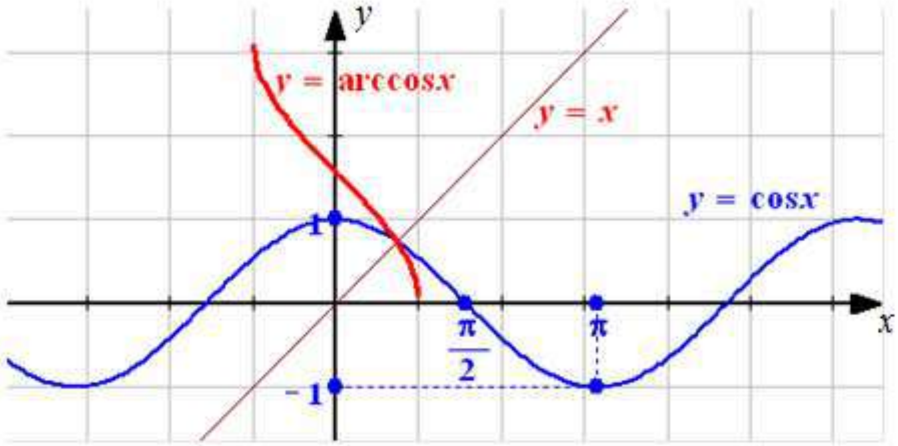


Рис. 2.2.2

Рассмотрим ещё один способ получения арккосинуса. В этом случае надо поменять ролями аргумент и функцию в записи $y = \cos x$.

Таким образом, получим

$$x = \cos y,$$

где $0 \le y \le \pi$, а $-1 \le x \le 1$.

Затем требуется выразить y через x. С учётом ранее сказанного, очевидно, что $y = \arccos x$.

Заметим, что выражение $\arccos x$ само по себе имеет смысл лишь только для тех значений x, которые удовлетворяют неравенству $|x| \le 1$. В связи с этим становится очевидным свойство

$$\cos(\arccos x) = x,\ |x| \le 1. \qquad (2.2.1)$$

Используя Рис. 2.2.2, перечислим далее свойства функции $y = \arccos x$:

1) $D(y) = [-1, 1]$;
2) $E(y) = [0; \pi]$;
3) Функция ни четная, ни нечетная. Для неё выполняется тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x; \qquad (2.2.2)$$

Действительно, с одной стороны $\cos(\arccos(-x)) = -x$ (по формуле (2.2.1)) и $\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$ (по формуле приведения). С другой стороны, так по определению арккосинуса

$$0 \le \arccos(-x) \le \pi;\ 0 \le \arccos x \le \pi$$

и из второго двойного неравенства следует неравенство

$$0 \ge -\arccos x \ge -\pi,$$

а, значит, и неравенство

$$0 \le \pi - \arccos x \le \pi.$$

Приходим к выводу, что числа $\arccos(-x)$ и $\pi - \arccos x$, имеющие одинаковый косинус и принадлежащие одному промежутку $[0; \pi]$, совпадают, что и доказывает формулу (2.2.2).

4) Функция не является периодической.

Обоснование справедливости этого свойства аналогично тому, которое было приведено для функции $y = arc\sin x$.

5) Функция имеет единственный нуль при $x = 1$. Т.е. точкой пересечения с осью Ox является (1; 0). Точка пересечения с осью Oy имеет координаты $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

6) Функция положительна при всех $x \in [-1;1]$.

7) В области определения функция является убывающей.

Справедливость этого свойства следует из того, что функция $y = \cos x$ является убывающей на промежутке $[0;\pi]$, а, как известно, обратная ей функция $y = \arccos x$ будет также убывающей, но на промежутке $[-1;1]$, который является областью значений для «основной» функции.

8) Наименьшим значением функции является значение $\arccos 1 = 0$. Наибольшим же значением этой функции является число $\arccos(-1) = \pi$.

График функции схематично изображен на Рис. 2.2.3.

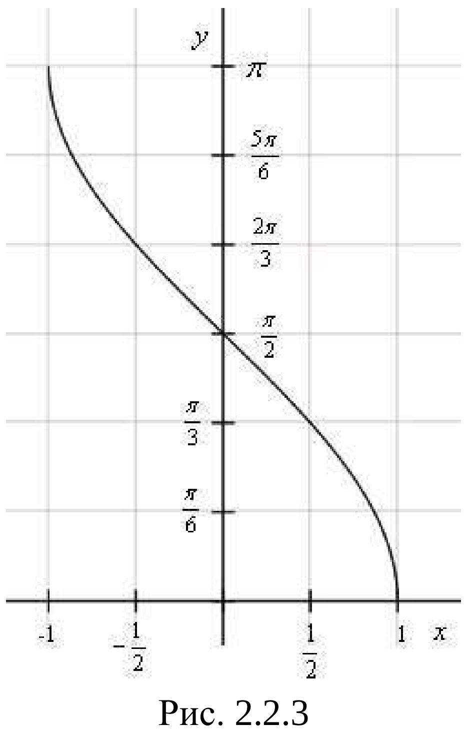


Рис. 2.2.3

Заметим также, что график функции $y = \arccos x$ симметричен относительно точки $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

§ 2.3. Арктангенс

Рассмотрим функцию *y=tgx*. Известно, что её область определения – вся ось *Ox,* за исключением точек вида $x_n = \frac{\pi}{2} \cdot (2n+1)$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, а областью значений является вся ось *Oy*.

Возьмем, например, значение *y = a*. Функция *y =tg x* достигает этого значения на бесконечном множестве (см. Рис. 2.3.1). По данному значению *y* невозможно указать одно единственное значение *x*.

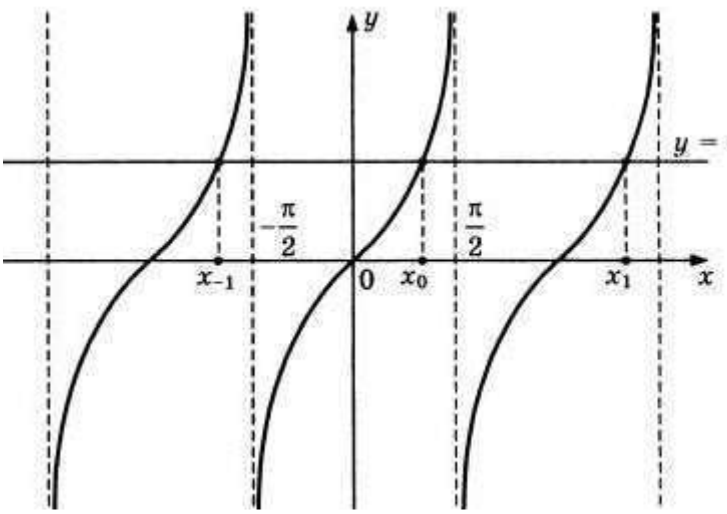


Рис. 2.3.1

Для рассмотрения функции, обратной по отношению к функции *y=tg x*,выберем участок монотонности тангенса. В качестве такого промежутка можно взять интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Очевидно, что на этом промежутке каждому значению *x* соответствует единственное значение *y* и наоборот каждому значению *y* соответствует единственное значение *x*.

✍Функция, обратная функции *y = tg x*, при $x \in (-\infty;+\infty)$называется ***арктангенсом*** и обозначается *y = arctg x*.

Иначе говоря, символом $arctg\, x$ обозначается дуга единичной окружности, заключенная в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен *x*.

<u>Пример 2.3.1</u>. Найти $\alpha = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Эту задача можно истолковать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, тангенс которых равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Это, например, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, и т.д. Но нас интересует только тот аргумент, который принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, искомым аргументом будет $\frac{\pi}{6}$. Итак, $arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$.

Используя общее правило построения графика обратной функции, знаем, что он должен быть симметричен с графиком основной функции относительно биссектрисы Iи III координатных углов. Поэтому для фрагмента графика функции $y = tg\,x$, где $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ построим симметрично ему относительно прямой $y=x$ другой график (см. Рис. 2.3.2). Это и будет график функции $y = arctg\,x$.

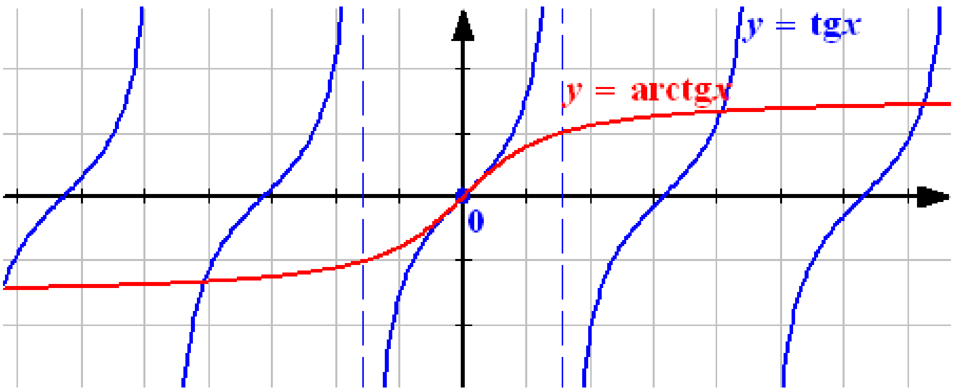


Рис. 2.3.2

Рассмотрим ещё один способ получения арктангенса. В этом случае надо поменять ролями аргумент и функцию в записи $y = tg\,x$.

Таким образом, получим

$$x = tg\,y,$$

где $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, а $-\infty<x<+\infty$.

Затем требуется выразить y через x. С учётом ранее сказанного, очевидно, что $y = arctg\,x$.

Заметим, что выражение $arctg\,x$ имеет смысл при любых значениях x. В связи с этим становится очевидным свойство

$$tg\left(arctg\,x\right)=x,\; x\in\boldsymbol{R}. \tag{2.3.1}$$

Свойства функции $y = arctg\,x$ вытекают из соответствующих свойств функции $y = tg\,x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и видны из графика (Рис. 2.3.2):

1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$;
2) $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$;
3) Функция нечетная. Для неё выполняется тождество

$$arctg(-x) = -arctgx; \qquad (2.3.2)$$

Действительно, с одной стороны $tg\left(arctg(-x)\right) = -x$ (по формуле (2.3.1)) и $tg\left(-arctg\,x\right) = -tg\left(arctgx\right) = -x$. С другой стороны, поскольку

$$-\frac{\pi}{2} < arctg(-x) < \frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{2} < arctg\,x < \frac{\pi}{2}$$

и из второго двойного неравенства следует неравенство $-\frac{\pi}{2} < -arctg\,x < \frac{\pi}{2}$, то числа что числа $arctg(-x)$ и $-arctg\,x$, имеющие одинаковый тангенс и принадлежащие одному и тому же интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, должны совпадать, что и доказывает формулу (2.3.2).

4) Функция не является периодической.

В самом деле, если бы функция $y = arctg\,x$ была периодической, то существовало бы $T \neq 0$ такое, что для любого $x \in (-\infty;+\infty)$ имело место равенство $arctg\left(T + x\right) = arctg\,x$.

Но в таком случае $tg\left[arctg\left(T + x\right)\right] = tg\left[arctg\,x\right]$ и, значит, $T + x = x$, откуда может следовать, что $T = 0$, а это вступает в противоречие с предположением $T \neq 0$. Полученное противоречие доказывает справедливость свойства.

5) Функция имеет единственный нуль при $x = 0$. Т.е. точкой пересечения с осями координат является точка (0; 0).

6) Функция положительна при $x \in (0;+\infty)$.

Функция отрицательна при $x \in (-\infty;0)$.

7) В области определения функция является возрастающей.

Справедливость этого свойства следует из того, что функция основная функция $y = tg\,x$ возрастаетв области своего определения. Как известно из свойств обратной функции, функция $y = arctg\,x$ также будет возрастающей.

8) Наименьшего и наибольшего значений функция не имеет.

9) При $x \to -\infty$ значения функции $y = arctg\,x$ асимптотически приближаются к числу $-\frac{\pi}{2}$, а при $x \to +\infty$ её значения стремятся к $\frac{\pi}{2}$. В таком случае прямые $y = \pm\frac{\pi}{2}$ являются горизонтальными асимптотами для графика функции $y = arctg\,x$.

График функции схематично изображен на Рис. 2.3.3.

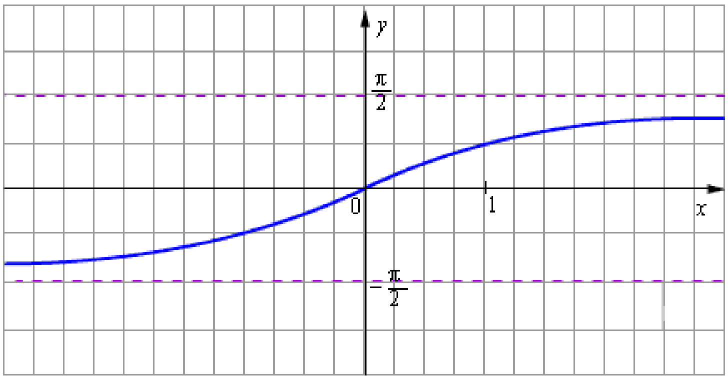


Рис. 2.3.3

Отметим ещё одно интересное свойство, касающееся функции $y = arctg\,x$.

$$arctg\left(tg\,x\right) = x,\ |x| < \frac{\pi}{2} \qquad (2.3.3)$$

§ 2.4. Арккотангенс

Рассмотрим функцию *y=ctg x*. Известно, что её область определения – вся ось *Ox,* за исключением точек вида $x_n = \pi n$, где *n* = 0, ± 1, ±2,..., а областью значений является вся ось *Oy.*

Возьмем, например, значение *y* = *a*. Функция *y* =*ctg x* достигает этого значения на бесконечном множестве (см. Рис. 2.4.1). По данному значению *y* невозможно указать одно единственное значение *x*.

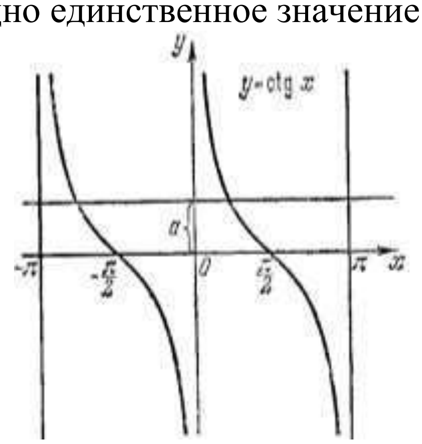


Рис. 2.4.1

В качестве интервала оси *Ox,* на котором определяется обратная функция по отношению к функции $y=ctg\,x$, берут обычно интервал $(0;\pi)$. На этом интервале функция $y=ctg\,x$ монотонно убывает, принимая все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Следовательно, для любого y_0, лежащего на оси *Oy*, найдется, и притом только одно, значение x_0 из интервала $(0;\pi)$ такое, что $y_0=ctg\,x_0$.

✍Функция, обратная функции $y = ctg\,x$, при $x\in(-\infty;+\infty)$ называется ***арккотангенсом*** и обозначается $y=arcctg\,x$.

Иначе говоря, символом $arcctg\,x$ обозначается дуга, заключенная в интервале $(0;\pi)$, котангенс которой равен *x*.

Пример 2.4.1. Найти $\alpha=arcctg\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Данную задачу можно истолковать так: найти такой аргумент α, лежащий в пределах от 0 до π, котангенс которого равен $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Существует бесчисленное множество аргументов, котангенс которых равен $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Это, например, $-\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{5\pi}{6}$, $-\dfrac{7\pi}{6}$ и т.д. Но нас интересует только тот аргумент, который принадлежит интервалу $(0;\pi)$. Таким образом, искомым аргументом будет $\dfrac{5\pi}{6}$. Итак, $arcctg\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$.

Исходя из общего правила построения графика обратной функции, знаем, что он должен быть симметричен с графиком основной функции относительно биссектрисы I и III координатных углов. Поэтому для фрагмента графика функции $y = ctg\,x$, где $x\in(0;\pi)$ построим симметрично ему относительно прямой $y=x$ другой график (см. Рис. 2.4.2). Это и будет график функции $y=arcctg\,x$.

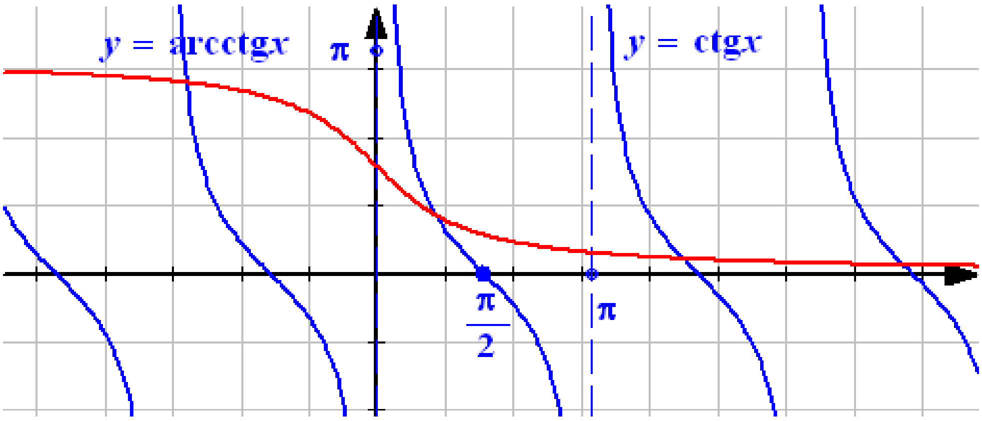


Рис. 2.4.2

Рассмотрим ещё один способ получения арккотангенса. В этом случае надо поменять ролями аргумент и функцию в записи $y = ctg\, x$.

Таким образом, получим

$$x = ctg\, y,$$

где $0 < y < \pi$, а $-\infty < x < +\infty$.

Затем требуется выразить y через x. С учётом ранее сказанного, очевидно, что $y = arcctg\, x$.

Заметим, что выражение $arcctg\, x$ имеет смысл при любых значениях x. В связи с этим становится очевидным свойство

$$ctg\left(arcctg\, x\right) = x,\ x \in \boldsymbol{R}. \qquad (2.4.1)$$

Свойства функции $y = arcctg\, x$ вытекают из соответствующих свойств функции $y = ctg\, x$ на интервале $\left(0;\pi\right)$ и видны из графика (Рис. 2.4.2):

1) $D(y) = \left(-\infty;+\infty\right)$;

2) $E(y) = \left(0;\pi\right)$;

3) Функция ни нечетная, ни нечетная. Для неё выполняется соотношение

$$arcctg(-x) = \pi - arcctgx; \qquad (2.4.2)$$

4) Функция не является периодической;

5) Функция положительна при всех значениях аргумента;

6) Функция не имеет нулей (т.е. график функции не пересекается с осью абсцисс);

7) В области определения функция является убывающей;

8) Наименьшего и наибольшего значения функция не имеет;

9) График функции симметричен относительно точки $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$;

10) При $x \to -\infty$ значения функции $y = arc\,ctg\, x$ асимптотически приближаются к числу 0, а при $x \to +\infty$ её значения стремятся к π. Таким образом, прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами для графика функции $y = arcctg\, x$.

График функции схематично представлен на Рис. 2.4.3.

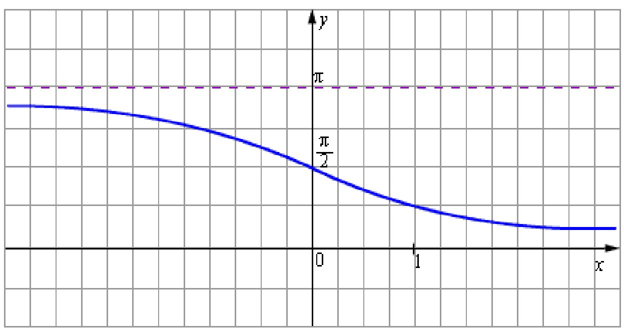


Рис. 2.4.3

Замечание. Функции арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс принято называть ***аркфункциями***.

§ 2.5. Значения тригонометрических функций от аркфункций

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций будет получаться алгебраическое выражение.

Сначала напомним уже установленные ранее соотношения:

$sin(arc\,sin\,x)=x,\ |x|\le 1.$ (см. формулу 2.1.1)

$cos(arccos\,x)=x,\ |x|\le 1.$ (см. формулу 2.2.1)

$tg(arctg\,x)=x,\ x\in\boldsymbol{R}.$ (см. формулу 2.3.1)

$ctg(arcctg\,x)=x,\ x\in\boldsymbol{R}.$ (см. формулу 2.4.1)

Будем подставлять теперь на место аргумента тригонометрической функции не обратную ей же функцию, а другие аркфункции. В результате получим цепочку весьма интересных соотношений.

Сначала найдем результат упрощения выражения $sin(arccos\,x)$.

По определению арккосинуса $0\le \arccos x\le \pi$, поэтому $sin(arccos\,x)\ge 0$ и, используя основное тригонометрическое тождество, можем записать

$$sin(arccos\,x)=|sin(arccos\,x)|=\sqrt{1-cos^2(arccos\,x)}=\sqrt{1-x^2}\ .$$

При этом ясно, что это соотношение имеет смысл лишь при выполнении условия $|x| \le 1$.

Подставим теперь на место аргумента тригонометрической функции выражение $arctg\,x$, т.е. мы будем искать результат упрощения выражения $sin(arctg\,x)$.

Согласно определению арктангенса можем записать $-\frac{\pi}{2}<arctg\,x<\frac{\pi}{2}$. Сначала установим связь между синусом и тангенсом. Для этого воспользуемся известной формулой (1.2.8):

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{sin^2\alpha}.$$

Очевидно, что котангенс можно легко заменить на тангенс, и эта формула примет вид

$$1+\frac{1}{tg^2\alpha}=\frac{1}{sin^2\alpha}.$$

Откуда

$$\frac{1+tg^2\alpha}{tg^2\alpha}=\frac{1}{sin^2\alpha}.$$

Далее

$$sin^2\alpha = \frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \text{ или } |sin\alpha| = \frac{|tg\alpha|}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}.$$

Учитывая тот факт, что в правой полуплоскости координатной плоскости xOy синус и тангенс имеют одинаковые знаки, то окончательно получаем

$$sin(arctg\,x) = \frac{tg(arctg\,x)}{\sqrt{1+tg^2(arctg\,x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Заменим теперь арктангенс на арккотангенс, т.е. будем искать результат упрощения выражения $sin(arcctg\,x)$.

По определению арккотангенса можем записать, что $0 < arcctg\,x < \pi$. Из формулы (1.2.8) непосредственно вытекает, что $|sin\alpha| = \dfrac{1}{\sqrt{1+ctg^2\alpha}}$.

В таком случае получаем, что

$$sin(arcctg\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+ctg^2(arcctg\,x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Перейдём теперь к рассмотрению вопроса, касающегося связи функции косинус с аркфункциями, исключая случай арккосинуса.

Сначала установим формулу для выражения $cos(arcsin\,x)$.

Известно, что косинус может быть выражен через синус по формуле

$$cos\,\alpha = \pm\sqrt{1-sin^2\alpha}.$$

Положим в этой формуле $\alpha = arcsin\,x$, будем иметь $sin\alpha = x$, следовательно, получим:

$$cos(arcsin\,x) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Выясним теперь, какой из знаков должен быть взят перед знаком радикала. Известно, что косинус дуги, заключенной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, положителен или равен нулю, а так как

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2},$$

то перед радикалом следует оставить знак $+$.

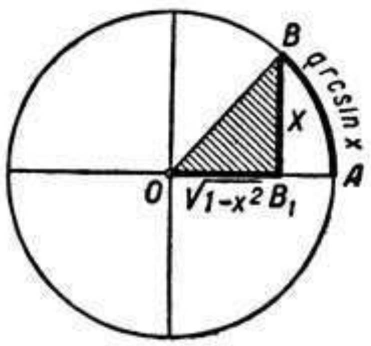


Рис. 2.5.1

Итак,

$$cos(arcsin\,x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ при } -1 \le x \le 1.$$

Полученному результату можно дать геометрическое толкование. Рассмотрим тригонометрическийкруг (радиус считаем равным 1, Рис.

2.5.1). Число x есть величина линии синуса BB_1 угла AOB=arcsin$x$. Величина отрезка OB_1, есть значение косинуса угла AOB:

$$cos\,AOB = OB_l.$$

По теореме Пифагора получаем, что

$$OB_1 = \sqrt{1 - BB_1^2} = \sqrt{1 - x^2}\,,$$

откуда

$$cos(\,AOB\,) = \sqrt{1 - cos^2\left(arccos\,x\right)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Подчеркнём интересный нюанс, оказалось что

$$sin\left(arccos\,x\right) = cos\left(arcsin\,x\right) = \sqrt{1 - x^2}\,,$$

но при условии, что $|\,x\,| \leq 1$.

Далее будем искать значение выражения $cos\left(arc\,tg\,x\right)$. Можно высказать предположение, что результат должен совпасть с уже известным нам результатом для $sin\left(arcctg\,x\right)$.

Действительно, так как $-\dfrac{\pi}{2} < arctg\,x < \dfrac{\pi}{2}$, а $\left|cos\,\alpha\right| = \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$. Последняя формула непосредственно вытекает из формулы (1.2.7). Тогда

$$cos\left(arc\,tg\,x\right) = \left|cos\left(arc\,tg\,x\right)\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\left(arctgx\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

Полученный результат полностью подтверждает ранее высказанное предположение о том, что

$$cos\left(arc\,tg\,x\right) = sin\left(arcctg\,x\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

В свою очередь, следуя установленной аналогии в этих формулах, можно утверждать, что

$$cos\left(arcctg\,x\right) == \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\,.$$

Зная эту особенность формул, позволяющих находить значения тригонометрических функций от аркфункций, достаточно теперь получить формулы для тангенса от аркфункций и далее обобщить их для случая котангенса от аркфункций.

Найдем теперь значение выражения $tg\left(arcsin\,x\right)$:

$$tg\left(arcsin\,x\right) = \frac{sin\left(arcsin\,x\right)}{cos\left(arcsin\,x\right)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,.$$

Далее

$$tg\left(arccos\,x\right) = \frac{sin\left(arccos\,x\right)}{cos\left(arccos\,x\right)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}\,.$$

В заключение найдем $tg(arcctgx)$:

$$tg(arcctgx)=\frac{1}{ctg(arcctgx)}=\frac{1}{x}.$$

Соберём теперь все полученные результаты, сделав соответствующие обобщения, в таблицу. Укажем в этой таблице область применимости каждой их формул.

Таблица № 3. Вычисление значений тригонометрических функций от обратных тригонометрических функций

	$\alpha=\arcsin x$	$\alpha=\arccos x$	$\alpha=arctg\ x$	$\alpha=arcctg\ x$
$\sin\alpha$	x, $x\in[-1;1]$	$\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;1]$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cos\alpha$	$\sqrt{1-x^2}$, $x\in[-1;1]$	x, $x\in[-1;1]$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
$tg\ \alpha$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0<\lvert x\rvert\le 1$	x	$\frac{1}{x}$, $x\neq 0$
$ctg\ \alpha$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $0<\lvert x\rvert\le 1$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$	$\frac{1}{x}$, $x\neq 0$	x

При решении задач, относящихся к нахождению значений тригонометрических функций от аркфункций, в процессе промежуточных преобразований могут использоваться свойства обратных тригонометрических функций, формулы приведения, свойства чётности и нечётности соответствующих тригонометрических функций, формулы половинного, двойного и тройного аргументов, простейшие тригонометрические тождества, формулы сложения и т.п.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.5.1. Вычислить $ctg\left(arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. По свойству функции арккосинус $arccos\left(-\frac{1}{3}\right)=\pi-arccos\frac{1}{3}$. Введём обозначение, пусть $\alpha=arccos\frac{1}{3}$, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$$ctg\left(arccos\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=ctg(\pi-\alpha)=-ctg\alpha=-ctg\left(arccos\frac{1}{3}\right)=-\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Пример 2.5.2. Вычислить $tg\left(2arccos\frac{12}{13}\right)$.

Решение. Положим $\alpha=arccos\frac{12}{13}$, $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

В таком случае $tg\left(2arccos\frac{12}{13}\right)=tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2tg\left(arccos\frac{12}{13}\right)}{1-tg^2\left(arccos\frac{12}{13}\right)}$.

Находя с помощью таблицы $tg\left(arccos\frac{12}{13}\right)=\frac{\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}}{\frac{12}{13}}=\frac{5}{12}$, окончательно получаем, что $tg\left(2arccos\frac{12}{13}\right)=tg2\alpha=\frac{2\cdot\frac{5}{12}}{1-\left(\frac{5}{12}\right)^2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{119}{144}}=\frac{\frac{120}{144}}{\frac{119}{144}}=\frac{120}{119}$.

Ответ: $\frac{120}{119}$.

Пример 2.5.3. Найти $sin(3arctg2)$.

Решение. Воспользуемся формулой синуса тройного угла

$$sin3\alpha=3sin\alpha-4sin^3\alpha.$$

Учитывая, что угол $arctg2\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, а это означает, что $arctg2>0$. Тогда с помощью таблицы сначала найдём $sin(arctg2)$:

$$sin(arctg2)=\frac{2}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно,

$$sin(3arctg2)=3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-4\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^3=\frac{6}{\sqrt{5}}-\frac{32}{5\sqrt{5}}=\frac{30-32}{5\sqrt{5}}=-\frac{2}{5\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}}{25}.$$

Ответ: $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

<u>Пример 2.5.4.</u> Расположите в порядке возрастания следующие числа: $arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$, $\arcsin\frac{1}{3}$, $arccos\frac{2}{3}$, $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, $arcctg\frac{5}{6}$, $arctg\left(-\frac{1}{4}\right)$.

Решение. Числа $arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$ и $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ принадлежат интервалу $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$, на котором арккосинус убывает. Так как $-\frac{1}{5}>-\frac{1}{2}$, то $\frac{\pi}{2}<arccos\left(-\frac{1}{5}\right)<arccos\left(-\frac{1}{2}\right)<\pi$.

Число $arctg\left(-\frac{1}{4}\right)$ находится в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, тогда получаем, что $-\frac{\pi}{2}<arctg\left(-\frac{1}{4}\right)<0$.

Оставшиеся три числа принадлежат интервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Чтобы их сравнить, найдем, например, синусы этих чисел:

$$sin\left(arcsin\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3};\ sin\left(arccos\frac{2}{3}\right)=\frac{\sqrt{5}}{3};\ sin\left(arcctg\frac{5}{6}\right)=\frac{6}{\sqrt{61}}.$$

Известно, что на интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ арксинус монотонно возрастает. Поскольку $\frac{1}{3}<\frac{\sqrt{5}}{3}<\frac{6}{\sqrt{61}}$, то $0<arcsin\frac{1}{3}<arccos\frac{2}{3}<arcctg\frac{5}{6}<\frac{\pi}{2}$.

Ответ. $arctg\left(-\frac{1}{4}\right)$, $\arcsin\frac{1}{3}$, $arccos\frac{2}{3}$, $arcctg\frac{5}{6}$, $arccos\left(-\frac{1}{5}\right)$, $arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

§ 2.6. Соотношения между аркфункциями

Получим свойства, демонстрирующие связи между самими аркфункциями. Первое из них затрагивает, например, две функции $y=arcsin x$ и $y=arccos x$:

① *Сумма арксинуса и арккосинуса одного и того же аргумента, удовлетворяющего условию* $|x| \le 1$, *есть величина постоянная, равная* $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, справедливо тождество

$$arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2},\ |x| \le 1. \qquad (2.6.1)$$

Для доказательства этого факта применим метод частных значений. Заполним следующую таблицу.

x	$arcsin\, x$	$arccos\, x$	$arcsin\, x + arccos\, x$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
-0,5	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
0,5	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
Вывод	*Значения функции возрастают при изменении x от –1 до 1*	*Значения функции убывают при изменении x от –1 до 1*	*Сумма остается постоянной*

Теперь приведём более полное доказательство формулы (2.6.1). Воспользуемся сначала формулами приведения:

$$sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = cos\,\varphi;\ cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = sin\,\varphi.$$

Положим $\varphi = arcsin\, x$, тогда имеем $sin\,\varphi = x$.

Установим теперь, на каком отрезке расположена дуга $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Так как $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, то $0 \le \frac{\pi}{2} - \varphi \le \pi$.

Итак, дуга $\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - arcsin\, x$ имеет косинус, равный x, и расположена на отрезке $[0;\pi]$. Но по определению арккосинуса единственная дуга на отрезке $[0;\pi]$, имеющая косинус, равный x, есть $arccos\, x$.

Следовательно,

$$\frac{\pi}{2} - arcsin\, x = arccos\, x,$$

откуда:

$$arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}, \text{ где } |x| \le 1, \text{ ч.т.д.}$$

На Рис. 2.6.1 дано геометрическое пояснение доказанной формулы (2.6.1) для случаев $x > 0$ и $x < 0$.

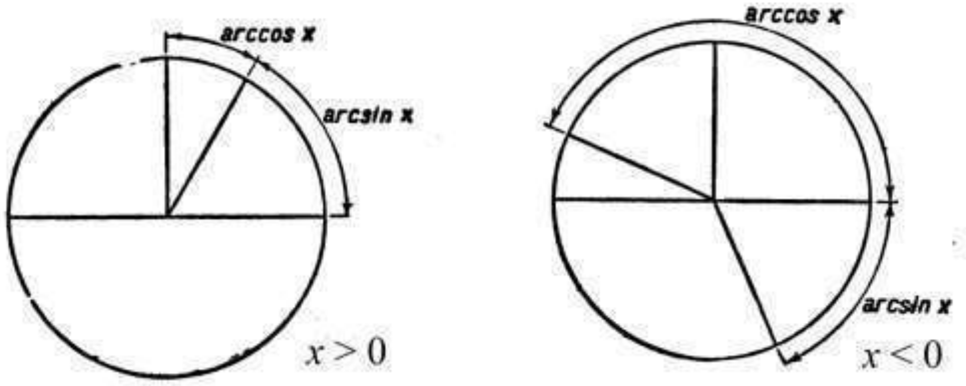


Рис. 2.6.1

② *Сумма арктангенса и арккотангенса одного и того же аргумента* (*при любом значении x*)*, есть величина постоянная, равная* $\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, справедливо тождество

$$arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}. \qquad (2.6.2)$$

Формулы (2.6.1) и (2.6.2) принято называть ***соотношениями между аркфункциями первого рода***.

Соотношения второго рода между аркфункциями получаются непосредственно из формул, имеющих место между значениями тригонометрических функций одного и того же аргумента.

Рассмотрим несколько частных примеров.

1) Мы знаем, что

$$arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \text{ и } arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

следовательно,

$$arcsin\frac{1}{2} = arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из приведенного примера мы видим, что данная дуга может быть представлена как арксинус и как арккосинус различных аргументов.

2) Ситуация изменится, если мы захотим представить в виде арккосинуса дугу

$$arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

В самом деле, $arccos\,x$ не может иметь отрицательных значений, так как ($0 \le arccos\,x \le \pi$) и поэтому ни при каком значении x не может иметь место равенство

$$arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = arccos\,x.$$

Выразить дугу $arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ через арккосинус можно следующим образом:

а) приняв во внимание нечётность арксинуса, можно записать

$$arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -arcsin\frac{1}{2}$$

б) учитывая выкладки пункта 1), можем констатировать, что

$$arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - arccos\frac{1}{2} = \pi - arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Рассмотрим в общем виде вопрос о преобразовании одной аркфункции в другую. Рассмотрим сначала какую-нибудь пару *аркфункций, значения которых заключены в одних и тех же промежутках*. Для определенности возьмем $arcsin\,x$ и $arctgx$. Значения обеих этих функций заключены в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, в этом промежутке дуга вполне определена, если задано значение её тангенса или синуса. Пусть $y = arcsin\,x$, тогда

$$tg\left(arcsin\,x\right) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},\ |x| < 1 \qquad (2.6.3)$$

Дуга $arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, по определению арктангенса, имеет тангенс, равный $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, и расположена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

В силу формулы (2.6.3) дуга $arcsin\,x$ имеет тот же тангенс и расположена в том же интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда получаем тождество:

$$arcsin\,x = arctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2.6.4}$$

имеющее место при всех значениях *x*, по абсолютной величине меньших единицы (если $|x| \geq 1$, то выражения, стоящие в правой и левой частях равенства (2.6.4) теряют смысл). Соотношение (2.6.4) является следствием формулы, выражающей тангенс через синус.

Подобным же образом из равенства

$$sin(arc\,tg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

вытекает тождество

$$arctgx = arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{2.6.5}$$

справедливое при всех действительных значениях *x*.

Аналогично преобразуется арккосинус в арккотангенс. В интервале $(0;\pi)$ дуга вполне определяется заданием косинуса или котангенса, поэтому из равенств:

$$cos(arc\,ctg\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ и } ctg(arccos\,x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

следуют тождества:

$$arc\,ctg\,x = arc\,cos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \text{ и } arccos\,x = arc\,ctg\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{2.6.6}$$

Положение дел существенно изменится, если потребуется преобразовать одну аркфункцию в другую, значения которых содержатся в различных промежутках. Будем преобразовывать функцию $y = arcsin\,x$ в арккосинус. На отрезке $[0;1]$ имеем

$$0 \leq arcsin\,x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Дуга y имеет косинус, равный $\sqrt{1-x^2}$, и поэтому

$$arcsin\,x = arccos\sqrt{1-x^2}. \tag{2.6.7}$$

Если $x \in [-1;0]$, то $-\frac{\pi}{2} \le arcsin\, x \le 0$, для функции же $arccos\sqrt{1-x^2}$ имеем

$$0 \le arccos\sqrt{1-x^2} \le \pi .$$

Отсюда видно, что при отрицательных значениях x равенство (2.6.7) выполняться не может, так как дуги $arcsin\, x$ и $arccos\sqrt{1-x^2}$ расположены в различных промежутках. В самом деле, при отрицательных значениях x дуга $arcsin\, x$ заключена в четвёртой четверти, а дуга $arccos\sqrt{1-x^2}$ заключена в первой четверти, так как аргумент арккосинуса есть арифметический корень $\sqrt{1-x^2}$, т.е. число положительное.

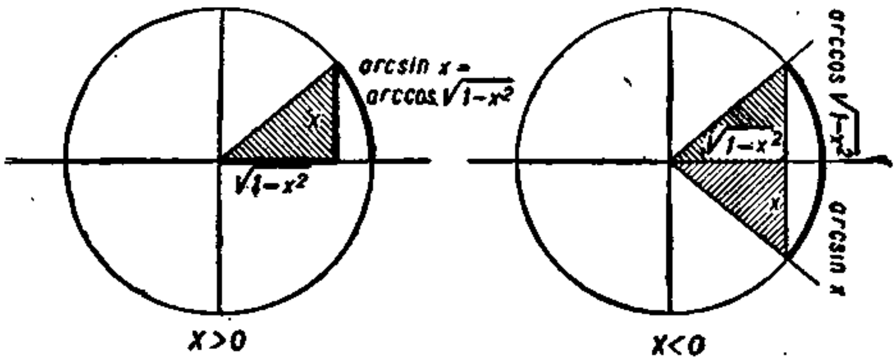


Рис. 2.6.2

Расположение рассматриваемых дуг пояснено на Рис. 2.6.2.

При отрицательных значениях x имеем:

$$x < 0\text{, откуда } -x > 0 \text{ и}$$

$$arcsin\, x = -arcsin(-x) = -arccos\sqrt{1-x^2} .$$

Итак,

$$arcsin\, x = \begin{cases} arccos\sqrt{1-x^2}, x \in [0;1], \\ -arccos\sqrt{1-x^2}, x \in [-1;0]. \end{cases} \qquad (2.6.8)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$arccos\, x = \begin{cases} arcsin\sqrt{1-x^2}, x \in [0;1], \\ \pi - arcsin\sqrt{1-x^2}, x \in [-1;0]. \end{cases} \qquad (2.6.9)$$

Далее:

$$arctgx = \begin{cases} arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \ge 0, \\ -arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \le 0. \end{cases} \qquad (2.6.10)$$

$$arccos\,x=\begin{cases} arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x},0<x\le 1,\\ \pi+arctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x},-1\le x<0.\end{cases} \qquad (2.6.11)$$

Следуя методу, выявленному на рассмотренных ранее ситуациях, можно установить справедливость следующих равенств:

$$arctgx=\begin{cases} arcctg\dfrac{1}{x},x>0,\\ arcctg\dfrac{1}{x}-\pi,x<0.\end{cases} \qquad (2.6.12)$$

$$arcsin\,x=\begin{cases} arcctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x},x\in(0;1],\\ arcctg\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi,x\in[-1;0).\end{cases} \qquad (2.6.13)$$

$$arcctgx=\begin{cases} arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},x>0,\\ \pi-arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}},x<0.\end{cases} \qquad (2.6.14)$$

$$arcctgx=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{x},x>0,\\ arctg\dfrac{1}{x}+\pi,x<0.\end{cases} \qquad (2.6.15)$$

Пример 2.6.1. Выразить $arcctg(-2)$ через арктангенс.

Решение. Выразим сначала через арктангенс число $arcctg\,2$, действуя по известной схеме:

$$tg(arcctg\,2)=\frac{1}{ctg(arcctg\,2)}=\frac{1}{2},$$

$$arcctg\,2=arctg\frac{1}{2}$$ (по определению арктангенса).

Теперь выразим $arcctg(-2)=\pi-arcctg\,2=\pi-arctg\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\pi-arctg\dfrac{1}{2}$.

Замечание. Формулы (2.6.4) – (2.6.15) принято называть ***соотношениями между аркфункциями второго рода***.

§ 2.7. Формулы суммы и разности аркфункций

Весьма интересны задачи, в условия которых входят выражения, записанные в виде суммы (разности) обратных тригонометрических функций. Рассмотрим приёмы и методы, позволяющие решать задачи такого плана.

Пример 2.7.1. Найти $arctg\, 1 + arctg\, 2 + arctg\, 3$.

Решение.

Изобразим треугольник ABC на клетчатой бумаге (размер клетки 1×1) так, чтобы $\angle BAM = arctg\, 3$, $\angle CAN = arctg\, 2$, $\angle BAC = arctg\, 1$ ($\angle BAC$ – острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC).

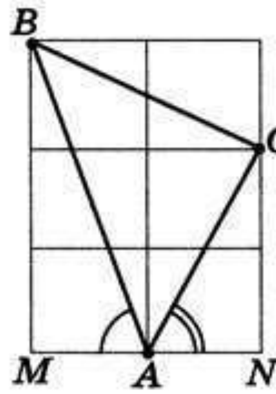


Рис. 2.7.1

Тогда, очевидно, что

$$arctg\, 1 + arctg\, 2 + arctg\, 3 = \pi .$$

Ответ: π .

Пример 2.7.2. Найти $arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{2}{3}$.

Решение (1 способ).

Так как $arctg\frac{1}{5} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ и $arctg\frac{2}{3} \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то $arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{2}{3} \in (0;\pi)$.

Используя связь тангенса и котангенса, а также формулу тангенса суммы, можем найти

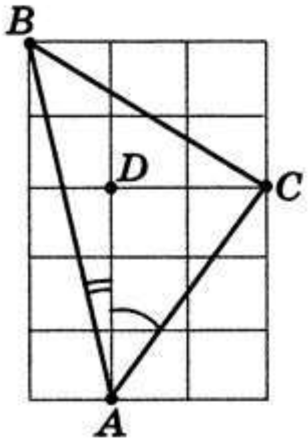


Рис. 2.7.2

$$ctg\left(arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{tg\left(arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{1 - tg\left(arctg\frac{1}{5}\right)\cdot tg\left(arctg\frac{2}{3}\right)}{tg\left(arctg\frac{1}{5}\right) + tg\left(arctg\frac{2}{3}\right)} = \frac{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}} = 1.$$

Из монотонности котангенса на $(0;\pi)$ следует, что

$$ctg\left(arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{2}{3}\right) = 1.$$

Тогда $arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{2}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Решение (2 способ).

Используем Рис. 2.7.2, на котором изображен равнобедренный прямоугольный треугольник ABC.

Кроме того, пусть $\angle BAD = arcctg\, 5 = arctg\frac{1}{5}$, $\angle CAD = arctg\frac{2}{3}$.

Ясно, что $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$ – угол при основании равнобедренного прямоугольного треугольника. Значит, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$.

Однако существует ещё один способ, позволяющий решать задачи такого плана. Основан он на применении формул, которые дают возможность представить сумму двух (или нескольких) аркфункций при помощи любой из аркфункций.

Рассмотрим ряд наиболее часто встречающихся случаев.

Рассмотрим сумму

$$\gamma = \arcsin x + \arcsin y$$

(где $|x| \le 1$ и $|y| \le 1$).

Вычислим $\sin\gamma$:

$$\sin\gamma = \sin(\arcsin x + \arcsin y) = \sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin y) +$$
$$+\cos(\arcsin x)\cdot\sin(\arcsin y) = x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}.$$

Отсюда ещё нельзя заключить, что

$$\gamma = \arcsin\left(x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}\right).$$

В самом деле, дуги

$$\arcsin x + \arcsin y = \gamma \text{ и } \gamma' = \arcsin\left(x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$$

могут оказаться расположенными в различных промежутках.

Дуга $\gamma' = \arcsin\left(x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}\right)$ при всех значениях x и y заключена на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Для значения дуги γ возможны следующие три случая.

Случай I: $-\dfrac{\pi}{2} \le \gamma \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ели числа x и y разных знаков или хотя бы одно из них равно нулю, то имеет место случай I.

Так при $0 \le x < 1$ и $-1 \le x \le 0$ имеем:

$$0 \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} \le \arcsin y \le 0,$$

откуда

$$-\frac{\pi}{2} \le \gamma \le \frac{\pi}{2}.$$

Если при $x > 0$, $y > 0$ имеет место случай I, то

$$\gamma = \arcsin x + \arcsin y \le \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\arcsin x \le \frac{\pi}{2} - \arcsin y \le \arccos y .$$

Следовательно (в силу возрастания синуса в первой четверти),

$$\sin(\arcsin x) \le \sin(\arccos y),$$

или

$$x \le \sqrt{1-y^2} \text{ и } x^2 + y^2 \le 1.$$

Аналогично показывается, что если при $x<0$, $y<0$ имеет место случай I, то

$$x^2 + y^2 \le 1.$$

Случай II: $\frac{\pi}{2} < \gamma \le \pi$.

В этом случае $x>0$, $y>0$ и

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \le \pi,$$

откуда

$$\arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y$$

и (взяв синус от обеих частей) $x^2 + y^2 > 1$.

Случай III: $-\pi \le \gamma < -\frac{\pi}{2}$.

Этот случай имеет место при $x<0$, $y<0$ и

$$-\pi \le \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}.$$

Изменив знаки на противоположные, приходим к предыдущему случаю:

$$\pi \ge \arcsin(-x) + \arcsin(-y) > \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$x^2 + y^2 > 1.$$

Из сопоставления результатов следует, что признаком случая I при одинаковых по знаку значениях аргументов (т.е. при $xy>0$) может служить неравенство $x^2 + y^2 \le 1$. Случай II имеет место, если $x>0$, $y>0$ и $x^2 + y^2 > 1$. Случай III имеет место, если $x<0$, $y<0$ и $x^2 + y^2 > 1$.

Дуги γ и $\gamma' = arcsin\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}\right)$ имеют одинаковый синус, но (по определению арксинуса) $-\frac{\pi}{2} \le \gamma' \le \frac{\pi}{2}$, следовательно:

в случае I, $\gamma = \gamma'$;

в случае II, $\gamma = \pi - \gamma'$;

в случае III, $\gamma = -\pi - \gamma'$.

Итак, имеем окончательно:

$$arcsin\,x + arcsin\,y = \begin{cases} arcsin\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}\right);\ xy \le 0,\ x^2 + y^2 \le 1 \\ \pi - arcsin\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}\right);\ x > 0, y > 0,\ x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - arcsin\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}\right);\ x < 0, y < 0,\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Пример 2.7.3. Найти $arcsin\frac{3}{5} + arcsin\frac{5}{13}$.

Решение.

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{25}{169} = \frac{2146}{4225} < 1$, то можем воспользоваться первым случаем формулы суммы двух арксинусов, т.е.

$$arcsin\frac{3}{5} + arcsin\frac{5}{13} = arcsin\left(\frac{3}{5} \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{169}} + \frac{5}{13} \cdot \sqrt{1 - \frac{9}{25}}\right) =$$

$$= arcsin\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5}\right) = arcsin\frac{56}{65}.$$

Ответ: $arcsin\frac{56}{65}$.

Из формулы суммы двух арксинусов можно получить формулу преобразования разности $arcsin\,x - arcsin\,y$. В самом деле, эту разность можно представить в виде суммы

$$arcsin\,x + arcsin(-y).$$

Заменив y на $-y$, получим:

$$arcsin\,x - arcsin\,y = \begin{cases} arcsin\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} - y \cdot \sqrt{1-x^2}\right);\ xy \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1 \\ \pi - arcsin\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} - y \cdot \sqrt{1-x^2}\right);\ x > 0, y < 0,\ x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - arcsin\left(x \cdot \sqrt{1-y^2} - y \cdot \sqrt{1-x^2}\right);\ x < 0, y > 0,\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Сумму $arcsin\,x + arcsin\,y$ можно представить при помощи любой другой аркфункции. Так, например,

$$arcsin\,x + arcsin\,y = \begin{cases} arccos\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - x\cdot y\right);\ x \ge 0,\ y \ge 0 \\ -arccos\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - x\cdot y\right);\ x < 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Аналогично,

$$arcsin\,x - arcsin\,y = \begin{cases} arccos\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} + x\cdot y\right);\ x > y, \\ -arccos\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} + x\cdot y\right);\ x < y. \end{cases}$$

В качестве тренировки рекомендуем самостоятельно убедиться в справедливости следующей формулы

$$arcsin\,x + arcsin\,y = \begin{cases} arctg\dfrac{x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy};\ xy \le 0,\ x^2 + y^2 < 1 \\ \pi + arctg\dfrac{x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy};\ x > 0, y > 0,\ x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi + arctg\dfrac{x\cdot\sqrt{1-y^2} + y\cdot\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2} - xy};\ x < 0, y < 0,\ x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

Представим без выкладок формулы для суммы и разности двух арккосинусов.

$$arccos\,x + arccos\,y = \begin{cases} arccos\left(x\cdot y - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right);\ x + y > 0, \\ 2\pi - arccos\left(x\cdot y - \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right);\ x + y < 0. \end{cases}$$

Далее

$$arccos\,x - arccos\,y = \begin{cases} -\,arccos\left(x\cdot y + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right);\ x \ge y, \\ arccos\left(x\cdot y + \sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-y^2}\right);\ x < y. \end{cases}$$

Пример 2.7.4. Найти $arccos\dfrac{3}{7} + arccos\dfrac{9}{11}$.

Решение.

Так как $\dfrac{3}{7} + \dfrac{9}{11} > 0$, то можем воспользоваться первым случаем формулы суммы двух арккосинусов, т.е.

$$arccos\frac{3}{7}+arccos\frac{9}{11}=arccos\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{9}{11}-\sqrt{1-\frac{9}{49}}\cdot\sqrt{1-\frac{81}{121}}\right)=$$

$$=arccos\left(\frac{3}{7}\cdot\frac{9}{11}+\frac{2\sqrt{10}}{7}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{11}\right)=arccos\left(\frac{27}{77}-\frac{40}{77}\right)=arccos\left(-\frac{13}{77}\right)=\pi-arccos\frac{13}{77}.$$

Ответ: $\pi-arccos\frac{13}{77}$.

Приведём теперь формулы для суммы и разности двух арктангенсов.

$$arctg\,x+arctg\,y=\begin{cases} arctg\frac{x+y}{1-xy};\ xy<1, \\ \pi+arctg\frac{x+y}{1-xy};\ x>0, xy>1, \\ -\pi+arctg\frac{x+y}{1-xy};\ x<0, xy>1. \end{cases}$$

Далее

$$arctg\,x\text{-}arctg\,y=\begin{cases} arctg\frac{x-y}{1+xy};\ xy>-1, \\ \pi+arctg\frac{x-y}{1+xy};\ x>0, xy<-1, \\ -\pi+arctg\frac{x-y}{1+xy};\ x<0, xy<-1. \end{cases}$$

Вернёмся еще раз к **Примеру 2.7.2**, в котором требовалось найти $arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}$. Предложим третий способ решения этой задачи, опирающийся на применение формулы суммы двух арктангенсов.

Так как $\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}<1$, то будем использовать первую строку соответствующей формулы, т.е.

$$arctg\frac{1}{5}+arctg\frac{2}{3}=arctg\frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}}=arctg\frac{\frac{13}{15}}{1-\frac{2}{15}}=arctg\frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=arctg1=\frac{\pi}{4}.$$

Этот результат полностью соответствует ранее полученному ответу.

Следует отметить, что представленными формулами не ограничивается весь спектр возможных случаев. Дело в том, что можно рассматривать не только сумму и разность одноименных аркфункций, но и разноименных. Так, например, можно получить формулы преобразования суммы $arcsin\,x+arctg\,y$ в любую другую аркфункцию. Мы не будем продолжать рассматривать эти преобразования, полагая, что приёмы их выполнения уже ясны.

Замечание.

1) Все эти формулы оказываются весьма полезными в тех случаях, когда при решении тригонометрических уравнений «методом ведения вспомогательного угла», мы получаем значение искомой переменной в виде суммы или разности либо арксинусов двух чисел, либо арккосинусов, плюс соответствующий период. Их использование приведёт к более краткой записи ответа.

2) Но при решении числовых примеров следует прибегать к другим способам, так как эти формулы громоздки и трудно запоминаются.

Пример 2.7.5. Доказать, что $arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}+arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}=arctg\left(\sqrt{2}+1\right)^2$.

Решение.

Имеем:

$$arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\ arctg\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4},$$

ибо $\dfrac{\sqrt{2}}{2}<1$ и $arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}<arctg1=\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, сумма дуг в левой части доказываемого равенства заключена в первой четверти. Взяв тангенс от левой части, получим

$$tg\left(arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+arctg\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=tg\left(\frac{\pi}{4}+arctg\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2.$$

Откуда следует справедливость доказываемого равенства.

Пример 2.7.6. Найдите сумму

$$S_n=arctg\frac{1}{2}+arctg\frac{1}{8}+arctg\frac{1}{18}+\ldots+arctg\frac{1}{2n^2}.$$

Решение.

Будем рассматривать частичные суммы:

$S_1=arctg\dfrac{1}{2}$.

$S_2=arctg\dfrac{1}{2}+arctg\dfrac{1}{8}=arctg\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=arctg\dfrac{\frac{5}{8}}{\frac{15}{16}}=arctg\dfrac{2}{3}$.

$S_3=S_2+arctg\dfrac{1}{18}=arctg\dfrac{2}{3}+arctg\dfrac{1}{18}=arctg\dfrac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=arctg\dfrac{\frac{13}{18}}{\frac{52}{54}}=arctg\dfrac{3}{4}$.

Можно увидеть закономерность числитель каждой дроби ровно на единицу меньше знаменателя соответствующей дроби.

Не вдаваясь в подробности, можем записать, что

$S_4 = arctg\dfrac{4}{5}.$

$S_5 = arctg\dfrac{5}{6}$ и так далее.

Следовательно, $S_n = arctg\dfrac{n}{n+1}$.

Очевидно, что при $n \to \infty$ величина $arctg\dfrac{n}{n+1}$ стремится к $arctg1$, т.е. к $\dfrac{\pi}{4}$.

Итак, $S_n = arctg\dfrac{1}{2} + arctg\dfrac{1}{8} + arctg\dfrac{1}{18} + ... + arctg\dfrac{1}{2n^2} = \dfrac{\pi}{4}$.

§ 2.8. Основные обратные тригонометрические функции от тригонометрических функций

В этом параграфе мы покажем, как строятся графики функций: $y=arcsin(sin\,x)$, $y=arccos(cos\,x)$, $y=arctg(tg\,x)$, $y=arcctg(ctg\,x)$.

2.8.1. Функция $y=arcsin(sin\,x)$

Чтобы построить график этой функции, прежде всего, заметим, что в силу периодичности функции синус рассматриваемая функция также является периодической с периодом 2π.

Поэтому достаточно её исследовать, например, на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π.

Для упрощения дальнейших исследований разобьем это отрезок на две части $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, на каждой из которых синус имеет строгую монотонность, хотя и разного характера.

Тогда если $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, то по определению арксинуса $arcsin(sin\,x) = x$, т.е. если $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, то $y=x$, и, значит, на указанном отрезке график функции совпадает с биссектрисой первого и третьего координатных углов.

Если же $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то в этом случае $arcsin(sin x) = \pi - x$, поскольку если взять синус от обеих частей последнего соотношения, то получим, что $sin x = sin(\pi - x)$, причем $-\frac{\pi}{2} \le arcsin(sin x) \le \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$ $\left(\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}\right)$. Таким образом, если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $y = \pi - x$ и с учётом периодичности исследуемой функции можно легко построить график этой функции (см. Рис. 2.8.1).

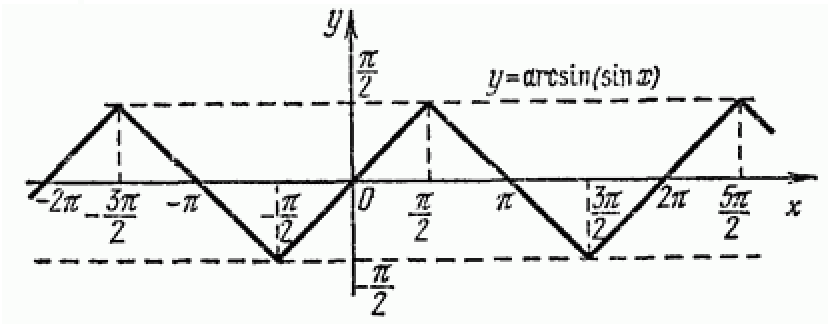


Рис. 2.8.1

Продемонстрируем теперь, как можно использовать свойства этой функции при решении задач.

Пример 2.8.1. Вычислить $arcsin(sin\, 11)$.

Решение. Пусть $\alpha = arcsin(sin\, 11)$. По определению арксинуса $sin\alpha = sin11$, где должно выполняться двойное неравенство $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$. Но $3\pi < 11 < 4\pi$. Поэтому для решения задачи воспользуемся следующей цепочкой равенств: $sin\alpha = sin11 = sin(11\text{-}4\pi)$, где уже $-\frac{\pi}{2} < 11 - 4\pi < 0$. Таким образом, $\alpha = 11 - 4\pi$.

Ответ: $11 - 4\pi$.

2.8.2. Функция $y = arccos(cos x)$

Как и в предыдущем случае, функция, о которой идет речь в заголовке пункта, является 2π-периодической.

Рассмотрим поведение этой функции на отрезке $[0; 2\pi]$. Если $x \in [0; \pi]$, то по определению арккосинуса $arccos(cos x) = x$ и, следовательно, $y = x$. Если же $x \in [\pi; 2\pi]$, то $arccos(cos x) = 2\pi - x$, так как если взять косинус от обеих частей этого соотношения, то $cos x = cos(2\pi - x)$, и при этом $0 \le arccos(cos\,x) \le \pi$, $0 \le 2\pi - x \le \pi \; (0 \le x \le \pi)$. Отсюда следует, что если $x \in [\pi; 2\pi]$, то $y=2\pi\text{-}x$ и график этой функции легко строится (см. Рис. 2.8.2).

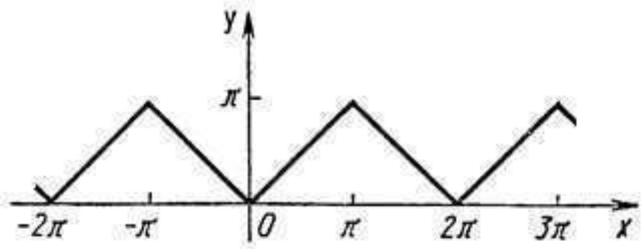


Рис. 2.8.2

Пример 2.8.2. Вычислить $arccos\left(cos\dfrac{9\pi}{8}\right)$.

Решение. Положим $\alpha = arccos\left(cos\dfrac{9\pi}{8}\right)$. В этом случае по определению арккосинуса $cos\,\alpha = cos\dfrac{9\pi}{8}$. При этом число $\dfrac{9\pi}{8} \notin [0;\pi]$. С другой стороны $cos\dfrac{9\pi}{8} = cos\left(\pi + \dfrac{\pi}{8}\right) = -cos\dfrac{\pi}{8}$.

Следовательно, $\alpha = arccos\left(-cos\dfrac{\pi}{8}\right) = \pi\text{-}\; arccos\left(cos\,\dfrac{\pi}{8}\right) = \pi - \dfrac{\pi}{8} = \dfrac{7\pi}{8}$, где уже $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{7\pi}{8} < \pi$. Таким образом, $\alpha = \dfrac{7\pi}{8}$.

Ответ: $\dfrac{7\pi}{8}$.

2.8.3. Функция $y = arctg(tg\,x)$

Областью определения данной функции является объединение интервалов $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$. Эта функция является периодической с периодом π. По определению арктангенса на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ справедливо равенство $arctg(tg\,x) = x$, откуда следует, что если $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, то $y=x$ и для построения графика функции следует полученный уже график на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ продолжить периодически с периодом π (см. Рис. 2.8.3).

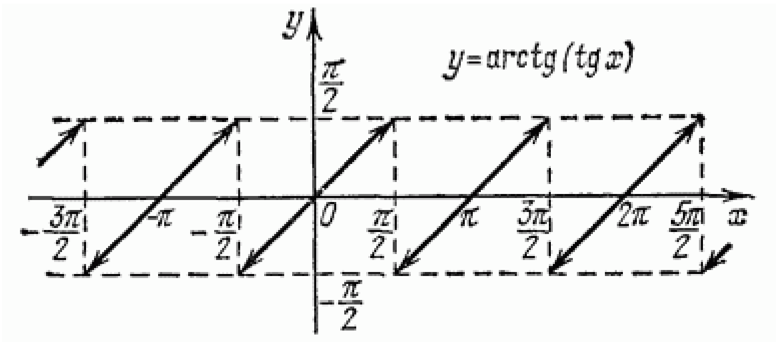


Рис. 2.8.3

Пример 2.8.3. Вычислить $arctg\left(tg\frac{12\pi}{7}\right)$.

Решение. Положим $\alpha=arctg\left(tg\frac{12\pi}{7}\right)$. В этом случае по определению арктангенса $tg\,\alpha=tg\frac{12\pi}{7}$. При этом число $\frac{12\pi}{7}\notin\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. С другой стороны $tg\,\alpha=tg\frac{12\pi}{7}=tg\left(2\pi-\frac{2\pi}{7}\right)=-tg\frac{2\pi}{7}$, где уже $\frac{2\pi}{7}\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, $\alpha=arctg\left(-tg\frac{2\pi}{7}\right)=-\ arctg\ \left(tg\frac{2\pi}{7}\right)=-\frac{2\pi}{7}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{7}$.

2.8.4. Функция $y=arcctg(ctg\,x)$

Как и в предыдущем случае, рассматриваемая функция является периодической с периодом π. Область её определения – это объединение интервалов $(k\pi;(k+1)\pi)$, $k\in Z$.

Если $x\in(0;\pi)$, то по определению арккотангенса имеет место равенство $arcctg(ctg\,x)=x$, которое означает, что для $x\in(0;\pi)$ следует, что $y=x$ и график функции легко строится, ели уже построенный на промежутке $(0;\pi)$ график периодически продолжить с периодом π (см. Рис. 2.8.4).

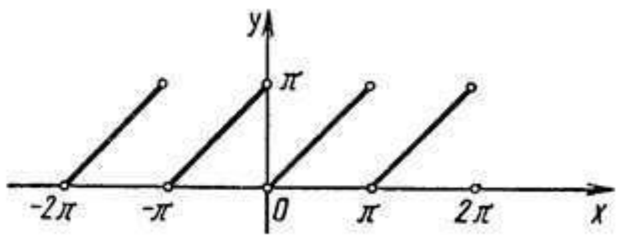


Рис. 2.8.4

Пример 2.8.4. Вычислить $arcctg\left(ctg\left(-\frac{25\pi}{8}\right)\right)$.

Решение. Положим $\alpha = arcctg\left(ctg\left(-\frac{25\pi}{8}\right)\right)$.

В этом случае по определению арктангенса $ctg\,\alpha = ctg\left(-\frac{25\pi}{8}\right)$.

Заметим, что $ctg\left(-\frac{25\pi}{8}\right) = ctg\left(-3\pi - \frac{\pi}{8}\right) = ctg\left(-\frac{\pi}{8}\right) = -ctg\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Тогда $\alpha = arcctg\left(ctg\left(-\frac{25\pi}{8}\right)\right) = arcctg\left(-ctg\frac{\pi}{8}\right) = \pi - arcctg\left(ctg\frac{\pi}{8}\right) = \pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

Ответ: $\frac{7\pi}{8}$.

§ 2.9. Арксеканс и арккосеканс

Вопрос о рассмотрении обратных тригонометрических функций нельзя считать полностью раскрытым без описания свойств ещё двух функций: арксеканс и арккосеканс.

✍Функция, обратная по отношению к функции $y = sec\,x$ (секанс), называется ***арксекансом*** и обозначается $y = arcsec\,x$.

Рассмотрим свойства этой функции:

1) $D(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$;

2) $E(y) = \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

3) Функция ни чётная, ни нечётная;

4) Функция непериодическая;

5) Точкой пересечения с осью абсцисс является точка (1,0). Пересечения с осью ординат эта функция не имеет;

6) $arcsec\,x \geq 0$ при всех x из области определения этой функции;

7) В области определения функция является *возрастающей*;

8) Наименьшим значением функции является значение $arc\,sec\,1 = 0$. Наибольшим же значением этой функции является число $arc\,sec(-1) = \pi$;

9) График имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$ и симметричен относительно точки, имеющей координаты $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

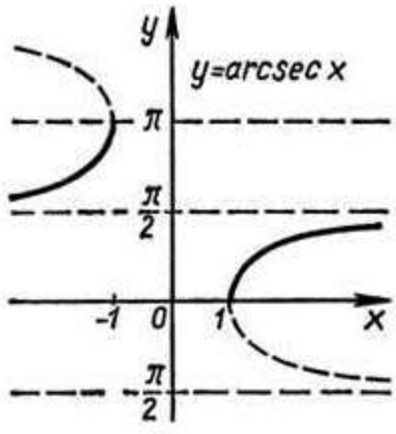


Рис. 2.9.1

График функции схематично изображен на Рис. 2.9.1.

Воспользуемся альтернативным способом нахождения обратной функции (на основе общего определения *обратной функции*).

Будем искать функцию, обратную к $y=sec\,x$. Поменяем местами аргумент и функцию, получим $x=sec\,y$. Далее $x=\frac{1}{cos\,y}$, откуда $cos\,y=\frac{1}{x}$.

Это даёт возможность получить у через арккосинус, т.е. $y=arccos\left(\frac{1}{x}\right)$

Получается, что

$$arc\,sec\,x=arccos\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (2.9.1)$$

✍Функция, обратная по отношению к функции $y=cosec\,x$ (косеканс), называется ***арккосекансом*** и обозначается $y=arccosec\,x$.

Рассмотрим теперь её свойства:

1) $D(y)=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$;

2) $E(y)=\left[-\frac{\pi}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$;

3) Функция нечётная, т.е. $arccosec(-x)=-arccosec\,x$. График функции симметричен относительно начала координат;

4) Функция непериодическая;

5) Точек пересечения с осями координат не имеет;

6) $arccosec\,x>0$ при $x\in[1;+\infty)$,
$arccosec\,x<0$ при $(-\infty;-1]$;

7) В области своего определения функция является *убывающей*.

8) Наименьшим значением функции является значение $arccosec(-1)=-\frac{\pi}{2}$. Наибольшим же значением этой функции является число $arccosec1=\frac{\pi}{2}$.

9) График имеет горизонтальную асимптоту $y=0$.

График функции схематично изображен на Рис. 2.9.2.

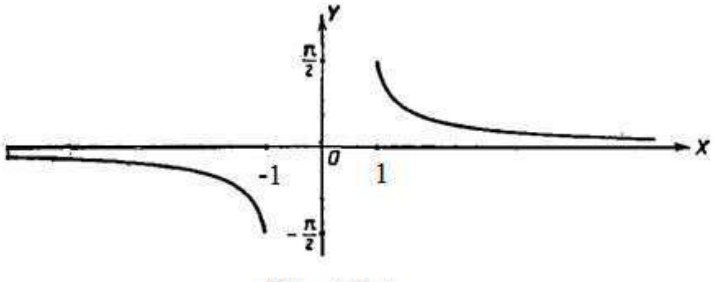


Рис. 2.9.2

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Азаров, А.И**. Тригонометрические уравнения: Учебное пособие [Текст] / А.И. Азаров, О.М. Гладун, В.С. Федосенко. ООО Тривиум, 1994. 160 с. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие [Текст] / Н.Д. Золотарёва, Ю.А. Попов, Н.Л. Семендяева, М.В. Федотов. М.: Фойлис, 2010. 568 с.

2. **Александрова, Н.В.** История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь-справочник [Текст] /Н.В.Александрова. Изд. 3-е, испр. М.: URSS ЛКИ, 2008. 246 с.

3. **Алексеев, В.М.** Элементарная математика. Решение задач [Текст] / В.М. Алексеев Киев: Вища школа, 1983. 351 с.

4. **Амелькин, В.В.** Задачиспараметрами. Справочноепособиепоматематике [Текст] / В.В.Амелькин, В.Л. Рабцевич.3-е изд., доработ. Минск: Асар, 2004. 464 с.

5. **Амелькин, В.В., Рабцевич, Т.И.** Тригонометрия. На страницах и за страницами школьного учебника [Текст] / В.В. Амелькин, Т.И. Рабцевич. Минск: Красико-Принт, 2011. 256 с.

6. **Бардушкин, В**. Тригонометрические уравнения. Отбор корней / В. Бардушкин, А. Прокофьев, Т.Соколова, Т. Фадеичева [Текст] // Математика, №12, 2005. С. 23–27.

7. **Башмаков, М.И.** Алгебра и начала анализа. Задачи и решения [Текст] / М.И. Башмаков, Б.М.Беккер, В.М.Гольховой, Ю.И.Ионин. М.: Высшая школа, 2004. 296 с.

8. **Башмаков, М.И.** Математика 11 класс: книга для учителя [Текст] / М.И. Башмаков. М.: Академия, 2011. 128 с.

9. **Башмаков, М.И.** Теория и практика продуктивного обучения [Текст] / (коллективная монография). М.: Народное образование, 2000. 248 с.

10. **Башмаков, М.И.** Школьная математика. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ [Текст] / М.И. Башмаков, Ш.И. Цыганов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 271 с.

11. **Болтянский, В.Г.** Лекции и задачи по элементарной математике [Текст] / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М.: Наука, Физматлит, 1971. 592 с.

12. **Брадис, В. М.** Четырехзначные математические таблицы: Для общеобразоват. учеб. заведений [Текст] / В.М. Брадис. М.: Изд. дом «Дрофа», 1996. 93 с.

13**. Василевский, А. Б.** Задания по внеклассной работе по математике: 9-11 классы [Текст]: книга для учителя / А.Б. Василевский. Минск: Народнаяасвета, 1988.172 с.

14. **Василевский, А.Б**. Методы решения задач по математике: метод. пособие [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: МПИ, 1981. 107 с.

15. **Василевский, А.Б.** Упражнения по алгебре и началам анализа: кн. для учителя [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: Нар. асвета, 1991. 221 с.
16. **Вересова, Е.Е.** Практикум по решению математических задач: для пед. ин-тов по мат. и физ. спец. [Текст] / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 239 с.
17. **Виленкин, Н.Я**. Задачник-практикум по элементарной алгебре: для студентов-заочников физ.-мат. ф-тов пед. ин-тов [Текст] / Н.Я. Виленкин, А.А. Кочева, И.В. Стеллецкий. М.: Просвещение, 1969.191с.
18. **Воробьев, Н.Н.** Признаки делимости [Текст] / Н.Н. Воробьев. 2. изд., испр. М.: Наука, 1974. 79 с.
19. **Выгодский, М.Я.** Справочник по элементарной математике [Текст] / М.Я. Выгодский. М., 2006. 509 с.
20. **Гельфанд, И.М.** Функции и графики (основные приемы) [Текст] / И.М. Гельфанд, Е.Г. Глаголева, Э.Э. Шноль. 7-е изд., стер. М.: Изд-во МЦНМО, 2006. 116 с.
21. **Генкин, Г. З.** Геометрические решения негеометрических задач: кн. для учителя [Текст] / Г.З. Генкин. М.: Просвещение, 2007. 79 с.
22. **Добрина, Е.А., Мельников, Р.А.** Изучение обратных тригонометрических функций в школьном курсе математики [Текст] / Е.А. Добрина, Р.А. Мельников // Математическое образование в школе будущего: традиции и инновации: материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции с международным участием. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. С. 140-147.
23. **Дорофеев, Г.В.** Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст] / Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. М.: Наука, 1976. 640с.
24. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Использование принципа гибкости при изучении дисциплины «Элементарная математика» будущими учителями математики [Текст] / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников // Совершенствование математического образования – 2014: проблемы и пути их решения: Материалы VIII Международной научно-методической конференции / Под общей редакцией проф. Г.Х. Гайдаржи. г. Тирасполь, 15-18 октября 2014 г. Тирасполь: Изд-во Приднестровского ун-та, 2014. С. 73-76.
25. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Элементарная математика. Часть 1. Арифметика. Начала алгебры. Комбинаторика. Функции: учебное пособие [Текст] / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2015. 128 с.
26. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Мультидисциплинарный подход к изучению тригонометрии будущими учителями математики [Текст] / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников // Балтийский гуманитарный журнал, 2016. Том 5, № 4 (17). С. 211-215.
27. **Зайцев, В.В.** Элементарная математика: Повторительный курс [Текст] / В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави; Под ред. В.В. Рыжкова. 3. изд., стереотип. М.: Наука, 1976. 592 с.

28. **Земляков, А.Н.** Математический анализ реальности. Дифференциальные уравнения для школьников [Текст] / А.Н. Земляков. М.: МЦНМО, 2013. 300с.
29. **Иванов, О.А.** Избранные главы элементарной математики [Текст] / О.А. Иванов; С.-Петербург. гос. ун-т. СПб: Изд-во СПб. ун-та, 1995. 223 с.
30. **Иванов, О.А.** Практикум по элементарной математике: алгебро-аналитические методы: учеб. пособие [Текст] / О.А. Иванов. М.: МЦНМО, 2001.319 с.
31. **Ильичев, А.Т.** Графики элементарных функций и их преобразования: Методические указания к выполнению типового расчета [Текст] / В.В. Кузнецов, И.Д. Фаликова. Под ред. С.К. Соболева. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 56 с.
32. **Литвиненко, В.Н.** Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей [Текст] / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1991. 348 с.
33. **Лихолетов, И.И.** Функции и их графики: учебное пособие [Текст] / И.И. Лихолетов. Минск: Народная асвета, 1970. 149 с.
34. **Любецкий, В.А.** Основные понятия элементарной математики: учебное пособие для вузов [Текст] / В. А. Любецкий. 2-е изд., испр. Москва: Айрис-пресс, 2004. 624 с. (Высшее образование).
35. **Моденов, П.С.** Сборник задач по специальному курсу элементарной математики: учебное пособие для вузов [Текст] / П.С. Моденов. М.: Сов. наука, 1957. 666 с.
36. **Новоселов, С.И.**Специальный курс тригонометрии: для пед. ин-тов и гос. ун-тов. 5-е изд. [Текст] / С.И. Новоселов. М.: Высшая школа, 1967. 536 с.
37. **Новоселов, С.И.** Обратные тригонометрические функции: Пособие для учителей. 4-е изд. [Текст] / С.И. Новоселов. М.: Учпедгиз, 1956.127 с.
38. **Польский, В.** Применение комплексных чисел в тригонометрии // Моб, 1929. № 4. С. 129-136.
39. **Полякова, Т.Н.** Практикум по решению задач (Тригонометрия) [Текст]: учеб. пособие для студентов / Т. Н. Полякова.; М-во прос. РСФСР, Моск. гос. пед. ин-т имени В. И. Ленина, кафедра алгебры. М.: Б. и., 1976. 121 с.
40. Пособие поматематике для поступающих в вузы [Текст] / Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Наука, 1981. 608с.
41. Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст] / Под ред. М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1988.
42. **Фалин, Г.И.** Обратные тригонометрические функции: 10-11 классы: определения обратных тригонометрических функций, свойства arc-функций, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, ответы [Текст] / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Изд. 2-е, стер. М.: Экзамен, 2013. 221 с.

43. **Шарыгин, И.Ф.** Факультативный курс по математике. Решение задач Учеб. пособие для 11-го кл. сред. шк. [Текст] / И.Ф. Шарыгин. М.: Просвещение, 1991. 383 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО И ПРОИЗВОЛЬНОГО УГЛОВ

ГЛАВА II. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

Учебное издание

Галина Георгиевна Ельчанинова,
Роман Анатольевич Мельников

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

Часть 3.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

Учебное пособие

Техническое исполнение – В. М. Гришин
Книга печатается в авторской редакции

Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Печ.л. 6,3   Уч.-изд.л. 5,8
Тираж 500 экз. (1-й завод 1-40 экз.). Заказ 168

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28