МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА:
ОТ АЛЬФА ДО ОМЕГА

Часть 6 (дзета)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА.
СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Учебное пособие

Елец, 2022

УДК 37
ББК 74.2
Э 64

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 2022 г., протокол №

Рецензенты:

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец).

Томилова Анна Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования ФГАОУ ВО Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Авторы: Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А.

Е 64 Школьная математика: от альфа до омега. Часть 6 (дзета). Тригонометрические неравенства. Системы тригонометрических уравнений. – Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2022. – 64 с.
978-5-94809-853-1 (часть 6)

Основная цель учебного пособия – оказать помощь изучающим математику.

В издании представлен материал, посвящённый способам решения тригонометрических неравенств и систем тригонометрических уравнений. Пособие предназначено, в первую очередь, для учеников старших классов и учителей общеобразовательных учреждений на этапе систематизации знаний, а также студентам, обучающимся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование, профиль которых связан с математикой, и их преподавателям.

УДК 37
ББК 74.2

978-5-94809-853-1 (часть 6)

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

§ 1.1. Простейшие тригонометрические неравенства

🕮 Неравенство (т.е. соотношение, в записи которого используется один из знаков $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\neq$) называется *тригонометрическим*, если неизвестная величина находится под знаком одной (или нескольких) тригонометрических функций.

Все тригонометрические неравенства можно разделить на две группы:

1) простейшие тригонометрические неравенства;

2) неравенства, сводящиеся к простейшим.

При решении простейших тригонометрических неравенств обычно используют следующие приемы:

1) с помощью тригонометрической окружности;

2) с помощью графиков тригонометрических функций.

1.1.1. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие синус

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию синус, т.е. неравенства вида:

$$\sin x > a,\ \sin x < a,\ \sin x \geq a,\ \sin x \leq a,\ \sin x \neq a.$$

Представим далее алгоритм решения лишь одного из неравенств этой группы.

При решении неравенств вида

$$\sin x \geq a, \qquad (1.1.1)$$

например, с помощью единичной окружности поступают следующим образом:

Сразу используют тот факт, что синус – это ордината точки тригонометрической окружности.

Далее изображается декартова система координат и тригонометрическая окружность в ней. На оси ординат откладывается число, равное a (берётся из условия $\sin x > a$). Через полученную точку строится прямая, параллельная оси абсцисс. По отношению к имеющейся тригонометрической окружности эта прямая может занять одно из следующих трёх положений:

А) иметь с ней две общие точки (т.е. пересекать её в двух точках, расположенных симметрично относительно оси ординат). Заметим, что в этом случае число a будет удовлетворять условию $a \in (-1;1)$.

Б) иметь только одну общую точку с ней (т.е. прямая касается тригонометрической окружности). В таком случае число a может быть равно 1 или –1.

В) не иметь общих точек с окружностью. Здесь либо $a \in (-\infty; -1)$, либо $a \in (1; +\infty)$.

В зависимости от того с каким случаем будем иметь дело, мы получим различные варианты ответа.

Если $a > 1$ (случай В), то неравенство (1.1.1) не имеет решений.

Если $a \le -1$ (сюда входят две ситуации: $a \in (-\infty; -1)$ (случай В) и $a = -1$ (Случай Б)), то неравенству (1.1.1) удовлетворяет любое значение x.

Если $a \in (0;1)$ (случай А), то прямая АВ (см. Рис. 1) разрежет окружность на две дуги.

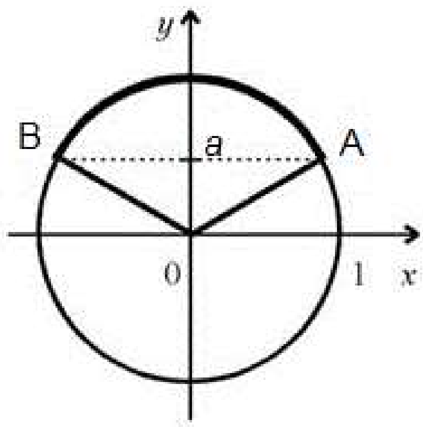

Рис. 1

Кроме того из Рис. 1 видно, что данному неравенству будут удовлетворять лишь те точки, которые расположены на дуге *AB*, проходимой в положительном направлении (т.к. ординаты точек, расположенных на ней больше или равны *a*). Для удобства восприятия информации дугу *AB* выделяют либо штриховкой по внутреннему контуру окружности, либо линией большей толщины.

Известно, что в таком случае точке *A* на тригонометрической окружности соответствуют числа $x_1 = \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, в свою очередь точке *B* – числа $x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Окончательное решение можно записать следующим образом:

$$x \in \left[2\pi n + \arcsin a; (2n+1)\pi - arc\sin a\right], n \in \mathbf{Z}.$$

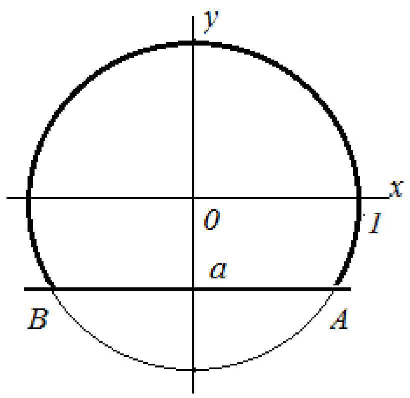

Рис. 2

Если $a = 1$ (случай В), то, как известно, прямая будет иметь только одну общую точку с тригонометрической окружностью. Ордината этой точки будет равна 1, поэтому решением неравенства (1.1.1) будет $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right\}, n \in \mathbf{Z}$.

Если $a \in (-1;0)$ (случай А), то прямая, параллельная оси абсцисс, разделит окружность на две дуги (см. Рис. 2).

В таком случае решением

неравенства будет:

$$x \in \left[2\pi n - \arcsin a; (2n+1)\pi + arc\sin a\right], n \in \mathbf{Z}.$$

<u>Пример 1.1.1.1.</u> Решить неравенство $\sin x \geq 0{,}5$.

Решение. На тригонометрической окружности отмечаем точки, служащие концами радиус-векторов, ординаты которых равны 0,5 (см. Рис. 3). Таких радиус-векторов окажется два. Один из них образует с положительным направлением оси абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{6}$, а другой, соответственно, $\frac{5\pi}{6}$ (их синусы равны 0,5). Принимая во внимание периодичность синуса (его наименьший положительный период равен 2π), имеем:

$$2\pi n + \frac{\pi}{6} \leq x \leq 2\pi n + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right],\ n \in \mathbf{Z}$.

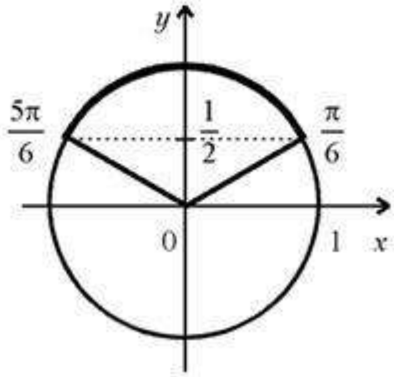

Рис. 3

Завершая рассмотрение этого вопроса, представляем сводную таблицу различных случаев простейших тригонометрических неравенств, содержащих синус, и предлагаем самостоятельно вписать варианты ответов к ним.

Неравенство	$\sin x > a$	$\sin x < a$	$\sin x \geq a$	$\sin x \leq a$
$a \in (-\infty; -1)$				
$a = -1$				
$a \in (-1; 0)$				
$a = 0$				
$a \in (0; 1)$				
$a = 1$				
$a \in (1; +\infty)$				

Ещё одним эффективным способом решения простейших тригонометрических неравенств является использование графического метода. Рассмотрим на примере, как он работает.

<u>Пример 1.1.1.2.</u> Решить неравенство $\sin x > -\frac{1}{2}$.

Решение. Строим график функции $y = \sin x$. В той же системе координат показываем прямую $y = -\frac{1}{2}$. Так как данное неравенство является строгим, то точки пересечения двух построенных графиков отметим проколами (см. Рис. 4).

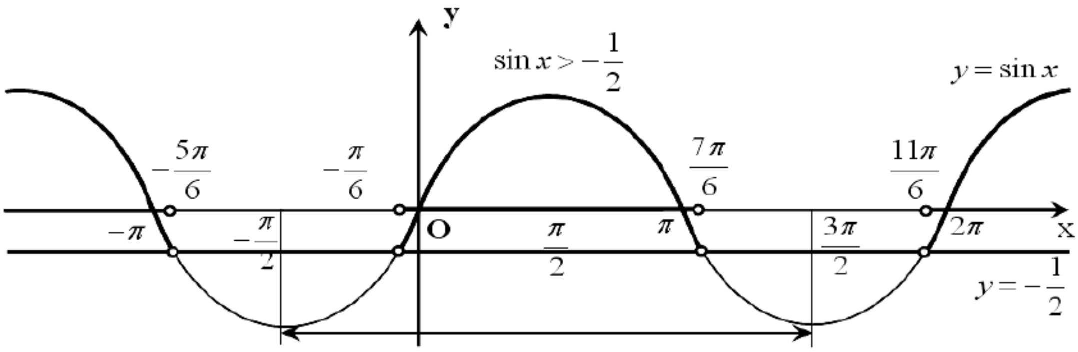

Рис. 4

Далее выделим фрагменты графика функции $y = \sin x$, которые оказались выше прямой $y = -\frac{1}{2}$. Заметим, что выделенные участки периодически повторяются. Возьмём участок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ оси *Ox*. Видим, что на нём располагается один из выделенных нами фрагментов. Определим концевые точки этого фрагмента. Очевидно, ими будут $x = -\frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{7\pi}{6}$, так как в этих точках $\sin x = -\frac{1}{2}$. Учитывая периодичность функции $y = \sin x$, можем записать решение исходного неравенства

$$-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

1.1.2. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие косинус

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию косинус, т.е. неравенства вида:

$$\cos x > a,\ \cos x < a,\ \cos x \geq a,\ \cos x \leq a,\ \cos x \neq a.$$

Представим далее алгоритм решения лишь одного из неравенств этой группы.

Рассмотрим, как решается неравенство вида

$$\cos x < a. \qquad (1.1.2)$$

Исходим из того, что косинус – это абсцисса точки тригонометрической окружности.

Далее изображается декартова система координат, в которую помещаем тригонометрическую окружность с центром в начале координат. На оси абсцисс отмечаем число, равное a (берётся из условия $\cos x < a$). Через полученную точку строим прямую, параллельную оси ординат. По отношению к имеющейся тригонометрической окружности эта прямая может занять одно из следующих трёх положений:

1) иметь с ней две общие точки (т.е. пересекать её в двух точках, расположенных симметрично относительно оси ординат). Заметим, что в этом случае число a будет удовлетворять условию $a \in (-1;1)$.

2) иметь только одну общую точку с ней (т.е. прямая касается тригонометрической окружности). В таком случае число a может быть равно 1 или –1.

3) не иметь общих точек с окружностью. Здесь либо $a \in (-\infty;-1)$, либо $a \in (1;+\infty)$.

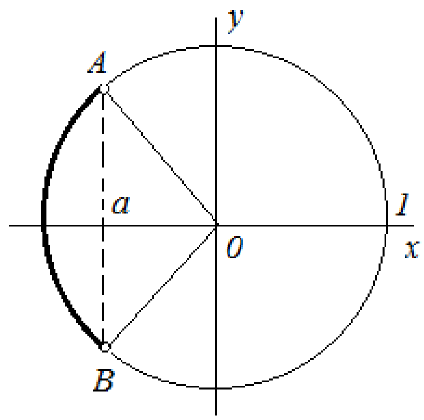

Рис. 5

Если $a \in (-\infty;-1]$, то неравенство (1.1.2) не имеет решений.

Если $a \in (-1;0)$, то прямая, параллельная оси ординат, разделит тригонометрическую окружность на две дуги (только на одной из этих дуг содержится множество точек, абсцисса которых меньше a). Выбираем дугу AB, которая идет по ходу от A к B в положительном направлении (см. Рис. 5) и выделяем её более толстой линией.

Точке A соответствуют углы $\pi - arc\cos|a| + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$, а точке B, в свою очередь – углы $\pi + arc\cos|a| + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Таким образом, окончательное решение для этого случая можно записать в виде:

$$x \in \left((2n+1)\pi - \arccos|a|; (2n+1)\pi + \arccos|a|\right), n \in \mathbf{Z}.$$

Если $a \in (0;1)$, то в таком случае, прямая, параллельная оси ординат, будет находиться правее начала координат. Этот случай весьма близок к предыдущему, но окончательное решение будет выглядеть несколько иначе:

$$x \in \left(2\pi n + \arccos \mathrm{a}; (2n+1)\pi - \arccos a\right), n \in \mathbf{Z}.$$

Если $a = 1$, то в этом случае прямая коснётся тригонометрической окружности. В этом случае неравенству (1.1.2) будут удовлетворять все значения переменной x, кроме $2\pi n$. Т.е. решение неравенства может быть записано в виде $\{x \mid x \neq 2\pi n\},\ n \in \mathbf{Z}$.

Если $a \in (1;+\infty)$, то в качестве решения неравенства (1.1.2) может выступать любой *x*.

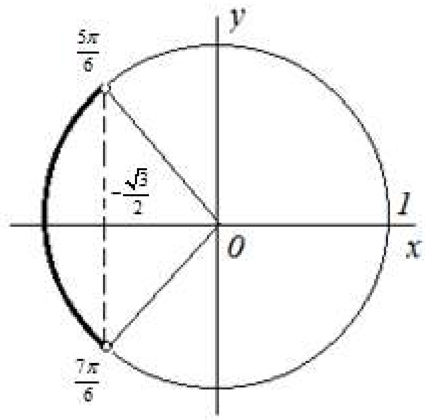

Рис. 6

<u>Пример 1.1.2.1.</u> Решить неравенство $\cos x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. На тригонометрической окружности откладываем точки, служащие концами радиус-векторов, абсциссы которых равны $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (см. Рис. 6). Таких радиус-векторов окажется два. Одной из полученных точек соответствует угол, равный $\dfrac{5\pi}{6}$, а другой, соответственно, $\dfrac{7\pi}{6}$. Принимая во внимание периодичность косинуса (его наименьший положительный период равен 2π), получаем:

$$2\pi n + \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi n + \frac{7\pi}{6},\ n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n; \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n\right),\ n \in \mathbf{Z}$.

<u>Пример 1.1.2.2.</u> Решить неравенство $|\cos x| > \dfrac{1}{2}$.

Решение. Отметим, что данное неравенство не совсем уместно относить к простейшим тригонометрическим неравенствам, но для иллюстрации графического метода наличие модуля не является серьёзным отягощением. Построим графики функций $y = |\cos x|$ и $y = \dfrac{1}{2}$ (см. Рис. 7).

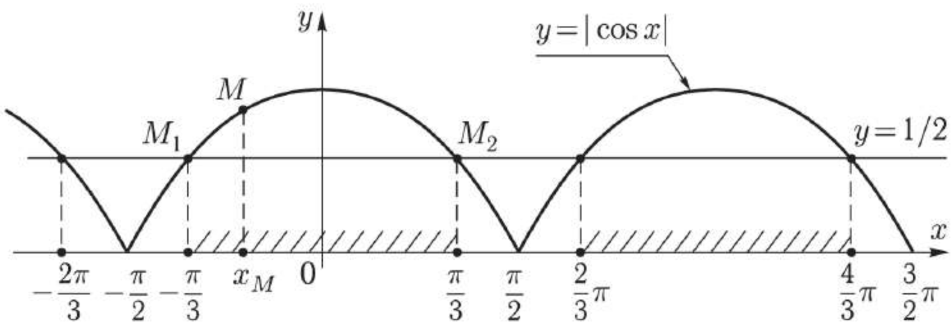

Рис. 7

Функция $y = |\cos x|$ является непрерывной и периодической функцией, с наименьшим положительным периодом, равным π. Поэтому достаточно взять промежуток, длина которого будет равна π, например,

$\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, затем отобрать множество точек на графике функции $y=|\cos x|$, ординаты которых будут строго больше числа $\frac{1}{2}$, спроецировать это множество на выбранный промежуток и с учетом периода записать окончательный ответ. Из Рис. 7 видим, что нас устраивает множество точек, расположенных между точками M_1 и M_2, выше прямой $y=\frac{1}{2}$. Проекция этого множества на промежуток $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ даст интервал $\left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$. Тогда с учетом периодичности функции $y=|\cos x|$ получаем:

$$-\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}$.

Далее снова предлагаем заполнить сводную таблицу различных случаев простейших тригонометрических неравенств, только теперь содержащих косинус.

Неравенство	$\cos x>a$	$\cos x<a$	$\cos x\geq a$	$\cos x\leq a$
$a\in(-\infty;-1)$				
$a=-1$				
$a\in(-1;0)$				
$a=0$				
$a\in(0;1)$				
$a=1$				
$a\in(1;+\infty)$				

1.1.3. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие тангенс

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию тангенс, т.е. неравенства вида:

$$tg\,x>a,\ tg\,x<a,\ tg\,x\geq a,\ tg\,x\leq a,\ tg\,x\neq a.$$

Представим далее алгоритм решения только одного из неравенств этой группы.

Рассмотрим, как решается неравенство вида

$$tg\,x<a. \tag{1.1.3}$$

Известно, что выражения, содержащие $tg\,x$, имеют смысл лишь при условии, что $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\, k \in \mathbf{Z}$. Поэтому для соответствующих точек тригонометрической окружности сразу нужно сделать проколы. Проведем к правой полуокружности касательную (*ось тангенсов*) в точке A (1; 0), на которой отметим точку (1;a). Построим радиус-вектор, соединив точку A с центром окружности. Отрезок $[OA]$ пересечёт единичную окружность в точке M. Значение угла x_0, соответствующего этой точке, будет равно $x_0 = arctg\,a$. Любое действительное значение x, кроме $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\, k \in \mathbf{Z}$, будет удовлетворять неравенству (1.1.3) при условии, что принадлежит лучу $(-\infty; a)$, которому соответствует дуга $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} a\right)$. Учитывая периодичность тангенса (наименьший положительный период равен π), окончательно получаем: $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi n;\, \operatorname{arctg} a + \pi n\right),\, n \in \mathbf{Z}$.

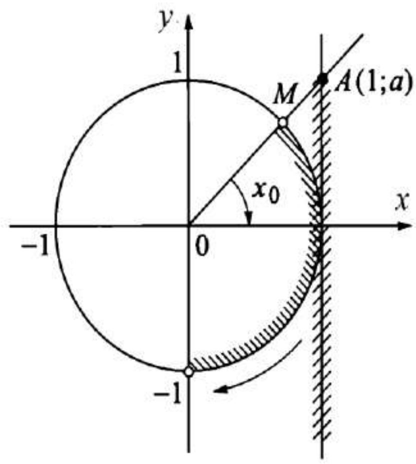

Рис. 8

Графическое решение неравенства (1.1.3) происходит следующим образом. Строится график функции $y = tg\,x$ и прямая $y = a$, где a – любое действительное число (см. Рис. 9). На промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, на котором функция $y = tg\,x$ возрастает, находится точка пересечения графиков этих двух функций $x_0 = arctg\,a$.

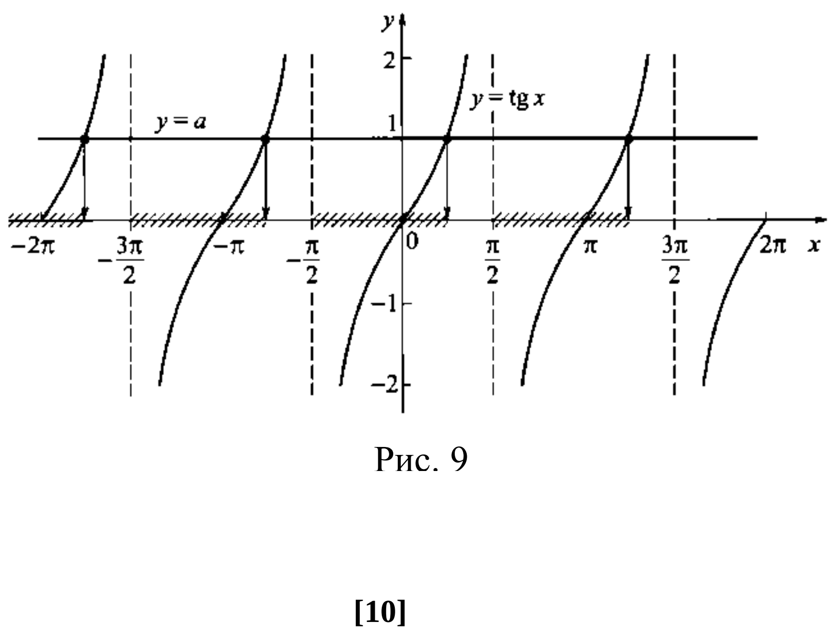

Рис. 9

Поскольку для любого $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, такого, что $x < x_0$, выполняется условие $tg\,x < tg\,x_0$ или $tg\,x < a$, решением неравенства (1.1.3) на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ будет множество $\left(-\frac{\pi}{2}; x_0\right)$ или $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg} a\right)$. На всей числовой оси, кроме точек $x_k = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$, решением этого неравенства при любом а будет множество: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

<u>**Пример 1.1.3.1.**</u> Решите неравенство $tg\,x \le 1$.

Решение. Так как ранее мы описали метод решения схожего неравенства (различие состоит лишь в том, что у нас нестрогое неравенство, а там был знак «< »), то можно воспользоваться заготовкой для ответа, заменив в ней лишь круглую скобку, на квадратную, т.е.

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \operatorname{arctg} a + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}.$$

Кроме того, заметим, что $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, поэтому окончательно будем иметь: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], n \in \mathbf{Z}$.

1.1.4. Простейшие тригонометрические неравенства, содержащие котангенс

Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства, содержащие функцию котангенс, т.е. неравенства вида:

$$ctgx > a,\ ctgx < a,\ ctgx \ge a,\ ctgx \le a,\ ctgx \ne a.$$

Представим далее алгоритм решения только одного из неравенств этой группы.

Рассмотрим, как решается неравенство вида

$$ctg\,x > a. \qquad (1.1.4)$$

Так как мы имеем дело с котангенсом, то следует помнить, что выражения, содержащие $ctg\,x$, имеют смысл лишь при условии, что $x \ne \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Проиллюстрируем решение неравенства (1.1.4) с помощью тригонометрической окружности. Через точку окружности, имеющую координаты (0; 1), проведем касательную, которую называют *осью котангенсов*. На этой линии отметим точку $A(a;\ 1)$, абсцисса которой будет равна произвольному числу a. Соединим точку A с началом координат (см. Рис. 10), получим радиус-вектор $\overrightarrow{OA}$, который пересекает тригонометрическую окружность в точке M. Угол, соответствующий точке M, обозначим символом x_0. Причём по определению $x_0 = arcctg\, a$. Взяв любое значение $x \in (0;\pi)$, такое, что $x < x_0$, на оси котангенсов получим множество точек, образующих луч $(a;+\infty)$. Этому лучу на единичной окружности соответствует дуга $X_0 = (0;\ arcctg\, a)$, которая и определяет множество решений искомого неравенства на интервале $(0;\pi)$. На любом другом промежутке $(\pi k;\pi+\pi k), k \in \mathbf{Z}$, решение неравенства (1.1.4) находят с учётом периодичности функции $y = ctg\, x$, т.е.

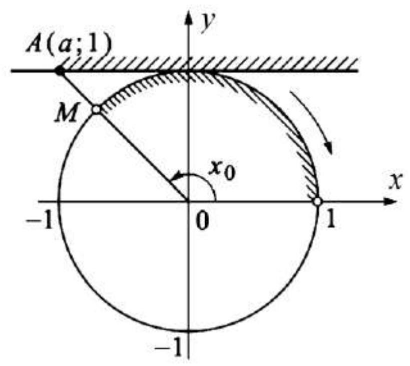

Рис. 10

$$x \in (\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k), k \in \mathbf{Z}.$$

Теперь посмотрим, как происходит решение неравенства (1.1.4) графическим методом. Известно, что $D(ctg\, x)$ включает в себя все действительные числа, кроме $x = \pi k, k \in \mathbf{Z}$. Областью значений функции $y = ctg\, x$, на множестве $D(ctg\, x)$ является множество $E(ctg\, x) = (-\infty;+\infty)$. Следовательно, при любом a неравенство (1.1.4) всегда имеет решение. Используя графики функций $y = ctg\, x$ и $y = a$, сначала находим решение этого неравенства на интервале $(0;\pi)$ (см. Рис. 11).

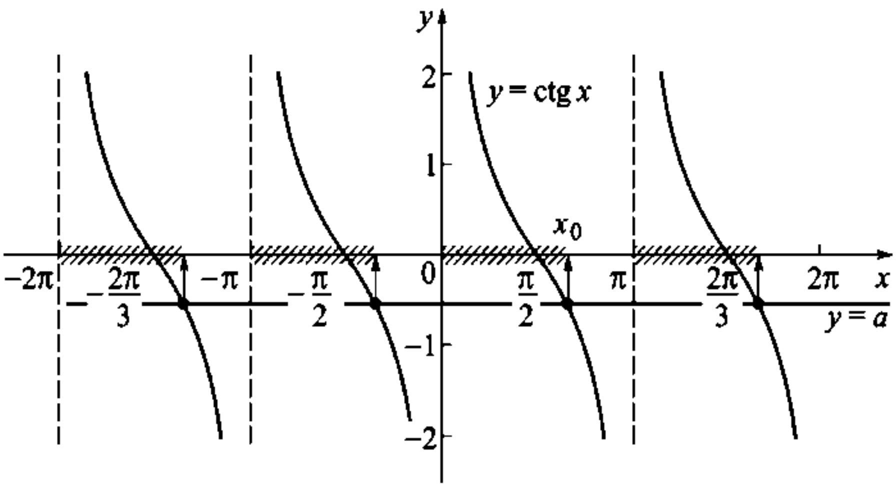

Рис. 11

Так как на этом промежутке функция $y = ctg\, x$ убывает, то для любого значения $x \in (0;\pi)$, такого, что $x < x_0$, $x_0 = arcctg\, a$, справедливо неравенство $ctg\,x > ctg\,x_0$ или $ctg\,x > a$. Это означает, что на промежутке $(0;\pi)$ решением неравенства (1.1.4) является множество X_0 = (0; $arcctg\,a$), и, учитывая периодичность функции $y = ctg\,x$, находим решение этого неравенства на свей области определения:

$$x \in \left(\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 1.1.4.1. Решить неравенство $ctg\,x > 2$.

Решение. Это неравенство полностью соответствует типажу неравенства (1.1.4), поэтому можем воспользоваться шаблоном для записи ответа:

$x \in \left(\pi k; \operatorname{arcctg} a + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$. В нашем случае a=2, это означает, что множеством значений x, удовлетворяющих условию $ctg\,x > 2$, будет:

$x \in \left(\pi k; \operatorname{arcctg} 2 + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $x \in \left(\pi k; \operatorname{arcctg} 2 + \pi k\right), k \in \mathbf{Z}$.

§ 1.2. Тригонометрические неравенства, сводящиеся к простейшим

При решении неравенств, не являющихся простейшими, разными путями стараются прийти к простейшим тригонометрическим неравенствам, либо их системам и совокупностям. Основным методом решения неравенств является *метод подстановки*.

Его суть легко уяснить из следующих примеров.

✍ К первой группе неравенств, решаемых этим способом, отнесем тригонометрические неравенства «*со смещённым аргументом*».

Пример 1.2.1. Решить неравенство $\sin\left(\frac{5x}{3} - \frac{\pi}{8}\right) < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Ясно, что данное неравенство примет простейший вид, если сделать замену $t = \frac{5x}{3} - \frac{\pi}{8}$, тогда исходное неравенство запишется в виде $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Откуда $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{9\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$. Сделав обратную замену, получим

$$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n < \frac{5x}{3} - \frac{\pi}{8} < \frac{9\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Остается лишь в центральной части этого двойного неравенства получить x. Для этого сначала прибавим ко всем частям этого неравенства дробь $\frac{\pi}{8}$, будем иметь

$$\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi n < \frac{5x}{3} < \frac{\pi}{8} + \frac{9\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Выполняя сложение дробей, получаем

$$\frac{7\pi}{8}+2\pi n<\frac{5x}{3}<\frac{19\pi}{8}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Умножим теперь все части этого неравенства на дробь $\frac{3}{5}$

$$\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{7\pi}{8}+2\pi n\right)<x<\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{19\pi}{8}+2\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$$

В итоге имеем

$$\frac{21\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5}<x<\frac{57\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5},\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x\in\left(\frac{21\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5};\frac{57\pi}{40}+\frac{6\pi n}{5}\right),\ n\in\mathbf{Z}$.

<u>**Пример 1.2.2.**</u> Решить неравенство $tg\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)>2$.

Решение. Произведём замену переменной, сделав обозначение $2x-\frac{\pi}{5}=t$. Исходное неравенство примет вид $tg\,t>2$. Будем решать полученное простейшее неравенство на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ с помощью графика $y=tg\,t$ (см. Рис. 12). Построив прямую $y=2$, видим, что неравенству $tg\,t>2$ удовлетворяют лишь числа $t\in\left(arctg\,2;\frac{\pi}{2}\right)$. Так как функция $y=tg\,t$ имеет период, равный π, то множеством всех решений этого неравенства будет

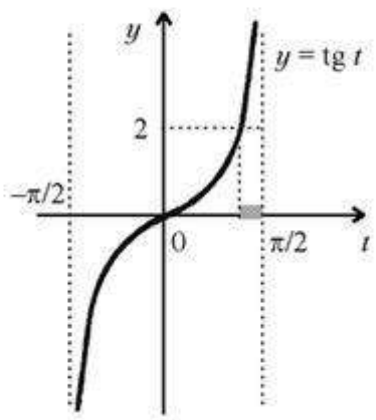

Рис. 12

$$t\in\left(arctg\,2+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right),n\in\mathbf{Z}.$$

Делая обратную замену с помощью формулы $t=2x-\frac{\pi}{5}$, получаем

$$arctg\,2+\pi n<2x-\frac{\pi}{5}<\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in\mathbf{Z}.$$

Далее имеем

$$\frac{\pi}{5}+arctg\,2+\pi n<2x<\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in\mathbf{Z},$$

$$\frac{\pi}{10}+\frac{arctg\,2}{2}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{7\pi}{20}+\frac{\pi n}{2},n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{10} + \frac{arctg\,2}{2} + \frac{\pi n}{2}; \frac{7\pi}{20} + \frac{\pi n}{2} \right), n \in \mathbf{Z}$.

✍ Ко второй группе неравенств, решаемых этим способом, отнесём тригонометрические неравенства, «*сводящиеся к алгебраическим*».

<u>Пример 1.2.3.</u> Решить неравенство $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$.

Решение. Введём новую переменную $\sin x = t$, получим квадратичное неравенство $2t^2 - 7t + 3 > 0$. Найдем дискриминант: $D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25$. Тогда $t_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4}$; $t_1 = 3$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Применяя метод интервалов, получим $t \in \left(-\infty; \frac{1}{2} \right) \cup (3; +\infty)$. Таким образом, имеем совокупность из двух простейших неравенств, содержащих функцию синус

$$\left[\begin{array}{l} \sin x < \frac{1}{2}, \\ \sin x > 3. \end{array} \right.$$

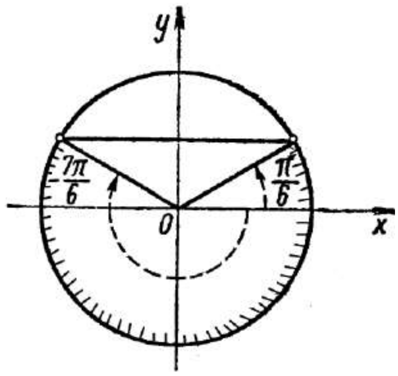

Рис. 13

Ясно, что неравенство $\sin x > 3$ не имеет решений, так как $\sin x \in [-1; 1]$.

Что касается первого неравенства совокупности, то его решение изображено на Рис. 13.

Значит,

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right), n \in \mathbf{Z}$.

✍ К третьей группе неравенств, решаемых этим способом, отнесём тригонометрические неравенства, «*решаемые с помощью универсальной подстановки*».

<u>Пример 1.2.4.</u> Решить неравенство $2\cos 2x + \sin 2x > tg\,x$.

Решение. Воспользуемся рассмотренной нами для решения тригонометрических уравнений (см. Часть 5) универсальной подстановкой. Введём новую переменную, положив $tg\,x = t$. Тогда, как известно,

$$sin\,2x = \frac{2t}{1+t^2}; cos\,2x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

После чего исходное неравенство примет вид

$$2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)+\frac{2t}{1+t^2}-t>0.$$

Приводя выражение в левой части последнего неравенства к общему знаменателю, получаем

$$\frac{2-2t^2+2t-t-t^3}{1+t^2}>0.$$

Последнее равносильно неравенству $t^3+2t^2-t-2<0$.

Разложим теперь левую часть этого неравенства на множители

$$\left(t^3+2t^2\right)-\left(t+2\right)<0,$$

$$t^2\left(t+2\right)-\left(t+2\right)<0,$$

$$\left(t+2\right)\cdot\left(t^2-1\right)<0,$$

$$\left(t+2\right)\cdot\left(t-1\right)\cdot\left(t+1\right)<0.$$

Далее применим метод интервалов

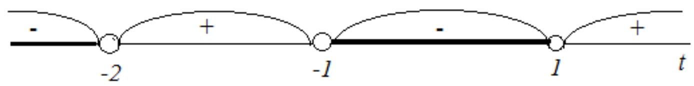

Рис. 14

Из Рис. 14 видно, что $t\in\left(-\infty;-2\right)\cup\left(-1;1\right)$. Запишем это в виде совокупности неравенства и системы двух неравенств

$$\left[\begin{array}{l} t<-2, \\ \begin{cases} t>-1, \\ t<1; \end{cases} \end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l} tg\,x<-2, \\ \begin{cases} tg\,x>-1, \\ tg\,x<1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Для простейшего неравенства $tg\,x<-2$ множеством решений будет множество

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;-arctg\,2+\pi n\right), n\in\mathbf{Z}.$$

Далее получаем решение системы простейших тригонометрических неравенств

$$x\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right), n\in\mathbf{Z}.$$

Выполняя объединение двух полученных множеств, имеем решение исходного неравенства

Ответ: $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n; -arctg 2+\pi n\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi n; \dfrac{\pi}{4}+\pi n\right), n \in \mathbf{Z}$.

Перейдём теперь к рассмотрению неравенств, которые сводятся к простейшим тригонометрическим неравенствам (или их совокупностям и системам) с помощью применения различных тригонометрических формул.

<u>Пример 1.2.5.</u> Решить неравенство $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x < \dfrac{3}{8}$.

Решение. Сначала выполним преобразования в левой части данного неравенства. Для этого воспользуемся известными формулами тройного аргумента

$$sin\,3\alpha = 3sin\,\alpha - 4sin^3\alpha;$$

$$cos\,3\alpha = 4cos^3\alpha - 3cos\,\alpha.$$

Выразим из каждой формулы слагаемое, содержащее куб

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}; \quad \cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}.$$

Подставим их в исходное неравенство

$$\frac{\cos 3x + 3\cos x}{4} \cdot \sin 3x + \frac{3\sin x - \sin 3x}{4} \cdot \cos 3x < \frac{3}{8}.$$

Приводя левую часть неравенства к общему знаменателю, будем иметь

$$\frac{\cos 3x \cdot \sin 3x + 3\cos x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cdot \cos 3x}{4} < \frac{3}{8}.$$

После взаимного уничтожения крайних слагаемых числителя, получаем

$$\frac{3\cos x \cdot \sin 3x + 3\sin x \cdot \cos 3x}{4} < \frac{3}{8}.$$

Теперь после вынесения за скобки числового множителя 3, замечаем, что в скобках образуется формула синуса суммы двух аргументов, т.е.

$$\frac{3(\cos x \cdot \sin 3x + \sin x \cdot \cos 3x)}{4} < \frac{3}{8},$$

$$\frac{3\sin(3x + x)}{4} < \frac{3}{8},$$

$$\frac{3\sin 4x}{4} < \frac{3}{8}.$$

Умножение обеих частей последнего неравенства на дробь $\dfrac{4}{3}$, очевидно, приводит его к виду

$$\sin 4x < \frac{1}{2}.$$

Осуществим замену неизвестного $4x = t$, получим простейшее тригонометрическое неравенство $\sin t < \frac{1}{2}$. Такое неравенство мы уже решали в **Примере 1.2.3.** Там было получено:

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}.$$

Нам осталось лишь сделать обратную замену и найти x:

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < 4x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z},$$

$$-\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{7\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}\right), n \in \mathbf{Z}.$

§ 1.3. Методы решения тригонометрических неравенств

К методам решения тригонометрических неравенств, не являющихся простейшими, относятся:

1) разложение на множители;
2) метод интервалов;
3) приёмы, использующие свойства монотонности и периодичности тригонометрических функций;
4) специальные приёмы.

Рассмотрим сначала тригонометрическое неравенство, при решении которого используется метод «*разложения на множители*».

Пример 1.3.1. Решить неравенство $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos 2x < 0$.

Решение. Здесь можно воспользоваться формулой понижения степени (для первого слагаемого левой части неравенства) и формулой косинуса двойного аргумента (для второго слагаемого). Имеем

$$1 - \cos x + 2\cos^2 x - 1 < 0.$$

Или

$$2\cos^2 x - \cos x < 0,$$
$$\cos x(2\cos x - 1) < 0.$$

Очевидно, что произведение, состоящее из двух множителей, будет строго отрицательным, если множители имеют разные знаки, т.е.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x<0,\\ 2\cos x-1>0;\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x>0,\\ 2\cos x-1<0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x<0,\\ \cos x>\dfrac{1}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x>0,\\ \cos x<\dfrac{1}{2}.\end{cases}\end{array}\right.$$

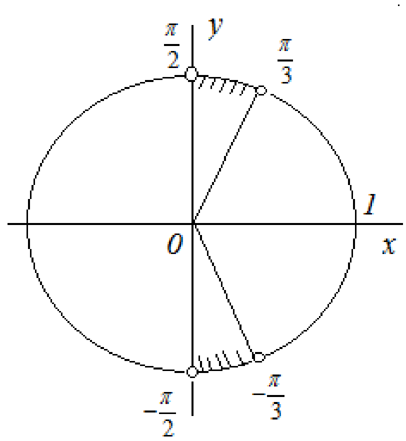

Рис. 15

Очевидно, что первая система совокупности имеет пустое множество решений, т.е. Ø. Решение второй системы неравенств изображено на Рис. 15.

Значит,

$$x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\, n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right),\, n\in\mathbf{Z}.$

Теперь рассмотрим тригонометрическое неравенство, в записи которого используется дробь. Оно требует применения «*метода интервалов*».

Пример 1.3.2. Решить неравенство $\dfrac{\cos 2x+3\cos x+2}{(\sin x-1)\cdot\sin(x+3)}\geq 0$.

Решение. Используя формулу косинуса двойного аргумента, в числителе дроби легко можно получить квадратичное выражение относительно $\cos x$, после разложения на множители, неравенство примет вид

$$\frac{(2\cos x+1)\cdot(\cos x+1)}{(\sin x-1)\cdot\sin(x+3)}\geq 0.$$

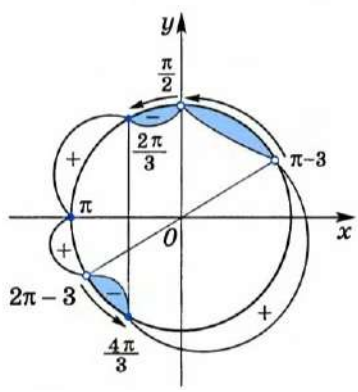

Рис. 16

Заметим, что в числителе имеется множитель, который обращается в ноль, но не меняет своего знака: $\cos x+1\geq 0$ для всех *x*. В знаменателе дроби схожая ситуация, только там один из множителей не положителен: $\sin x-1\leq 0$ для всех *x*. В связи с этим неравенство удобнее переписать в виде

$$\frac{(2\cos x+1)\cdot(\cos x+1)}{(1-\sin x)\cdot\sin(x+3)}\le 0.$$

Найдём нули числителя:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x=-\frac{1}{2},\\ \cos x=-1,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\\ x=\pi+2\pi n;\end{array}\right.\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Следует обратить внимание, что при переходе через точку $x=\pi+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$, знак дроби не меняется!

Найдём теперь точки, обращающие знаменатель дроби в ноль:

$$\left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \sin(x+3)=0,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\\ x=-3+\pi n;\end{array}\right.\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Разместим соответствующие точки в пределах одного тригонометрического круга (поскольку период этой дроби равен 2π) и, применяя метод интервалов (см. Рис. 16), получаем:

$$x\in\left(\pi-3;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right]\cup\{\pi\}\cup\left(2\pi-3;\frac{4\pi}{3}\right].$$

Заметим, что в записи полученного результата имеется одна выколотая точка и одна изолированная. С учётом периода, можем записать

$$x\in\left(\pi-3+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]\cup\{\pi+2\pi n\}\cup$$

$$\cup\left(2\pi-3+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right],\quad n\in\mathbf{Z}.. \;\; . \;\; / \;\; .$$

Далее рассмотрим тригонометрическое неравенство, при решении которого потребуется применение свойства периодических функций в сочетании с методом интервалов.

Пример 1.3.3. Решить неравенство $tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}>0$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}$ и установим её основной период. Известно, что наименьший положительный период функции $y=tg\,x$ равен $T_0=\pi$.

Известно, что для нахождения основного периода функции $y=f(kx)$ используется формула

$$T=\frac{T_0}{|k|}.$$

У нас: $f_1(x)=tg\frac{x}{2}$ будет иметь период $T_1=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=2\pi$, в свою очередь $f_2(x)=tg\frac{x}{3}$ будет иметь период $T_2=\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|}=3\pi$.

Кроме того, известно, что сложная функция $y=f_1(x)\pm f_2(x)$ имеет основной период, который вычисляется по формуле $T_f=НОК(T_1;T_2)$.

Значит, в нашем случае $T_f=НОК(2\pi;3\pi)=6\pi$.

Итак, основной период функции $f(x)=tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}$ равен 6π.

Теперь найдём решение данного неравенства на любом промежутке, длина которого равна основному периоду функции $f(x)=tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}$, например, на $[0;6\pi)$.

На выбранном промежутке найдем корни уравнения $tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}=0$. Воспользуемся «*методом сравнения аргументов*» (т.е. для уравнения вида $tg(\alpha x)=tg(\beta x)$ корни находятся из соотношения $\alpha x=\beta x+\pi n, n\in\mathbf{Z}$).

В нашем случае:

$$\frac{x}{2}=\frac{x}{3}+\pi n, n\in\mathbf{Z},$$

Откуда $x=6\pi n, n\in\mathbf{Z}$. Промежутку $[0;6\pi)$ принадлежит только один корень $x_1=0$.

Обратим внимание, что некоторые точки выбранного промежутка $[0;6\pi)$не входят в ОДЗ данного неравенства. Установим эти особые точки:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbf{Z},\mathbf{?}\\ \frac{x}{3}\neq\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbf{Z};\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l}x\neq\pi+2\pi n, n\in\mathbf{Z},\mathbf{?}\\ x\neq\frac{3\pi}{2}+3\pi k, k\in\mathbf{Z}..\end{array}$$

К числу особых точек относятся:

$$0\le\pi+2\pi n<6\pi\Leftrightarrow-\pi\le2\pi n<5\pi\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le n<\frac{5}{2}\Rightarrow n=0,1,2.$$

Значит, $x_1\neq\pi, x_2\neq3\pi, x_3\neq5\pi$.

Аналогично

$$0\le\frac{3\pi}{2}+3\pi k<6\pi\Leftrightarrow-\frac{3\pi}{2}\le3\pi k<\frac{9\pi}{2}\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\le k<\frac{3}{2}\Rightarrow k=0,1.$$

Т.е., $x_4\neq\frac{3\pi}{2}, x_5\neq\frac{9\pi}{2}$.

Отобразим теперь точки разрыва функции $f(x)=tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}$, а также корни уравнения $tg\frac{x}{2}-tg\frac{x}{3}=0$ на промежутке $[0;6\pi)$ координатной оси x (см. Рис. 17).

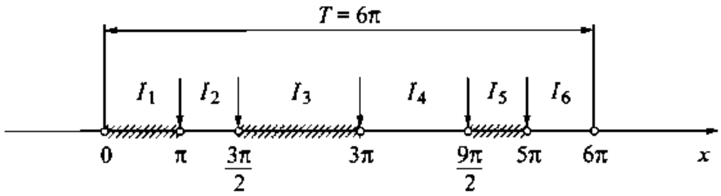

Рис. 17

Получили шесть «участков»: $I_1=(0;\pi)$, $I_2=\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$, $I_3=\left(\frac{3\pi}{2};3\pi\right)$, $I_4=\left(3\pi;\frac{9\pi}{2}\right)$, $I_5=\left(\frac{9\pi}{2};5\pi\right)$, $I_6=(5\pi;6\pi)$, на каждом из которых рассматриваемая функция непрерывна и сохраняет знак. Установим знаки функции на каждом из полученных участков «*методом пробных точек*».

Выбираем сначала $x=\frac{\pi}{2}\in I_1$ и находим $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=tg\frac{\pi}{4}-tg\frac{\pi}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}>0.$$

Аналогично получим, что: $x=\in I_2,\ f(x)<0;$ $x=\in I_3,\ f(x)>0;$ $x=\in I_4,\ f(x)<0;$ $x=\in I_5,\ f(x)>0;$ $x=\in I_6,\ f(x)<0.$

В результате получаем решение заданного неравенства на промежутке, равном длине основного периода функции $f(x)$:

$$x\in(0;\pi)\cup\left(\frac{3\pi}{2};3\pi\right)\cup\left(\frac{9\pi}{2};5\pi\right).$$

Учитывая основной период функции $f(x)$, окончательно получим

$$x\in(6\pi n;\pi+6\pi n)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+6\pi n;3\pi+6\pi n\right)\cup\left(\frac{9\pi}{2}+6\pi n;5\pi+6\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ:

$$x\in(6\pi n;\pi+6\pi n)\cup\left(\frac{3\pi}{2}+6\pi n;3\pi+6\pi n\right)\cup\left(\frac{9\pi}{2}+6\pi n;5\pi+6\pi n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$$

В заключение этого параграфа рассмотрим пример, *решаемый специальным приёмом*.

Идея этого приёма основана на координатной интерпретации понятий синус и косинус. Так как $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ есть абсцисса и ордината точки тригонометрической окружности, то решение неравенства

$$f\left(\cos\varphi;\sin\varphi\right)>0$$

равносильно решению смешанной алгебраической системы

$$\begin{cases} f\left(x;y\right)>0, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Эта система определяет ту часть единичной окружности, которая содержится в области $f\left(x;y\right)>0$.

Решения системы уравнений

$$\begin{cases} f\left(x;y\right)=0, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

есть концы дуг, на которых выполняется данное тригонометрическое неравенство.

Пример 1.3.4. Решить неравенство $\sin\varphi>4\sqrt{3}\cos^3\varphi$.

Решение. Составляем смешанную систему неравенств

$$\begin{cases} y>4\sqrt{3}x^3, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Решением этой вспомогательной задачи является дуга тригонометрической окружности, расположенная выше кубической параболы $y=4\sqrt{3}x^3$. Находим точки пересечения кривых, т.е. решаем систему уравнений

$$\begin{cases} y=4\sqrt{3}x^3, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Подстановка y из первого уравнения системы во второе влечёт появление равносильного уравнения с одной переменной

$$x^2+\left(4\sqrt{3}x^3\right)^2=1.$$

Или

$$48x^6+x^2=1.$$

Последнее уравнение имеет лишь два действительных корня $x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Дуга тригонометрической окружности, соединяющая точки с такими абсциссами, и расположенная выше параболы, задаётся двойным неравенством

$$\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{4\pi}{3} \text{ (см. Рис. 18).}$$

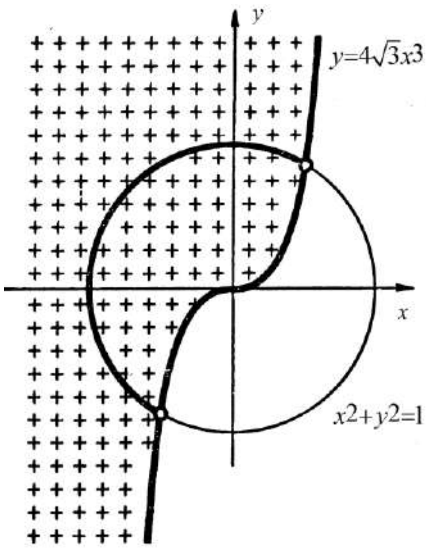

Рис. 18

Поэтому окончательным решением данного неравенства будет множество:

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n<\varphi<\frac{4\pi}{3}2\pi n,\, n\in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\varphi \in \left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}2\pi n\right), n\in \mathbf{Z}$.

§ 1.4. Доказательство тригонометрических неравенств

В этом параграфе речь пойдёт о тригонометрических неравенствах, справедливость которых надо доказать на заданном множестве значений переменной. Если такое множество не указано, то подразумевается, что переменная может принимать любое действительное значение.

Известно несколько способов доказательства неравенств (в том числе и тригонометрических):

1) доказательство неравенств с помощью определения;
2) синтетический метод доказательства неравенств;
3) доказательство неравенств методом от противного;
4) доказательство неравенств методом математической индукции;
5) доказательство с использованием свойств геометрических фигур.

Рассмотрим суть этих способов, сопроводив некоторые из них соответствующими примерами.

1) *По определению* считается $a>b$, если разность $a-b$ – положительное число. Поэтому для доказательства неравенства вида

$$f(a,b,...,k)>\mathrm{g}(a,b,...,k)$$

на заданном множестве значений $a,b,...,k$ необходимо составить разность $f(a,b,...,k)-\mathrm{g}(a,b,...,k)$ и убедиться в том, что она положительна при заданных значениях $a,b,...,k$. Аналогично применяется этот способ для доказательства неравенств вида:

$$f(a,b,...,k)<\mathrm{g}(a,b,...,k),$$
$$f(a,b,...,k)\geq \mathrm{g}(a,b,...,k),$$
$$f(a,b,...,k)\leq \mathrm{g}(a,b,...,k).$$

<u>Пример 1.4.1.</u> Доказать, что если $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, справедливо неравенство $\sin\alpha>\sin^2\alpha$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\sin\alpha-\sin^2\alpha=\sin\alpha(1-\sin\alpha).$$

Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, то $\sin\alpha>0$ и $1-\sin\alpha>0$. Следовательно, разность $\sin\alpha-\sin^2\alpha$ будет положительной величиной, как произведение двух положительных величин. Это означает, что по определению доказываемое неравенство справедливо при условии, что $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2) Идея *синтетического способа* доказательства неравенств состоит в том, что с помощью ряда преобразований доказываемое неравенство выводят из некоторых известных (опорных) неравенств. В качестве опорных неравенств могут использоваться, например, такие неравенства:

А) $a^2\geq 0$;

Б) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 0$, если $ab>0$;

В) $ax^2+bx+c>0$, если $a>0$ и $b^2-4ac<0$;

Г) неравенство, содержащее классические средние величины

$$\mathrm{H_n}\leq \mathrm{G_n}\leq \mathrm{A_n}\leq \mathrm{Q_n}, \qquad (*)$$

в котором:

$\mathrm{H_n}=\dfrac{\mathrm{n}}{\frac{1}{\mathrm{a}_1}+\frac{1}{\mathrm{a}_2}+\ldots+\frac{1}{\mathrm{a_n}}}$ – *среднее гармоническое* величин $a_1,a_2,\ldots,a_n$;

$\mathrm{G_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$ – *среднее геометрическое* величин $a_1,a_2,\ldots,a_n$;

$\mathrm{A_n}=\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ – *среднее арифметическое* величин $a_1,a_2,\ldots,a_n$;

$\mathrm{Q_n}=\sqrt{\dfrac{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+\ldots+a_n^{\,2}}{n}}$ – *среднее квадратическое* величин $a_1,a_2,\ldots,a_n$.

Неравенство (*) имеет весьма интересную геометрическую интерпретацию при n=2.

На Рис. 19 изображена трапеция $ABCD$. На ней отмечены четыре отрезка:

PQ – отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции, параллельно её основаниям a и b.

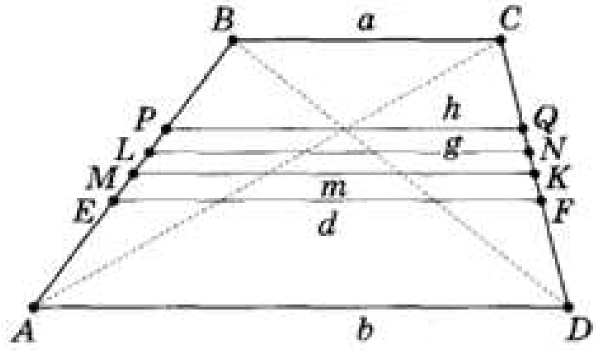

Рис. 19

$$\mathrm{PQ}=\mathrm{H}_2=\frac{2}{\frac{1}{\mathrm{a}}+\frac{1}{\mathrm{b}}}$$ – среднее гармоническое оснований трапеции.

LN – отрезок, делящий данную трапецию на BCNL и LNDA – две подобные друг другу трапеции.

$\mathrm{LN}=\mathrm{G}_2=\sqrt{\mathrm{ab}}$ – среднее геометрическое основание трапеции.

MK – отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, и параллельный её основаниям (средняя линия).

$\mathrm{MK} = \mathrm{A}_2 = \dfrac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2}$ – среднее арифметическое оснований трапеции.

EF – отрезок, параллельный основаниям трапеции, концы которого лежат на её боковых сторонах, причем такой, что трапеции EBCF и AEFD равновелики (т.е. имеют равные площади).

$\mathrm{EF} = \mathrm{Q}_2 = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ – среднее квадратическое отрезков a и b.

Пример 1.4.2. Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, $\alpha \neq \pi \mathrm{n}, \mathrm{n} \in \mathbf{Z}$, справедливо неравенство $a\sin^2\alpha + \dfrac{b}{\sin^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab}$.

Доказательство.

Воспользуемся неравенством, связывающим среднее арифметическое и среднее геометрическое двух величин a_1, a_2:

$$\frac{\mathrm{a}_1+\mathrm{a}_2}{2} \geq \sqrt{\mathrm{a}_1 \cdot \mathrm{a}_2}, \mathrm{a}_1 \geq 0, \mathrm{a}_2 \geq 0.$$

Введём обозначения $a_1 = \mathrm{a}\, sin^2\alpha,\ a_2 = \dfrac{\mathrm{b}}{sin^2\alpha}$.

Тогда

$$\frac{\mathrm{a}\, sin^2\alpha + \dfrac{\mathrm{b}}{sin^2\alpha}}{2} \geq \sqrt{\mathrm{a}\, sin^2\alpha \cdot \frac{\mathrm{b}}{sin^2\alpha}},$$

откуда

$$a\sin^2\alpha + \frac{b}{\sin^2\alpha} \geq 2\sqrt{ab},$$

что и требовалось доказать.

3) Идея способа доказательства неравенств *методом от противного* хорошо известна. Сначала предполагают, что данное неравенство неверно (а верно противоположное по смыслу неравенство), а затем с помощью цепочки преобразований приводят его к виду, который указывает на наличие противоречия, из чего делают вывод об ошибочности предположения и верности исходного утверждения.

Пример 1.4.3. Доказать неравенство $\cos 36^\circ > tg 36^\circ$.

Доказательство. Предположим, что данное неравенство неверно, т.е. $\cos 36^\circ \leq tg 36^\circ$. Тогда получим

$$\cos 36^\circ \leq \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ}, \quad \cos^2 36^\circ \leq \sin 36^\circ.$$

Применим к левой части последнего неравенства формулу понижения степени

$$1+\cos 72^{\circ} \le 2\sin 36^{\circ},$$
$$1+\cos\left(90^{\circ}-18^{\circ}\right) \le 2\sin\left(6^{\circ}+30^{\circ}\right),$$
$$1+\sin 18^{\circ} \le 2\sin 6^{\circ}\cos 30^{\circ}+2\cos 6^{\circ}\sin 30^{\circ},$$
$$1+2\sin 9^{\circ}\cos 9^{\circ} \le 2\sin 6^{\circ}\cos 30^{\circ}+\cos 6^{\circ}.$$

Так как

$$1>\cos 6^{\circ},\ \sin 9^{\circ}>\sin 6^{\circ}>0,\ \cos 9^{\circ}>\cos 30^{\circ}>0,$$

то последнее неравенство ложно! Значит, остаётся принять, что исходное неравенство является верным.

4) Идея *метода математической индукции* также хорошо известна.

Утверждение, зависящее от натурального числа *n*, справедливо для любого *n*, если выполнены два условия:

а) утверждение справедливо для *n* =1 (*базис индукции*);

б) из справедливости утверждения при *n* = *k* (при любом натуральном значении *k*) вытекает его справедливость и для *n* = *k* +1 (*шаг индукции*).

Пример 1.4.4. Докажите, что для любого натурального *n* справедливо неравенство $\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin n\alpha \le n$.

Доказательство.

Проверим сначала справедливость базиса индукции:

а) *n* =1: $\sin\alpha \le 1$(верно в силу ограниченности синуса).

б) предположим, что неравенство справедливо при *n* = *k*, т.е., что справедливо неравенство

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin k\alpha \le k.$$

Докажем теперь справедливость неравенства при *n* = *k* +1. Для это добавим к обеим частям неравенства, являющегося индуктивным предположением слагаемое $\sin(k+1)\alpha$, т.е. получим неравенство вида

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha \le k+\sin(k+1)\alpha.$$

Сравним *k* +1 и $k+\sin(k+1)\alpha$, т.е.

$$k+1-\left(k+\sin(k+1)\alpha\right)=1-\sin(k+1)\alpha.$$

Для справедливости исходного неравенства необходимо, чтобы выполнялось условие

$$1-\sin(k+1)\alpha \ge 0.$$

Действительно, т.к. $\sin(k+1)\alpha \le 1$ (в силу ограниченности синуса), то

$$1-\sin(k+1)\alpha \ge 0.$$

Следовательно,

$$k+1 \ge k+\sin(k+1)\alpha \ge \sin\alpha+\sin 2\alpha+...+\sin k\alpha+\sin(k+1)\alpha,$$

тогда по свойству транзитивности

$$k+1 \ge \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin k\alpha + \sin(k+1)\alpha.$$

Таким образом, по принципу математической индукции из пунктов а) и б) следует, что данное неравенство справедливо при любом натуральном *n*.

5) Иногда для доказательства тригонометрических неравенств используют *свойства некоторых геометрических фигур* (например, свойство суммы внутренних углов треугольника).

Пример 1.4.5. Доказать, что если α, β, γ – углы треугольника, то справедливы неравенства $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Доказательство. Преобразуем выражение, входящее в левую часть первого неравенства:

$$y = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 - 2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} =$$

$$= -2\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1.$$

Полученная сумма принимает наибольшее значение, если

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 0, \\ \cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 1. \end{cases}$$

Эта система разрешима при $\alpha = \beta = 60^\circ$. При этом $y_{наиб} = \frac{3}{2}$, т. е. $y \le \frac{3}{2}$. Тем самым, первое неравенство доказано.

Перейдём к доказательству второго неравенства. Так как α, β, γ – углы треугольника, то углы $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ положительны и меньше 90°. В этом случае можно применить опорное неравенство, связывающее среднее геометрическое и среднее арифметическое для косинусов

$$\sqrt[3]{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \le \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} \le \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}.$$

В случае половинных аргументов оно примет вид:

$$\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} \le \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

или

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \le \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

что и требовалось доказать.

Пример 1.4.6. Доказать, что если α, β, γ – углы треугольника, то

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}.$$

Доказательство. Преобразуем левую часть данного неравенства

$$\mathrm{L}=\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right].$$

Так как $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ по условию, поэтому

$$\alpha-\beta+\gamma=180^0-2\beta;$$

$$-\alpha+\beta+\gamma=180^0-2\alpha;$$

$$\alpha+\beta-\gamma=180^0-2\gamma.$$

Отсюда следует, что

$$\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{180^0-2\beta}{2}=\sin\left(90^0-\beta\right)=\cos\beta;$$

$$\sin\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{180^0-2\alpha}{2}=\sin\left(90^0-\alpha\right)=\cos\alpha;$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=\sin\frac{180^0-2\gamma}{2}=\sin\left(90^0-\gamma\right)=\cos\gamma;$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{180^0}{2}=\sin 90^0=1.$$

Тогда

$$\mathrm{L}=\frac{1}{4}\left[\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\right],$$

но

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}$$ (см. **<u>Пример 1.4.5.</u>**).

Значит,

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\le\frac{1}{2}.$$

Умножим обе части последнего неравенства на $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4}\left[\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\right]\le\frac{1}{8}.$$

Отсюда следует, что $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8}$, если α, β, γ – углы треугольника.

ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 2.1. Простейшие уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

✍ *Уравнением, содержащим обратные тригонометрические функции*, называется равенство, содержащее неизвестную величину под знаком обратной тригонометрической функции (одной или нескольких).

Простейшими уравнениями, в которых требуется найти неизвестную величину, находящуюся под знаком одной из аркфункций называются уравнения вида:

1) $\arcsin x = m$;
2) $\arccos x = m$;
3) $\operatorname{arctg} x = m$;
4) $\operatorname{arctg} x = m$.

Так как все обратные тригонометрические функции монотонны в области своего определения, то все эти уравнения имеют единственное решение.

Уточним лишь условия, накладываемые на число m, при которых уравнения разрешимы:

1) $\arcsin x = m$, $m \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
2) $\arccos x = m$, $m \in [0; \pi]$;
3) $\operatorname{arctg} x = m$, $m \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;
4) $\operatorname{arctg} x = m$, $m \in (0; \pi)$.

<u>Пример 2.1.1.</u> Решите уравнение $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Так как $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то данное уравнение разрешимо и имеет единственное решение. Известно, что $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, поэтому $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

<u>Пример 2.1.2.</u> Решите уравнение $\arccos x = \frac{3\pi}{2}$.

Решение. Так как $\frac{3\pi}{2} \notin [0; \pi]$, то данное уравнение решений не имеет.

§ 2.2. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции, сводящиеся заменой переменной к алгебраическим уравнениям

Рассмотрим уравнение вида

$$f(\arcsin x) = 0, \tag{2.2.1}$$

где под знаком функции f может находиться любая другая аркфункция.

Следует иметь в виду, что в зависимости от конфигурации функции f решение данного уравнения может содержать ОДЗ, а может и не содержать такового!

С помощью подстановки $t = \arcsin x$ уравнение (2.2.1) сводится к решению смешанной системы:

$$\begin{cases} f(t) = 0; \\ \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \tag{2.2.2}$$

с последующим решением простейших уравнений (в зависимости от числа решений смешанной системы).

Пример 2.2.1. Решите уравнение $2\arcsin^2 x - 5\arcsin x + 2 = 0$.

Решение. Введём замену $t = \arcsin x$, тогда исходное уравнение примет вид $2t^2 - 5t + 2 = 0$, с оговоркой, что $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$. Очевидно, что корнями квадратного уравнения являются числа $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$. Так как $t_1 = 2 \notin \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то уравнение $\arcsin x = 2$ не имеет решений. Значит, остается только решить простейшее уравнение $\arcsin x = \frac{1}{2}$.

Ясно, что $x = \sin\frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \sin\frac{1}{2}$.

Замечание 2.2.1. Отметим, что к уравнению вида (2.2.1) сводятся уравнения вида

$$f(\arcsin x; \arccos x) = 0. \tag{2.2.3}$$

Связано это с тем, что имеет место тождество

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \text{где } x \in [-1;1].$$

Пример 2.2.2. Решите уравнение $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Из тождества $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ следует, что $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}.$$

Или

$$\frac{\pi}{2} - 2\arcsin x = \frac{\pi}{6}.$$

Откуда получаем

$$-2\arcsin x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}.$$

Далее имеем

$$\arcsin x = \frac{\pi}{6}.$$

Окончательно получаем, что

$$x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

<u>Пример 2.2.3.</u> Решите уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = \dfrac{\pi^2}{18}$.

Решение. Воспользуемся ещё раз соотношением $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$.

В результате уравнение примет вид

$$\arcsin x \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi^2}{18} \Leftrightarrow 18\arcsin^2 x - 9\pi \arcsin x + \pi^2 = 0.$$

Пусть $t = \arcsin x$, $|t| \le \dfrac{\pi}{2}$, получаем квадратное уравнение

$$18t^2 - 9\pi t + \pi^2 = 0.$$

$$D = (-9\pi)^2 - 4 \cdot 18 \cdot \pi^2 = 81\pi^2 - 72\pi^2 = 9\pi^2 = (3\pi)^2.$$

$$t_1 = \frac{9\pi + 3\pi}{36} = \frac{12\pi}{36} = \frac{\pi}{3};$$

$$t_2 = \frac{9\pi - 3\pi}{36} = \frac{6\pi}{36} = \frac{\pi}{6}.$$

Тогда

$$\arcsin x = \frac{\pi}{3};\ \arcsin x = \frac{\pi}{6}.$$

$$x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Замечание 2.2.2. Аналогичный приём можно использовать при решении уравнений вида $f(\operatorname{arctg} x; \operatorname{arcctg} x) = 0$.

Пример 2.2.4. Решите уравнение $4\operatorname{arctg} x - 6\operatorname{arcctg} x = \pi$.

Решение. Так как $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, т.е. $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$. Тогда исходное уравнение принимает вид

$$4\operatorname{arctg} x - 6\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \pi.$$

Далее получаем

$$10\operatorname{arctg} x - 3\pi = \pi.$$

Или

$$10\operatorname{arctg} x = 4\pi.$$

Получаем

$$\operatorname{arctg} x = \frac{2\pi}{5}.$$

Значит, $x = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$.

Ответ: $x = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{5}$.

Пример 2.2.5. Решите уравнение $12\operatorname{arctg}^2\frac{x}{2} = \pi\left(3\pi + \operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)$.

Решение.

Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$ через t; $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. В результате такой замены получаем квадратное уравнение

$$12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{3\pi}{4}, \\ t = -\frac{\pi}{3}. \end{array}\right.$$

Поскольку неизвестная t должна удовлетворять неравенству $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, то, очевидно $t = \frac{3\pi}{4}$ – постороннее значение. Значит, $t = -\frac{\pi}{3}$, но тогда

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{2}=-\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow x=-2\sqrt{3}.$$

Ответ: $-2\sqrt{3}$.

§ 2.3. Уравнения, содержащие одноимённые обратные тригонометрические функции

Способ решения уравнений, содержащих одноименные обратные тригонометрические функции различных аргументов, основывается на свойстве монотонности этих функций.

Следует помнить, что функции $y=\arcsin x$ и $y=\operatorname{arctg} x$ являются строго возрастающими, а функции $y=\arccos x$ и $y=\operatorname{arcctg} x$, наоборот, строго убывают на своих областях определения. В связи с этим справедливы следующие равносильные переходы.

I) Уравнение вида $\arcsin f(x)=\arcsin g(x)$.

$$\arcsin f(x)=\arcsin g(x)\Leftrightarrow \Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ |f(x)|\le 1\end{cases} \quad \text{или} \quad \arcsin f(x)=\arcsin g(x)\Leftrightarrow \Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ |g(x)|\le 1.\end{cases}$$

<u>Пример 2.3.1.</u> Решите уравнение $\arcsin\left(3x^2-4x-1\right)=\arcsin(x+1)$.

Решение. Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases}3x^2-4x-1=x+1,\\ |x+1|\le 1,\end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases}3x^2-5x-2=0,\\ |x+1|\le 1,\end{cases}, \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=2,\ x_2=-\dfrac{1}{3},\\ x\in[-2;0].\end{cases}$$

Очевидно, что число $x_1=2$ не удовлетворяет условию $x\in[-2;0]$. Поэтому корнем уравнения является лишь $x_2=-\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

II) Уравнение вида $\arccos f(x)=\arccos g(x)$.

$$\arccos f(x)=\arccos g(x)\Leftrightarrow \Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ |f(x)|\le 1,\end{cases} \quad \text{или} \quad \arccos f(x)=\arccos g(x)\Leftrightarrow \Leftrightarrow\begin{cases} f(x)=g(x),\\ |g(x)|\le 1.\end{cases}$$

<u>Пример 2.3.2.</u> Решите уравнение $\arccos\left(x^2-8\right)=\arccos(x+4)$.

Решение. Это уравнение равносильно следующей смешанной системе

$$\begin{cases} x^2-8=x+4, \\ |x+4|\le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12=0, \\ -1\le x+4\le 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=4, \\ x_2=-3 \end{array}\right. \\ -5\le x\le -3. \end{cases}$$

Ясно, что число $x_1=4$ не удовлетворяет условию $-5\le x\le -3$. Поэтому корнем уравнения может быть лишь $x_2=-3$.

Ответ: -3.

III) Уравнение вида $\operatorname{arctg} f(x)=\operatorname{arctg} g(x)$.

В таком случае имеет место следующий равносильный переход

$$\operatorname{arctg} f(x)=\operatorname{arctg} g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

<u>Пример 2.3.3.</u> Решите уравнение $\operatorname{arcrg}\left(5x^2-3x-1\right)=\operatorname{arctg}\left(6x-5\right)$.

Решение. Это уравнение равносильно следующей смешанной системе

$$5x^2-3x-1=6x-5, \ \Leftrightarrow\ 5x^2-9x+4=0, \ \Leftrightarrow\ x_1=1,\ x_2=\frac{4}{5}.$$

Ответ: $0{,}8$; 1.

IV) Уравнение вида $\operatorname{arcctg} f(x)=\operatorname{arcctg} g(x)$.

В этом случае выполняется равносильный переход

$$\operatorname{arcctg} f(x)=\operatorname{arcctg} g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x).$$

<u>Пример 2.3.4.</u> Решите уравнение $\operatorname{arccrg}\left(4x^2-2x-2\right)=\operatorname{arcctg}\left(x+8\right)$.

Решение. Это уравнение равносильно следующей смешанной системе

$$4x^2-2x-2=x+8, \ \Leftrightarrow\ 4x^2-3x-10=0, \ \Leftrightarrow\ x_1=2,\ x_2=-\frac{5}{4}.$$

Ответ: –1,25; 2.

Рассмотрим теперь более сложные случаи, т.е. такие уравнения, при решении которых нет возможности применить вышестоящие равносильные переходы. Как правило, такие уравнения содержат некоторое «отягощение», в качестве которого, например, может выступать числовой коэффициент, стоящий хотя бы перед одной из аркфункций.

В таких случаях следует выполнить преобразование, суть которого состоит в воздействии на обе части уравнения некоторой тригонометрической операции (например, приписывание к обеим частям исходного уравнения какой-либо тригонометрической функции).

В большинстве случаев такое преобразование приводит к неэквивалентному уравнению, например, для уравнения

$$f(x)=\varphi(x) \qquad (2.3.1)$$

можно перейти к уравнению

$$sin\left(f(x)\right)=sin\left(\varphi(x)\right). \qquad (2.3.2)$$

При этом уравнение (2.3.2) является следствием уравнения (2.3.1), но обратное утверждение не имеет места, так как из уравнения (2.3.2) можно получить

$$f(x)=(-1)^{n}\cdot\varphi(x)+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \qquad (2.3.3)$$

Легко заметить, что при всяком $n\neq 0$ любое решение уравнения (2.3.2) является посторонним для уравнения (2.3.1). Для устранения посторонних корней, очевидно, нужна проверка, которая осуществляется путём подстановки найденных значений в уравнение (2.3.1).

<u>Пример 2.3.5.</u> Решите уравнение $2\arcsin x=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

Решение.

ОДЗ: $|x|\leq 1$.

Подействуем на обе части исходного уравнения функцией синус, получим

$$\sin(2\arcsin x)=\sin\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right).$$

Или

$$2\sin(\arcsin x)\cdot\cos(\arcsin x)=\sin\left(\arcsin\sqrt{1-x^2}\right).$$

Далее получаем уравнение вида

$$2x\cdot\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}.$$

Преобразуем его к виду

$$2x\cdot\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x^2}=0.$$

Далее имеем

$$\sqrt{1-x^2}\cdot(2x-1)=0.$$

Откуда получаем совокупность, состоящую из двух более простых уравнений

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{1-x^2}=0,\\ (2x-1)=0\cdot\end{array}\right.$$

Очевидно, что решениями первого уравнения этой совокупности будут числа $x=\pm 1$, а решениям второго уравнения будет $x=\dfrac{1}{2}$.

Непосредственной подстановкой каждого из полученных чисел в исходное уравнение получим:

1) $x=1$: $2\arcsin 1=\arcsin\sqrt{1-1}$; $2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\arcsin 0$; $\pi\neq 0$.

Полученное противоречие указывает на то, что $x=1$ – посторонний корень.

2) $x=-1$: $2\arcsin(-1)=\arcsin\sqrt{1-1}$; $2\cdot\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=\arcsin 0$; $-\pi\neq 0$.

Это означает, что число $x=-1$ также является посторонним корнем.

3) $x=\frac{1}{2}$: $2\arcsin\frac{1}{2}=\arcsin\sqrt{1-\frac{1}{4}}$; $2\cdot\frac{\pi}{6}=\arcsin\sqrt{\frac{3}{4}}$; $\frac{\pi}{3}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\ \frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$.

Получили верное числовое равенство, поэтому единственным корнем этого уравнения является $x=\frac{1}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 2.3.6. Решите уравнение $\arccos x+\arccos 2x=\arccos(3x-1)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} |x|\le 1, \\ |2x|\le 1, \\ |3x-1|\le 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} -1\le x\le 1, \\ -\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}, \\ 0\le x\le\frac{2}{3}. \end{cases}$

В результате решения последней системы двойных неравенств, получаем $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Подействуем на обе части исходного уравнения функцией косинус:

$$\cos(\arccos x+\arccos 2x)=\cos(\arccos(3x-1));$$

$$\cos(\arccos x)\cdot\cos(\arccos 2x)-\sin(\arccos x)\cdot\sin(\arccos 2x)=3x-1;$$

$$x\cdot 2x-\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-(2x)^2}=3x-1;$$

$$2x^2-3x+1=\sqrt{(1-x^2)\cdot(1-4x^2)};$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$2x^2-3x+1\ge 0,$$

выполнимость которого позволит возвести обе части последнего уравнения в квадрат.

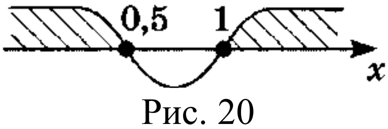

Рис. 20

Из Рис. 20 видно, что $x\in\left(-\infty;\frac{1}{2}\right]\cup[1;+\infty)$.

Но учитывая условие $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, полученное в ОДЗ, заключаем, что корнями данного уравнения могут быть лишь числа, удовлетворяющие требованию $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Предварительно разложив на множители квадратный трёхчлен, стоящий в левой части уравнения, и возводя в квадрат обе части, получаем

$$(x-1)^2(2x-1)^2 = \left(1-x^2\right)\left(1-4x^2\right);$$

$$(x-1)(2x-1)\left(2x^2-3x+1-2x^2-3x-1\right)=0;$$

$$(x-1)(2x-1)\cdot 6x = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{1}{2}, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Очевидно, что $x=1$ не удовлетворяет условию $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: 0; $\frac{1}{2}$.

Пример 2.3.7. Решите уравнение

$$\arccos\left(4x^2-3x-2\right)+\arccos\left(3x^2-8x-4\right)=\pi.$$

Решение.

Так как имеет место соотношение

$$\pi - \arccos t = \arccos(-t),$$

то имеет место следующая цепочка преобразований

$$\arccos\left(4x^2-3x-2\right)=\pi-\arccos\left(3x^2-8x-4\right);$$

$$\arccos\left(4x^2-3x-2\right)=\arccos\left(-3x^2+8x+4\right).$$

Получили уравнение вида $\arccos f(x) = \arccos g(x)$ (см. случай II выше по тексту). Тогда имеем

$$\begin{cases} 4x^2-3x-2=-3x^2+8x+4, \\ \left|4x^2-3x-2\right| \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x^2-11x-6=0, \\ \left|4x^2-3x-2\right| \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-\dfrac{3}{7}, \end{array}\right. \\ \left|4x^2-3x-2\right| \le 1. \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{3}{7}.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{7}$.

§ 2.4. Уравнения, содержащие разноимённые обратные тригонометрические функции

В том случае, когда левая и правая части уравнения содержат разноимённые обратные тригонометрические функции, пользуются известными тригонометрическими тождествами. Эти уравнения являются чуть более сложными по сравнению с уравнениями, описанными в § 2.3. При решении большинства уравнений такого рода бывает целесообразно не останавливаться на равносильности выполняемых преобразований, а сразу переходить к решению уравнения-следствия, после чего делать проверку найденных значений неизвестной.

Рассмотрим способы решения наиболее типичных уравнений этого рода.

Пусть дано уравнение вида $arcsin\ f(x) = arccos\ g(x)$.

Допустим, что x_0 – решение этого уравнения. Обозначим $arcsin\ f(x_0) = arccos\ g(x_0)$ через a. Тогда $sin\,a = f(x_0)$, $cos\,a = g(x_0)$, откуда, очевидно, получаем $f^2(x_0) + g^2(x_0) = 1$.

Таким образом, получили логический переход

$$arcsin\ f(x) = arccos\ g(x) \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) = 1. \qquad (2.4.1)$$

Рассуждая аналогично, можно получить следующие переходы:

$$arctg\ f(x) = arcctg\ g(x) \Rightarrow f(x) \cdot g(x) = 1 \qquad (2.4.2)$$

(использована формула $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$);

$$arcsin\ f(x) = arcctg\ g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{1}{1 + g^2(x)} \qquad (2.4.3)$$

(использована формула $sin^2\alpha = \frac{1}{1 + ctg^2\alpha}$);

$$arctg\ f(x) = arccos\ g(x) \Rightarrow \frac{1}{1 + f^2(x)} = g^2(x) \qquad (2.4.4)$$

(использована формула $cos^2\alpha = \frac{1}{1 + tg^2\alpha}$);

$$arcsin\ f(x) = arctg\ g(x) \Rightarrow f^2(x) = \frac{g^2(x)}{1 + g^2(x)} \qquad (2.4.5)$$

(использована формула $sin^2\alpha = \dfrac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$);

$$arccos\ f(x) = arcctg\ g(x)\ \Rightarrow\ f^2(x) = \frac{g^2(x)}{1+g^2(x)} \qquad (2.4.6)$$

(использована формула $cos^2\alpha = \dfrac{ctg^2\alpha}{1+ctg^2\alpha}$).

<u>Пример 2.4.1.</u> Решите уравнение $\arccos\dfrac{7x+5}{13} = \arcsin\dfrac{4x+1}{13}$.

Решение.

Воспользуемся логическим переходом (2.4.1), будем иметь

$$\arccos\frac{7x+5}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13} \Rightarrow \left(\frac{7x+5}{13}\right)^2 + \left(\frac{4x+1}{13}\right)^2 = 1.$$

Применяя формулу сокращенного умножения «квадрат суммы», получаем

$$\frac{49x^2+70x+25}{169} + \frac{16x^2+8x+1}{169} = 1.$$

Или

$$65x^2+78x-143=0.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа $x_1=1,\ x_2=-\dfrac{143}{65}$, однако корнем исходного будет лишь $x=1$, в то время как число $x=-\dfrac{143}{65}$ – посторонний корень (в чём можно убедиться непосредственной его подстановкой в исходное уравнение).

Ответ: 1.

<u>Пример 2.4.2.</u> Решите уравнение $\arcsin\dfrac{\sqrt{3x+2}}{2} = arcctg\sqrt{\dfrac{2}{x+1}}$.

Решение.

Применим переход (2.4.3), согласно которому получаем

$$\arcsin\frac{\sqrt{3x+2}}{2} = arcctg\sqrt{\frac{2}{x+1}} \Rightarrow \frac{3x+2}{4} = \frac{1}{1+\dfrac{2}{x+1}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 3x^2+7x+2=0.$$

Корнями этого квадратного уравнения являются числа $x_1=-2,\ x_2=-\dfrac{1}{3}$. Проверка показывает, что число $x_1=-2$ – посторонний корень исходного уравнения.

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Пример 2.4.3. Решите уравнение $\mathrm{arc}tg\left(2\sin x\right)=arcctg\left(\cos x\right)$.

Решение.

На этот раз воспользуемся переходом (2.4.2), получаем

$$\mathrm{arc}tg\left(2\sin x\right)=arcctg\left(\cos x\right)\Rightarrow 2\sin x\cdot\cos x=1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\, n\in\mathbf{Z}.$$

Но полученную серию решений можно переписать в виде

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+2\pi n_1,\, n_1\in\mathbf{Z},\mathbf{?} \\ x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n_2,\, n_2\in\mathbf{Z}.. \end{array}\right. .$$

Непосредственной подстановкой значений x в исходное уравнение легко убедиться, что корни вида $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n_2,\, n_2\in\mathbf{Z}$ – посторонние корни.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\, n\in\mathbf{Z}$.

Рассмотрим теперь способ решения более сложного уравнения, содержащего разноимённые обратные тригонометрические функции. Особенностью подобного рода уравнений будет некий «*отягощающий компонент*» (например, числовой коэффициент), который не позволяет применить напрямую переходы (2.4.1) – (2.4.6).

Пример 2.4.4. Решите уравнение $\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)=2\arcsin x$.

Решение.

Как видим, числовой коэффициент 2, стоящий в правой части уравнения, не даёт возможности применить переход (2.4.1). В том случае сначала найдём ОДЗ, для чего потребуем одновременную выполнимость двух неравенств, т.е.

$$\begin{cases} -1\le\frac{3}{4}-x\le 1 \\ -1\le x\le 1. \end{cases},$$

Решением записанной системы двойных неравенств будет пересечение двух числовых множеств $x\in\left[-\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right]$ и $x\in\left[-1;1\right]$. Очевидно, что таковым будет числовой отрезок $x\in\left[-\frac{1}{4};1\right]$.

Подействуем на обе части данного уравнения функцией косинус, т.е. будем иметь

$$\cos\left(\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)\right)=\cos(2\arcsin x).$$

Или

$$\frac{3}{4}-x=1-2\sin^2(\arcsin x).$$

Далее получаем

$$\frac{3}{4}-x=1-2x^2 \Leftrightarrow 8x^2-4x-1=0.$$

Откуда получаем

$$x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{4}.$$

Для проверки истинности найденных значений *x*, построим в одной декартовой системе координат графики двух функций $y=\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)$ и $y=2\arcsin x$.

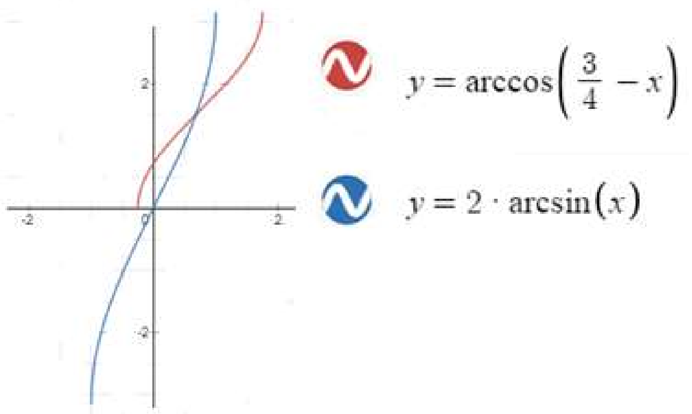

Рис. 21

Из Рис. 21 видим, что графики функций $y=\arccos\left(\frac{3}{4}-x\right)$ и $y=2\arcsin x$ имеют лишь одну общую точку, абсцисса которой расположена правее нуля, поэтому $x=\frac{1-\sqrt{3}}{4}$ – посторонний корень уравнения.

Ответ: $x=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$.

§ 2.5. Использование свойств монотонности и ограниченности обратных тригонометрических функций при решении уравнений

Решение некоторых уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, может основываться исключительно на монотонности и ограниченности этих функций. При этом приходится оперировать следующими теоремами:

<u>Теорема 1</u>. Если функция $y=f(x)$ монотонна, то уравнение $f(x)=c$ (c = *const*) имеет не более одного корня.

<u>Теорема 2</u>. Если функция $y=f(x)$ монотонно возрастает, а функция $y=g(x)$ монотонно убывает, то уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного корня.

<u>Теорема 3</u>. Если $\min\limits_{X} f(x)=c=\max\limits_{X} g(x)$ (c = *const*), то на множестве X уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=c, \\ g(x)=c. \end{cases}$

<u>Пример 2.5.1</u>. Решите уравнение $2\arcsin 2x=3\arccos x$.

Решение.

Функция $y=2\arcsin 2x$ является строго возрастающей функцией в области своего определения, в то время как функция $y=3\arccos x$ – монотонно убывает. Число $x=0{,}5$ является, очевидно, единственным корнем данного уравнения, так как, во-первых, выполняются условия **<u>Теоремы 2</u>**, а во-вторых,

$$2\arcsin(2\cdot 0{,}5)=3\arccos(0{,}5)\Leftrightarrow 2\cdot\frac{\pi}{2}=3\cdot\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow \pi=\pi.$$

Ответ: 0,5.

<u>Пример 2.5.2</u>. Решите уравнение $\mathrm{arc}tg\sqrt{x^2+x}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}=\dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

Положим, что $t=x^2+x$, тогда исходное уравнение принимает вид

$$\mathrm{arc}tg\sqrt{t}+\arcsin\sqrt{t+1}=\frac{\pi}{2}.$$

Функции, входящие в левую часть последнего уравнения, представляют собой композиции монотонно возрастающих функций, поэтому оно, согласно **<u>Теореме 1</u>**, может иметь не более одного корня. Ясно, что t=0 – единственное решение этого уравнения.

Значит, получаем, что $x^2+x=0$, но тогда $x=0$, $x=-1$.

Ответ: –1; 0.

Пример 2.5.3. Решите уравнение

$$\arcsin\left(x(x+y)\right)+\arcsin\left(y(x+y)\right)=\pi .$$

Решение.

Поскольку $\arcsin t \le \frac{\pi}{2}$ при $|t|\le 1$, то левая часть данного уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. Знак равенства можно поставить, лишь в том случае, когда каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Тем самым исходное уравнение оказывается равносильно системе, состоящей из двух более простых уравнений

$$\begin{cases} \arcsin\left(x(x+y)\right)=\dfrac{\pi}{2}, \\ \arcsin\left(y(x+y)\right)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+y)=1, \\ y(x+y)=1. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

§ 2.6. Графический способ решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции

В тех случаях, когда функции, стоящие в левой и правой частях уравнения, имеют «*разную природу происхождения*», но одна из них является аркфункцией, незаменимым инструментом решения становится графический метод.

Рассмотрим, как это делается на конкретных примерах.

Пример 2.6.1. Решите уравнение $\arcsin(\sin x)=x^2-10x$.

Решение.

Графиком функции $y=x^2-10x$, стоящей в правой части уравнения, является парабола, ветви которой направлены вверх и вершина которой имеет координаты $(5;-25)$.

Для построения графика функции $y=\arcsin(\sin x)$ вспомним, что эта функция является нечётной и периодической с периодом 2π.

На Рис. 22 изображены два графика функций $y=x^2-10x$ и $y=\arcsin(\sin x)$, соответственно. Видим, что они имеют две точки пересечения, поэтому данное уравнение имеет два корня.

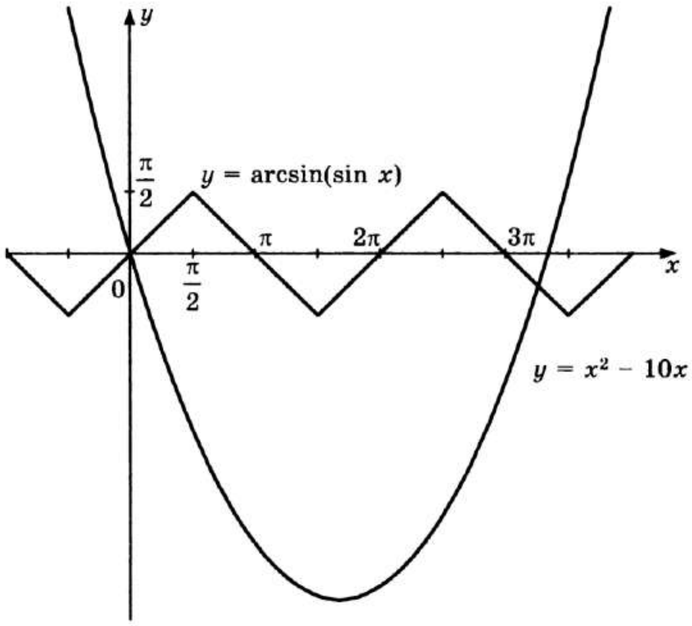

Рис. 22

Установим теперь значения x, которые являются его корнями. Первый корень x=0 является очевидным. Что касается второго корня, то по рисунку определить его точное значение нельзя, но видно, что он принадлежит интервалу $\left(3\pi;\frac{7\pi}{2}\right)$, на котором график функции $y=\arcsin(\sin x)$ совпадает с прямой $y=3\pi-x$. Значит, второй корень уравнения следует искать из уравнения $x^2-10x=3\pi-x$, причём это должен быть больший корень (меньший корень соответствует второй точке пересечения параболы с прямой $y=3\pi-x$, очевидно, он лежит левее).

Имеем квадратное уравнение

$$x^2-9x-3\pi=0.$$

Его дискриминант

$$D=81+12\pi.$$

Тогда получаем

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81+12\pi}}{2}.$$

Исходя из вышесказанного, $x=\dfrac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

Ответ:0; $\dfrac{9+\sqrt{81+12\pi}}{2}$.

Пример 2.6.2. Решите уравнение $\operatorname{arc}tg(tg\,x)=-|x-\pi|$.

Решение.

Функция $y = \operatorname{arc}tg(tg\,x)$[1] является периодической, её период равен π.

На Рис. 23 изображены в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{arc}tg(tg\,x)$ и $y = -|x-\pi|$.

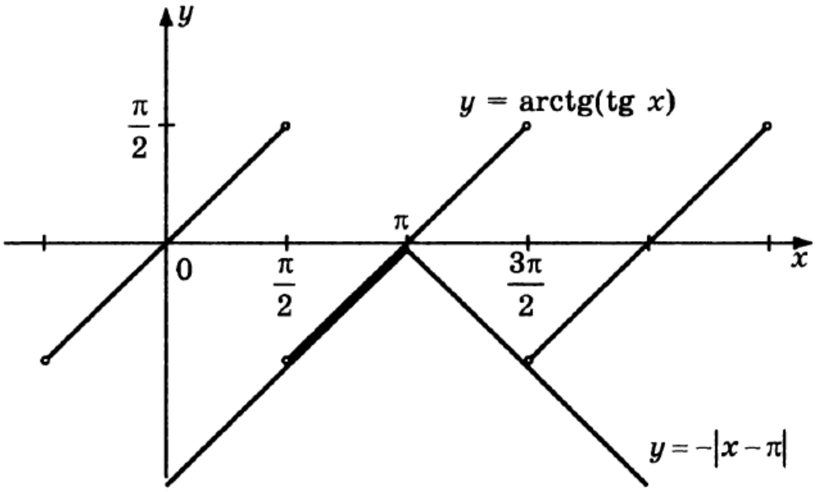

Рис. 23

Видим, что оба графика совпадают на промежутке $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} < x \le \pi$.

§ 2.7. Неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, и методы их решения

При решении неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, можно пользоваться теми же приёмами, которые мы использовали для решения уравнений, в записи которых присутствовали обратные тригонометрические функции.

Рассмотрим примеры.

Пример 2.7.1. Решите неравенство $3\arcsin 2x < 1$.

Решение.

$$3\arcsin 2x < 1 \Leftrightarrow \arcsin 2x < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \arcsin 2x < \arcsin\left(\sin\frac{1}{3}\right).$$

Значит,

$$-1 \le 2x < \sin\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}.$$

[1] График этой функции можно найти на стр. 92 в пособии Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А. Школьная математика: от альфа до омега. Часть 3. Тригонометрия. – Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2022. – 100 с.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\right)$.

Пример 2.7.2. Решите неравенство $\arccos^2 x - 3\arccos x + 2 \geq 0$.

Решение.

Пусть $\arccos x = t,\ 0 \leq t \leq \pi$, тогда получим неравенство $t^2 - 3t + 2 \geq 0$, для которого получаем

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 1, \\ t \geq 2. \end{array}\right.$$

Поскольку имеет место ограничение $0 \leq t \leq \pi$, то

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq t \leq 1, \\ 2 \leq t \leq \pi. \end{array}\right.$$

Значит,

$$\left[\begin{array}{l} 0 \leq \arccos x \leq 1, \\ 2 \leq \arccos x \leq \pi \end{array}\right.$$

или, с учётом того, что функция $t = \arccos x$ является убывающей функцией, будем иметь

$$\left[\begin{array}{l} -1 \leq x \leq \cos 2, \\ \ \cos 1 \leq x \leq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in [-1;\cos 2] \cup [\cos 1;1]$.

При решении неравенств, левая и правая части которых содержат одноимённые обратные тригонометрические функции, следует пользоваться следующими равносильными переходами:

1) $\arcsin f(x) \leq \arcsin g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -1, \\ g(x) \leq 1. \end{cases}$

2) $\arccos f(x) \leq \arccos g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq -1, \\ f(x) \leq 1. \end{cases}$

3) $\mathrm{arc}tg\ f(x) \leq \mathrm{arc}tg\ g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$.

4) $\mathrm{arc}ctg\ f(x) \leq \mathrm{arc}ctg\ g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x)$.

Пример 2.7.3. Решите неравенство

$$\mathrm{arcctg}\left(8x^2 - 6x - 1\right) \leq \mathrm{arcctg}\left(4x^2 - x + 8\right).$$

Решение.

Данное неравенство равносильно следующему неравенству

$$8x^2 - 6x - 1 \geq 4x^2 - x + 8.$$

Упрощая, получаем

$$4x^2-5x-9\geq 0,$$

для которого

$$\left[\begin{array}{l} x\leq -1, \\ x\geq \dfrac{9}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x\in(-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{9}{4};+\infty\right)$.

При решении неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, целесообразно использовать метод интервалов, а в некоторых случаях учитывать свойства монотонных функций.

<u>Пример 2.7.4</u>. Решите неравенство $\arcsin\dfrac{x+2}{5}\leq\arccos\dfrac{3x+1}{5}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=\arcsin\dfrac{x+2}{5}-\arccos\dfrac{3x+1}{5}$.

Сначала найдём её область определения, для этого потребуется решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{|x+2|}{5}\leq 1, \\ \dfrac{|3x+1|}{5}\leq 1. \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} |x+2|\leq 5, \\ |3x+1|\leq 5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -5\leq x+2\leq 5, \\ -5\leq 3x+1\leq 5 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -7\leq x\leq 3, \\ -2\leq x\leq \dfrac{4}{3} \end{cases}\Leftrightarrow -2\leq x\leq\frac{4}{3}.$$

Теперь найдём нули функции $f(x)=\arcsin\dfrac{x+2}{5}-\arccos\dfrac{3x+1}{5}$. Для этого нам потребуется решить уравнение $\arcsin\dfrac{x+2}{5}=\arccos\dfrac{3x+1}{5}$.

Из **§ 2.7.** воспользуемся переходом

$$\mathit{arcsin}\ f(x)=\mathit{arccos}\ g(x)\ \Rightarrow\ f^2(x)+g^2(x)=1,$$

тогда получается

$$\left(\frac{x+2}{5}\right)^2+\left(\frac{3x+1}{5}\right)^2=1.$$

Или

$$x^2+4x+4+9x^2+6x+1=25.$$

Далее имеем

$$10x^2+10x+-20=0 \Leftrightarrow x^2+x+-2=0.$$

Последнее уравнение имеет корни

$$x_1=-2;\; x_2=1.$$

При подстановке значения $x_1=-2$ получим

$$\arcsin 0=\arccos(-1) \Leftrightarrow 0\neq\pi.$$

То есть проверка показала, что число – 2 является посторонним корнем уравнения, содержащего аркфункции.

Значит, нулём рассматриваемой функции является лишь *x=1.*

Далее применим метод интервалов.

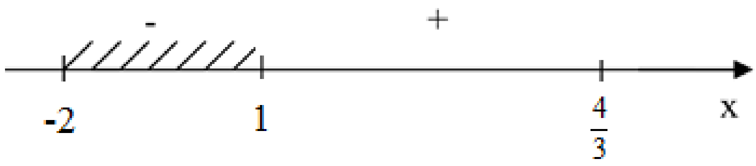

Рис. 24

Из Рис. 24 можно увидеть, что точка *x*=1 разбила область определения функции *f* (*x*) на два промежутка и как распределились знаки на них.

Нас интересует множества значений *x*, при которых $f(x)\leq 0$, т.е. $x\in[-2;1]$.

Ответ: $[-2;1]$.

<u>Пример 2.7.5</u>. Решите неравенство

$$\arccos x+\arccos\left(x\sqrt{2}\right)+\arccos\left(x\sqrt{3}\right)\leq\frac{3\pi}{4}.$$

Решение.

Найдем сначала область определения функции

$$f(x)=\arccos x+\arccos\left(x\sqrt{2}\right)+\arccos\left(x\sqrt{3}\right).$$

Очевидно, что потребуется решить систему неравенств, включающую в себя три неравенства: $|x|\leq 1$, $\left|x\sqrt{2}\right|\leq 1$и $\left|x\sqrt{3}\right|\leq 1$.

Её решением будет отрезок $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Ясно также, что рассматриваемая функция является монотонно убывающей на этом отрезке. Кроме того уравнение $f(x)=\frac{3\pi}{4}$ может иметь не более одного корня. Очевидно, таковым будет *x*=0,5. Поэтому решением неравенства $f(x)\leq\frac{3\pi}{4}$ является отрезок $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

ГЛАВА III. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 3.1. Простейшие системы

К этому классу *простейших систем* относятся системы, в которых уравнения являются простейшими тригонометрическими уравнениями или становятся таковыми в результате несложных алгебраических или тригонометрических преобразований. Если тригонометрическое уравнение распадается на простейшие, то при решении каждого из них используется один и тот же целочисленный параметр. При решении тригонометрических систем, сводящихся к системе простейших тригонометрических уравнений, для решения каждого из уравнений необходимо использовать свой целочисленный параметр.

Пример 3.1.1. Решите систему тригонометрических уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y)=-\dfrac{1}{2}, \\ \cos(x-y)=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}.$$

Решение.

Здесь мы можем сразу воспользоваться способами решения простейших тригонометрических уравнений. Получим систему

$$\begin{cases} x+y=(-1)^{k+1}\cdot\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \\ x-y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Перепишем её иначе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x+y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \\ x+y=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-y=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ x-y=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.. \end{array}\right. \end{cases}$$

Далее её можно записать в виде совокупности четырёх систем

$$\begin{cases} x+y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \\ x-y=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \\ x-y=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \\ x-y=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z};; \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}, \\ x-y=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.; \end{cases}$$

Складывая, а затем вычитая уравнения в каждой из полученных систем, найдём интересующие нас пары:

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{\pi}{4}+\pi k+\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}, \\ y_1=-\dfrac{5\pi}{12}+\pi k-\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z};; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=\dfrac{11\pi}{12}+\pi k+\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}, \\ y_2=\dfrac{\pi}{4}+\pi k-\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z};; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3=-\dfrac{5\pi}{12}+\pi k+\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}, \\ y_3=\dfrac{\pi}{4}+\pi k-\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z};; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_4=\dfrac{\pi}{4}+\pi k+\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}, \\ y_4=\dfrac{11\pi}{12}+\pi k-\pi n,\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}.; \end{cases}$$

Ответ:

$$\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n);-\frac{5\pi}{12}+\pi(k-n)\right),\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z},$$

$$\left(\frac{11\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right),\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z},$$

$$\left(-\frac{5\pi}{12}+\pi(k+n);\frac{\pi}{4}+\pi(k-n)\right),\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z},$$

$$\left(\frac{\pi}{4}+\pi(k+n);\frac{11\pi}{12}+\pi(k-n)\right),\ k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{Z}.$$

§ 3.2. Системы, в которых неизвестные связаны через угол, кратный $\frac{\pi}{2}$

Системы, в которых неизвестные связаны через угол кратный $\frac{\pi}{2}$, т.е. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots\right)$ удобно решать, выразив сначала одно неизвестное через другое, затем подставить его во второе уравнение и использовать формулы приведения.

Пример 3.2.1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\cos 4x+\sin 3y=4, \\ 2x+3y=\dfrac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Выразим из второго уравнения системы y, получим $y=\frac{\pi}{2}-\frac{2x}{3}$. Подставим это значение в первое уравнение системы

$$3\cos 4x+\sin 3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2x}{3}\right)=4.$$

Преобразуем полученное уравнение

$$3\cos 4x+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=4,$$

$$3\cos 4x-\cos 2x=4,$$

$$3\left(2\cos^2 2x-1\right)-\cos 2x-4=0,$$

$$6\cos^2 2x-\cos 2x-7=0.$$

Решив полученное квадратное уравнение, будем иметь

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=-1,\\ \cos 2x=\frac{7}{6}.\end{array}\right.$$

Ясно, что второе уравнение полученной совокупности не имеет решений, то исходная система уравнений будет равносильна следующей системе

$$\begin{cases}\cos 2x=-1,\\ 2x+3y=\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z},\\ y=\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3},\ n\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{6}-\frac{2\pi n}{3}\right),\ n\in\mathbf{Z}$.

§ 3.3. Системы, в которых неизвестные связаны через угол, не кратный $\frac{\pi}{2}$

Системы такого вида бывает удобно решать, не выражая одно неизвестное через другое, а, преобразовывая одно из уравнений к виду, когда в нём может быть заменена целая связка, заданная во втором уравнении. Такой подход будет наиболее рациональным случаем когда, подставив в преобразованное уравнение значение, заданное в другом уравнении, мы сможем вычислить значение тригонометрических функций. Если же вычисления таких значений вызывает затруднение, следует использовать метод, изложенный в ***§ 3.2***.

Пример 3.3.1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos^2\pi x - \sin^2\pi y = \dfrac{1}{2}, \\ x - y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Решение.

Для преобразования первого уравнения этой системы воспользуемся формулами понижения степени. Тогда получим

$$\frac{1+\cos 2\pi x}{2} - \frac{1-\cos 2\pi y}{2} = \frac{1}{2},$$

что влечёт

$$\cos 2\pi x + \cos 2\pi y = 1.$$

Получили новую систему уравнений

$$\begin{cases} \cos 2\pi x + \cos 2\pi y = 1, \\ x - y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos(\pi x + \pi y)\cdot\cos(\pi x - \pi y) = 1, \\ x - y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos(\pi x + \pi y)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 1, \\ x - y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\pi x + \pi y) = 1, \\ x - y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi(x+y) = 2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ x - y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ x - y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \dfrac{1}{3} + 2n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ 2y = -\dfrac{1}{3} + 2n,\ n\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Тогда окончательно получим

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{6} + n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ y = -\dfrac{1}{6} + n,\ n\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{6} + n; -\dfrac{1}{6} + n\right),\ n\in\mathbf{Z}.$

§ 3.4. Обзор методов решения тригонометрических систем

Решение и исследование систем тригонометрических уравнений может представлять значительные трудности даже в тех сравнительно редких случаях, когда это решение выполнимо элементарными средствами.

При решении систем тригонометрических уравнений применяются те же методы, что и при решении систем алгебраических уравнений, а также методы, присущие только тригонометрическим системам (например, метод возведения обоих уравнений в квадрат и использование основного тригонометрического тождества).

Рассмотрим более подробно методы, которые можно использовать для решения тригонометрических систем.

1) *Метод введения новых неизвестных*.

Этот метод используется при решении тригонометрических систем, в которых уравнения зависят только от частных тригонометрических функций или могут быть сведены к такому виду.

Пример 3.4.1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}, \\ \cos x\cdot\cos y=\frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решение.

Воспользуемся формулой преобразования произведения тригонометрических функций в сумму, тогда второе уравнение заданной системы преобразуем к виду

$$\frac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]=\frac{1}{4}$$

или

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=\frac{1}{2}.$$

Теперь для $\cos(x+y)$ и $\cos(x-y)$ будем использовать формулы половинного аргумента:

$$\cos(x+y)=2\cos^2\frac{x+y}{2}-1,$$

$$\cos(x-y)=2\cos^2\frac{x-y}{2}-1.$$

Тогда получим

$$2\cos^2\frac{x+y}{2}-1+2\cos^2\frac{x-y}{2}-1=\frac{1}{2}$$

или

$$2\cos^2\frac{x+y}{2}+2\cos^2\frac{x-y}{2}=\frac{5}{2}.$$

Далее используем обозначения

$$\cos\frac{x+y}{2}=u;\quad \cos\frac{x-y}{2}=v.$$

Значит, исходную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} u\cdot v=\frac{1}{2}, \\ u^2+v^2=\frac{5}{4}. \end{cases}$$

Далее

$$\begin{cases} u\cdot v=\frac{1}{2}, \\ u^2+2uv+v^2=\frac{5}{4}+2uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\cdot v=\frac{1}{2}, \\ (u+v)^2=\frac{5}{4}+2\cdot\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\cdot v=\frac{1}{2}, \\ (u+v)^2=\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv=\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} u+v=\frac{3}{2}, \\ u+v=-\frac{3}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} uv=\frac{1}{2}, \\ u+v=\frac{3}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} uv=\frac{1}{2}, \\ u+v=-\frac{3}{2}, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1, \\ v=\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} u=\frac{1}{2}, \\ v=1, \end{cases} \\ \begin{cases} u=-1, \\ v=-\frac{1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} u=-\frac{1}{2}, \\ v=-1. \end{cases} \end{array}\right.$$

Возвращаясь к прежним переменным, получим совокупность четырёх систем:

$$\begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}=1, \\ \cos\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{x-y}{2}=1, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}=-1, \\ \cos\frac{x-y}{2}=-\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}, \\ \cos\frac{x-y}{2}=-1. \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{x-y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{x-y}{2} = 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{x-y}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}, \\ \dfrac{x-y}{2} = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Откуда получаем четыре семейства решений

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(k+n),\ k,n \in \mathbf{Z}, \\ y = \mp\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(k-n),\ k,n \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(k+n),\ k,n \in \mathbf{Z}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi(k-n),\ k,n \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi(k+n),\ k,n \in \mathbf{Z}, \\ y = \pi \mp \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi(k-n),\ k,n \in \mathbf{Z}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pi \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi(k+n),\ k,n \in \mathbf{Z}, \\ y = -\pi \pm \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi(k-n),\ k,n \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Их можно объединить в одно семейство

$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbf{Z}, \\ y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi m; \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi l\right),\ m, l \in \mathbf{Z}.$

2) *<u>Метод алгебраических преобразований уравнений системы</u>*.

При решении систем этим методом нужно внимательно следить за равносильностью преобразований, чтобы не потерять корни или не приобрести лишние.

<u>Пример 3.4.2</u>. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение.

Получим новую систему тригонометрических уравнений, выполнив почленное сложение и вычитание уравнений данной системы

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -1. \end{cases}$$

Используя формулы синуса суммы и синуса разности, получаем

$$\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ \sin(y-x)=1. \end{cases}$$

Далее получаем

$$\begin{cases} x+y=\pi n,\ n\in\mathbf{Z}, \\ y-x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbf{Z}. \end{cases}$$

Складывая уравнения полученной системы, находим

$$2y=\frac{\pi}{2}+2\pi k+\pi n,\ k,n\in\mathbf{Z}$$

или

$$y=\frac{\pi}{4}+\pi k+\frac{\pi n}{2},\ k,n\in\mathbf{Z}.$$

Но тогда

$$x=\pi n-y=\pi n-\left(\frac{\pi}{4}+\pi k+\frac{\pi n}{2}\right),\ k,n\in\mathbf{Z}.$$

В итоге получим

$$x=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}-\pi k,\ k,n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}-\pi k;\dfrac{\pi}{4}+\pi k+\dfrac{\pi n}{2}\right),\ k,n\in\mathbf{Z}$.

3) *Метод возведения обоих уравнений системы в квадрат*.

Этот метод особо выделяется среди методов алгебраических преобразований систем в силу того, что:

a) мы свершаем неравносильные преобразования, значит, потребуется проверка корней, что в тригонометрических системах затруднительно либо предпочтительнее проводить отбор корней на стадиях решения;

b) преобразование нужно проводить таким образом, чтобы после сложения уравнений можно было воспользоваться основным тригонометрическим тождеством и получить уравнение содержащие только одно неизвестное.

Пример 3.4.3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 6\cos x+4\cos y=5, \\ 3\sin x+2\sin y=0. \end{cases}$$

Решение.

Чтобы иметь возможность в дальнейшем воспользоваться основным тригонометрическим тождеством, перепишем заданную систему уравнений в ином виде

$$\begin{cases} 3\cos x = \dfrac{5}{2} - 2\cos y, \\ 3\sin x = -2\sin y. \end{cases}$$

Возведём в квадрат каждое из уравнений преобразованной системы и сложим полученные результаты, получим

$$9\cos^2 x + 9\sin^2 x = \frac{25}{4} - 10\cos y + 4\cos^2 y + 4\sin^2 y.$$

Далее имеем

$$10\cos y = \frac{25}{4} - 9 + 4$$

или

$$10\cos y = \frac{25}{4} - 9 + 4.$$

Приходим к простейшему тригонометрическому уравнению

$$\cos y = \frac{1}{8}.$$

Значит,

$$y = \pm\arccos\left(\frac{1}{8}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Пусть $\cos y = \dfrac{1}{8}$, тогда $\sin y = \dfrac{\sqrt{63}}{8}$. Это означает, что y лежит в первой четверти и $y = \arccos\dfrac{1}{8} + 2\pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Тогда из первого уравнения последней системы уравнений можем записать

$$3\cos x = \frac{5}{2} - 2 \cdot \frac{1}{8}$$

или

$$\cos x = \frac{3}{4}.$$

В то же время из второго уравнения получаем

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Следовательно,

$$x = -\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Пусть $\cos y = \frac{1}{8}$, есть ещё один возможный случай $\sin y = -\frac{\sqrt{63}}{8}$. Это означает, что y лежит в четвёртой четверти и $y = -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$.

Из первого уравнения системы находим $\cos x = \frac{3}{4}$, но тогда

$$\sin x = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Таким образом,

$$y = \arccos\frac{3}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\left(-\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k; \arccos\frac{1}{8} + 2\pi n\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$,

$$\left(\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k; -\arccos\frac{1}{8} + 2\pi n\right), k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}.$$

4) *<u>Тригонометрические системы с отбором корней</u>*.

Это тригонометрические системы, в которых корни нужно выбирать из нескольких семейств решения, а так же системы, в которых ограничения на корни заданы в условиях задачи или возникают по ходу решения.

5) *<u>Функциональные методы решения тригонометрических систем</u>*.

При решении используются базовые неравенства

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \text{ т.е. } a \geq 0,\ b \geq 0;$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2, \quad a > 0$$

$$a + \frac{1}{a} \leq -2, \quad a < 0$$

и т.д.

Свойства тригонометрических функций, а также метод выделения полного квадрата часто позволяющий получить необходимые оценки.

6) *<u>Тригонометрические системы, состоящие из трёх уравнений с тремя неизвестными</u>*.

Часто используется группировка, алгебраические, тригонометрическе преобразования, выражение одного неизвестного через другое, введение новой переменной. Специфика таких систем в необходимости выбора решения по четвертям.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Азаров, А.И.** Тригонометрические уравнения: Учебное пособие [Текст] / А.И. Азаров, О.М. Гладун, В.С. Федосенко. ООО Тривиум, 1994. 160 с.
2. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие [Текст] / Н.Д. Золотарёва, Ю.А. Попов, Н.Л. Семендяева, М.В. Федотов. М.: Фойлис, 2010. 568 с.
3. **Азаров, А.И**. Тригонометрия. Тождества. Уравнения. Неравенства. Системы [Текст] / А.И. Азаров, В.И. Булатов, В.С. Федосеенко, А.С. Шибут. Минск: Полымя, 1999. 496 с.
4. **Алексеев, В.М.** Элементарная математика. Решение задач [Текст] / В.М. Алексеев Киев: Вища школа, 1983. 351 с.
5. **Амелькин, В.В., Рабцевич, Т.И.** Тригонометрия. На страницах и за страницами школьного учебника [Текст] / В.В. Амелькин, Т.И. Рабцевич. Минск: Красико-Принт, 2011. 256 с.
6. **Ашкинузе, В.Г., Шоластер, Н.Н.** Алгебра и элементарные функции. Пособие для старших классов средней школы [Текст] / В.Г. Ашкинузе, Н.Н. Шоластер. М.: Просвещение, 1964. 544 с.
7. **Бардушкин, В**. Тригонометрические уравнения. Отбор корней / В. Бардушкин, А. Прокофьев, Т. Соколова, Т. Фадеичева [Текст] // Математика, № 12, 2005. С. 23–27.
8. **Башмаков, М.И.** Алгебра и начала анализа. Задачи и решения [Текст] / М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой, Ю.И. Ионин. М.: Высшая школа, 2004. 296 с.
9. **Башмаков, М.И.** Школьная математика. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ [Текст] / М.И. Башмаков, Ш.И. Цыганов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 271 с.
10. **Болтянский, В.Г.** Лекции и задачи по элементарной математике [Текст] / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М.: Наука, Физматлит, 1971. 592 с.
11. **Бородуля, И.Т.** Тригонометрические уравнения и неравенства. Книга для учителя [Текст] / И.Т. Бородуля. М.: Просвещение, 1989. 239 с.
12. **Василевский, А.Б.** Задания по внеклассной работе по математике: 9-11 классы [Текст]: книга для учителя / А.Б. Василевский. Минск: Народная асвета, 1988. 172 с.
13. **Василевский, А.Б**. Методы решения задач по математике: методическое пособие [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: МПИ, 1981. 107 с.
14. **Василевский, А.Б.** Упражнения по алгебре и началам анализа: кн. для учителя [Текст] / А.Б. Василевский. Минск: Народная асвета, 1991. 221 с.

15. **Вересова, Е.Е.** Практикум по решению математических задач: для педагогических институтов по мат. и физ. спец. [Текст] / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 239 с.
16. **Выгодский, М.Я.** Справочник по элементарной математике [Текст] / М.Я. Выгодский. М., 2006. 509 с.
17. **Генкин, Г.З.** Геометрические решения негеометрических задач: кн. для учителя [Текст] / Г.З. Генкин. М.: Просвещение, 2007. 79 с.
18. **Добрина, Е.А., Мельников, Р.А.** Изучение обратных тригонометрических функций в школьном курсе математики [Текст] / Е.А. Добрина, Р.А. Мельников // Математическое образование в школе будущего: традиции и инновации: материалы Всероссийской заочной научно-практической конференции с международным участием. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2011. С. 140-147.
19. **Дорофеев, Г.В.** Математика: Пособие для поступающих в вузы [Текст] / Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. М. Дрофа, 2001. 672 с.
20. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Элементарная математика. Часть 1. Арифметика. Начала алгебры. Комбинаторика. Функции: учебное пособие [Текст] / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2015. 128 с.
21. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Мультидисциплинарный подход к изучению тригонометрии будущими учителями математики [Текст] / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников // Балтийский гуманитарный журнал, 2016. Том 5, № 4 (17). С. 211-215.
22. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Элементарная математика. Часть 3. Тригонометрия. [Текст] / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2017. 100 с. То же [Электронный ресурс] http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=498152.
23. **Зайцев, В.В.** Элементарная математика: Повторительный курс [Текст] / В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави; Под ред. В.В. Рыжкова. 3. изд., стереотип. М.: Наука, 1976. 592 с.
24. **Иванов, О.А.** Избранные главы элементарной математики [Текст] / О.А. Иванов; С.-Петербургский гос. ун-т. СПб: Изд-во СПб. ун-та, 1995. 223 с.
25. **Литвиненко, В.Н.** Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учебное пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей [Текст] / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1991. 348 с.
26. **Любецкий, В.А.** Основные понятия элементарной математики: учебное пособие для вузов [Текст] / В. А. Любецкий. 2-е изд., испр. М.: Айрис-пресс, 2004. 624 с.
27. **Мельников, И.И.**, **Сергеев, И.Н.** Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах [Текст] / И.И. Мельников, И.Н. Сергеев. М.: Издательство Московского университета, 1990. 303 с.

28. **Моденов, П.С.** Сборник задач по специальному курсу элементарной математики: учебное пособие для вузов [Текст] / П.С. Моденов. М.: Советская наука, 1957. 666 с.
29. **Моденов, В.П.** Математика: Пособие для поступающих в вузы [Текст] / В.П. Моденов. М.: ООО «Издательство Новая Волна», 2002. 800 с.
30. **Новиков, А.И.** Тригонометрические функции, уравнения и неравенства [Текст] / А.И. Новиков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 260 с.
31. **Новоселов, С.И.** Специальный курс тригонометрии: для пед. ин-тов и гос. ун-тов. 5-е изд. [Текст] / С.И. Новоселов. М.: Высшая школа, 1967. 536 с.
32. **Новоселов, С.И.** Обратные тригонометрические функции: Пособие для учителей. 4-е изд. [Текст] / С.И. Новоселов. М.: Учпедгиз, 1956. 127 с.
33. **Полякова, Т.Н.** Практикум по решению задач (Тригонометрия) [Текст]: учеб. пособие для студентов / Т. Н. Полякова.; М-во прос. РСФСР, Моск. гос. пед. ин-т имени В. И. Ленина, кафедра алгебры. М.: Б. и., 1976. 121 с.
34. Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст] / Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Наука, 1981. 608 с.
35. **Рязановский, А.Г**. 500 способов и методов решения задач по математике [Текст] / М.: Дрофа, 2001. 480 с.
36. Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст] / Под ред. М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1988.
37. **Фалин, Г.И.** Обратные тригонометрические функции: 10-11 классы: определения обратных тригонометрических функций, свойства arc-функций, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, ответы [Текст] / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Изд. 2-е, стер. М.: Экзамен, 2013. 221 с.
38. **Фалин, Г.И., Фалин, А.И.** Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ [Текст] / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. 327 с.
39. **Шарыгин, И.Ф.**, **Голубев, В.И.** Факультативный курс по математике. Решение задач Учеб. пособие для 11-го класса средней школы [Текст] / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. М.: Просвещение, 1991. 383 с.
40. **Шахмейстер, А.Х.** Тригонометрия: Учебное пособие. 4-е изд. [Текст] / А.Х. Шахмейстер. СПб: «Петроглиф»; М.: Изд-во МЦНМО: ИД КДУ, 2014. 750 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА III. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК
ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Галина Георгиевна Ельчанинова,
Роман Анатольевич Мельников

Школьная математика: от альфа до омега
Часть 6 (дзета). ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА.
СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Технический редактор – Н. П. Безногих
Техническое исполнение – В. М. Гришин

Формат 60 х 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Усл.-печ.л. 4. Уч.-изд.л. 4,
Тираж 500 экз. (1-й завод 50 экз.). Заказ 93

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28