МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА: ОТ АЛЬФА ДО ОМЕГА

Часть 7 (эта)

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Учебное пособие

Елец, 2022

УДК 37
ББК 74.2
Э 64

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 2022 г., протокол №

Рецензенты:

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец).

Томилова Анна Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования ФГАОУ ВО Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Авторы: Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А.

Е 64 Школьная математика: от альфа до омега. Часть 7 (эта). Системы уравнений. Текстовые задачи. Учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2022. – 72 с.
978-5-94809-853-1 (часть 7)

Основная цель учебного пособия – оказать помощь изучающим математику.

В издании представлен материал, связанный с основным аппаратом для решения задач из различных областей знаний – системами уравнений и текстовыми задачами. Пособие предназначено, в первую очередь, для учеников старших классов и учителей общеобразовательных учреждений на этапе систематизации знаний, а также студентам, обучающимся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование, профиль которых связан с математикой, и их преподавателям.

УДК 37
ББК 74.2

978-5-94809-853-1 (часть 7)

ГЛАВА I. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Системы уравнений и способы их решения являются важным разделом не только элементарной, но и высшей математики. Системы уравнений – это наиболее часто используемая математическая модель, позволяющая описывать как реальные явления и процессы, на которые действует множество факторов (в архитектуре, геодезии и др.), так и проведение чисто математических, эмпирических расчётов (поиск коэффициентов в общих формулах, приближённое решение уравнений, использование в областях различных наук). И даже приведённым не исчерпываются все возможности систем уравнений для описания ситуации на математическом языке

§ 1.1.Уравнения с двумя переменными. Линейные диофантовы уравнения

📖**<u>Определение 1.1.1.</u>***Уравнением с двумя переменными* называется равенство, содержащее эти переменные (их ещё называют *неизвестными*).

Если задано уравнение с двумя неизвестными, то, прежде всего, речь идёт о его исследовании – выяснении, имеет ли данное уравнение решения, и, если имеет, то сколько; нахождение количества целых, отрицательных, рациональных или действительных корней и др.

Вообще, решение перечисленных вопросов, входящих в понятие исследования уравнения часто не может быть достигнуто с использованием средств только элементарной математики. Эти вопросы рассматривает высшая алгебра, а элементарная занимается ими лишь частично.

Суть понятий решения, области допустимых значений уравнения, следствия и равносильности для уравнений с двумя переменными в сравнении с уравнениями с одной переменной не меняется.

Решить уравнение

$$f(x;y)=g(x;y) \qquad (*)$$

означает найти все такие пары чисел $(a;b)$, для которых справедливо равенство $f(a;b)=g(a;b)$, или доказать, что таких чисел не существует.

Пара чисел $(a;b)$ называется*решением* уравнения с двумя переменными (*). Все решения уравнения объединяются в множество решений.

Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения с двумя переменными называется пересечение областей определения функций $f(x;y)$ и $g(x;y)$.В это множество входят все такие пары значений переменных, при которых обе части уравнения имеют смысл. Множество решений уравнения с двумя переменными является подмножеством ОДЗ.

Одно уравнение с двумя переменными $f_1(x;y)=g_1(x;y)$ являетсяследствием другого $f_2(x;y)=g_2(x;y)$, если все пары чисел $(a;b)$, являющиеся решениями последнего уравнения, будут и решениями первого, но не наоборот. Заметим, что первое уравнение можно получить из второго с помощью преобразований.

Равносильными называются два или несколько уравнений с двумя переменными в том случае, если множества их решений совпадают (либо одинаковые пары чисел являются решениями, либо решений у таких уравнений вообще нет), а также, если оба являются следствиями друг друга.

Уравнения с двумя неизвестными условно можно разделить на большие группы по старшей степени любой из неизвестных.

Так, уравнение первой степени(линейное) с двумя неизвестными имеет вид

$$ax+by=c. \tag{1.1.1}$$

На координатной плоскости такое уравнение определяет прямую. Поэтому, про уравнение с двумя переменными можно сказать, что оно, вообще говоря, имеет бесконечно много решений (прямая – фигура, состоящая из бесконечного множества точек). В зависимости от значений коэффициентов эта прямая может быть параллельна осям или иметь определённый угол наклона к положительному направлению оси OX.

Рассмотрим уравнение первой степени с двумя неизвестными и зададимся целью поиска его целочисленных решений. Заметим, что иногда поиск целочисленных решений заменяется поиском натуральных или рациональных решений. В указанных условиях уравнение называется *диофантовым.*

🕮**Определение 1.1.2.** Алгебраическое уравнение (или система) с целыми коэффициентами, у которых число неизвестных превосходит число уравнений, называются *диофантовыми уравнениями* (или *неопределёнными уравнениями*).

В общей записи$ax+by=c$ – линейного уравнения с двумя неизвестными: a, bи c– целые числа.

При решении подобного рода уравнений обычно ставится задача о поиске целочисленных его решений.

Например, уравнение $4x-6y=17$ является линейным (первого порядка)диофантовым уравнением первого степени, так обе неизвестные входят в него, имея первуюстепень. Заметим, что при любых целых числах x, y левая часть уравнения представляет собой число, делящееся на два, а правая – число 17, которое на два не делится. Таким образом, данное уравнение не разрешимо в целых числах.

Итак, если в уравнении вида (1.1.1): свободный член c не делится на $НОД\left(|a|;|b|\right)$, то оно не имеет целочисленных решений. В противном случае, когда c всё же делится на $НОД\left(|a|;|b|\right)$ уравнение имеет решение.

Перейдем теперь к рассмотрению способов решения уравнений вида (1.1.1).

Сначала рассмотрим *метод последовательного выделения целой части* – один из простейших методов, доступный даже школьникам.

Пример 1.1.1. Решить уравнение $4x - 6y = 18$.

Решение.

Разделив обе части этого уравнения на наибольший общий делитель чисел, 4, 6, 18, то есть на число 2, получим уравнение, равносильное данному

$$2x - 3y = 9.$$

Из этого уравнения выразим неизвестную с меньшим (по абсолютной величине) коэффициентом:

$$x = \frac{9+3y}{2}.$$

Далее, из полученной дроби выделим целую часть:

$$x = \frac{9+3y}{2} = \frac{(8+2y)+(1+y)}{2} = 4 + y + \frac{1+y}{2}. \qquad (\#)$$

Так как x и y должны оказаться в итоге целыми числами, дробь $\frac{1+y}{2}$, входящая в правую часть формулы (#), должна оказаться целым числом.

Пусть $\mathrm{n} = \frac{1+y}{2}, n \in Z$. Далее выразим из этого соотношения неизвестную y, получим $y = 2n - 1$.

Подставим теперь найденное значение y в формулу (#):

$$x = 4 + 2\mathrm{n} - 1 + \frac{1+2\mathrm{n}-1}{2} = 3 + 2\mathrm{n} + \mathrm{n} = 3\mathrm{n} + 3.$$

Ответ: $(3n + 3;\ 2n - 1),\ n \in Z$.

Заметим, что в рассмотренном нами примере: $a = 2$, $b = -3$, $c = 9$. Эти числа можно отнести к категории «малые». Очевидно, если коэффициенты и свободный член линейного диофантова уравнения не будут являться «малыми» числами, то количество шагов, связанных с выделением целой части у дробей, значительно возрастёт, что неминуемо приведет к увеличению временных затрат, связанных с решением этой задачи, и как следствие, возрастёт вероятность появления вычислительной ошибки. Поэтому этот метод нельзя признать идеальным и в таком случае желательно знать иные способы решения этой задачи.

В этом можно убедиться, например, самостоятельно решив уравнение $35x+59y=1998$.

А мы перейдём к рассмотрению иных способов решения линейного диофантова уравнения.

Для этого придётся рассмотреть вспомогательное неопределённое уравнение первого порядка.

Определение 1.1.3. Уравнение вида $ax+by=1$, где $НОД\left(|a|;|b|\right)=1$ называется *простейшим линейным диофантовым уравнением*.

Теорема 1.1.1. Если пара чисел x_0, y_0 – решение уравнения $ax+by=1$, то пара чисел $x = x_0 + b \cdot n$ и $y = y_0 - a \cdot n$, где $n \in Z$ также будет решением этого уравнения.

Доказательство.

Так как (x_0, y_0) – решение уравнения $ax+by=1$, то, очевидно, имеет место равенство

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 1. \qquad (1.1.2)$$

Подставим теперь $x = x_0 + b \cdot n$ и $y = y_0 - a \cdot n$, ($n \in Z$) в исходное уравнение и убедимся в том, что они ему удовлетворяют:

$$a \cdot \left(x_0 + b \cdot \mathrm{n}\right) + b \cdot \left(y_0 - a \cdot \mathrm{n}\right) = 1.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$a \cdot x_0 + a \cdot b \cdot \mathrm{n} + b \cdot y_0 - b \cdot a \cdot \mathrm{n} = 1.$$

Убрав взаимно уничтожающиеся слагаемые, получим

$$a \cdot x_0 + b \cdot y_0 = 1,$$

то есть равенство (1.1.2), что и доказывает справедливость доказываемого утверждения.

Теорема 1.1.2. Если в уравнении (1.1.1) $НОД\left(|a|;|b|\right)=1$, то

$$\begin{cases} x = x_0 \cdot c + b \cdot n, \\ y = y_0 \cdot c - a \cdot n, \end{cases} n \in Z \qquad (1.1.3)$$

где (x_0, y_0) – решение вспомогательного уравнения $ax+by=1$.

Пример 1.1.2. Решить уравнение $19x+97y=4$.

Решение.

Сначала решим вспомогательное уравнение 19x + 97y = 1.

Очевидно, что НОД (19; 97) =1. Для поиска x_0, y_0 нам потребуется получить линейное представление НОД коэффициентов данного уравнения.

Для нахождения НОД (19; 97) воспользуемся алгоритмом Евклида:

	97	19
	95	$5 = q_0$
19	$2 = r_1$	

$$\begin{array}{rr|l}
 & 18 & 9 = q_1 \\
\cline{3-3}
2 & \multicolumn{1}{|l}{\mathbf{1 = r_2}} & \\
\cline{2-2}
2 & \multicolumn{1}{|l}{2 = q_2} & \\
\cline{1-1}
0 = r_3 & &
\end{array}$$

Известно, что последний, отличный от нуля остаток, полученный при делении с помощью алгоритма Евклида, указывает на НОД рассматриваемых чисел. В нашем случае это r_2, и как мы ранее отметили НОД (19; 97) =1.

Выполним линейное представление НОД:

Согласно представленной ранее таблицы алгоритма Евклида последний остаток можно представить в виде

$$1 = 19 - 9 \cdot 2 .$$

В свою очередь, ясно, что:

$$2 = 97 - 19 \cdot 5 ,$$

следовательно,

$$1 = 19 - 9 \cdot \left(97 - 19 \cdot 5\right)$$

или

$$1 = \underline{19} - 9 \cdot 97 + 45 \cdot \underline{19} ,$$

то влечёт

$$1 = 45 \cdot 19 - 9 \cdot 97 .$$

Значит, решением вспомогательного уравнения будут числа:

$$x_0 = 46 \text{ и } y_0 = -9 .$$

Далее воспользуемся формулой (1.1.3), представленной в **Теореме 1.1.2**:

$$\begin{cases} x = 46 \cdot 4 + 97 \cdot n, \\ y = -9 \cdot 4 - 19 \cdot n, \end{cases} n \in Z$$

или

$$\begin{cases} x = 184 + 97 \cdot n, \\ y = -36 - 19 \cdot n, \end{cases} n \in Z .$$

Непосредственной подстановкой найденных выражений для x и yв данное уравнение можно убедиться в правильности найденного решения.

Интересным также является вопрос о том, как интерпретировать полученный результат?

Полученные выражения для неизвестных x и y принято называть *общим решением* линейного диофантова уравнения. Зафиксировав целое значение n, можно получить *частное решение.* Изменив n, можно получить новое частное решение и т.д.

Действительно, положим:

$n = 0$, тогда $x = 184$, $y = -36$;

$n = -1$, в таком случае $x = 87$, $y = -17$;

$n = -2$, тогда $x = -10$, $y = 2$.

При этом можно также заметить, что числа 184, 87, –10, … также, как и числа – 36, – 17, 2,… являются членами арифметических прогрессий.

Таким образом, общее решение линейного диофантова уравнения включается в себя две формулы, соответственно задающие две арифметические прогрессии.

Обратимся теперь к задачам, при решении которых мы сталкиваемся с линейным диофантовым уравнением.

<u>Пример 1.1.3</u>. Найти наименьшее натуральное число, дающее при делении на 135 и 244 остатки 8 и 51 соответственно.

<u>Решение</u>.

Пусть p – искомое число. По теореме о делении с остатком можем записать два соотношения:

$$P = 135x + 8; p = 224y + 51.$$

Тогда имеет место равенство

$$135x + 8 = 224y + 51$$

или

$$135x - 224y = 43.$$

Найдём $НОД\left(\left|-224\right|;135\right)$, воспользовавшись при этом алгоритмом Евклида:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & & & 224 & 135 \\
 & & & & & 135 & 1 = q_0 \\
 & & & & 135 & 109 = r_1 & \\
 & & & & 109 & 1 = q_1 & \\
 & & & 109 & 26 = r_2 & & \\
 & & & 104 & 4 = q_2 & & \\
 & & 26 & 5 = r_3 & & & \\
 & & 25 & 5 = q_3 & & & \\
 & 5 & 1 = r_4 & & & & \\
 & 5 & 5 = q_4 & & & & \\
0 = r_5 & & & & & &
\end{array}
$$

Значит, $НОД\left(224;135\right)=1$. Так как $43 \vdots 1$, то $135x - 224y = 43$ разрешимо в целых числах.

Получим теперь линейное представление для нашего НОД:

$$1 = 26 - 5 \cdot 5.$$

В свою очередь, ясно, что:

$$5 = 109 - 4 \cdot 26,$$

следовательно,

$$1 = 26 - 5 \cdot \left(109 - 4 \cdot 26\right),$$

$$1 = \underline{26} - 5 \cdot 109 + 20 \cdot \underline{26},$$

$$1 = 21 \cdot 26 - 5 \cdot 109,$$

так как

$$26 = 135 - 109 \cdot 1,$$

то

$$1 = 21 \cdot \left(135 - 109 \cdot 1\right) - 5 \cdot 109,$$

$$1 = 21 \cdot 135 - 21 \cdot \underline{109} - 5 \cdot \underline{109},$$

$$1 = 21 \cdot 135 - 26 \cdot 109,$$

но так как

$$109 = 244 - 135,$$

тогда окончательно имеем

$$1 = 21 \cdot 135 - 26 \cdot \left(244 - 135\right),$$

$$1 = 21 \cdot \underline{135} - 26 \cdot 244 + 26 \cdot \underline{135},$$

$$1 = 47 \cdot 135 - 26 \cdot 244.$$

Выходит, что пара чисел

$$x_0 = 47, \ y_0 = 26$$

является решением вспомогательного уравнения 135 x – 224 y= 1.

Получим теперь общее решение уравнения 135 x – 224 y= 43.

По формуле (1.1.3) имеем:

$$\begin{cases} x = 47 \cdot 43 - 244 \cdot n, \\ y = 26 \cdot 43 - 135 \cdot n, \end{cases} n \in Z$$

или

$$\begin{cases} x = 2021 - 244 \cdot n, \\ y = 1118 - 135 \cdot n, \end{cases} n \in Z$$

Чтобы получить нужное число p, надо взять наименьшее положительное x, для чего разделим 2021 на 244 с остатком

$$\begin{array}{r|l} 2021 & 244 \\ \cline{2-2} 1952 & 8 \\ \cline{1-1} 69 & \end{array}$$

Значит, можно положить n= 8, x= 69.

Тогда p= 135x + 8 = $135 \cdot 69 + 8$ = 9323.

Ответ: 9323.

<u>Пример 1.1.4</u>. Список заданий викторины состоит из 33 вопросов. За каждый верный ответ участнику викторины начисляется 7 баллов, за неверный ответ у него вычитается 11 баллов, при отсутствии ответа – 0 баллов. Сколько верных ответов дал участник викторины, набравший 84 балла, если известно, что он совершил по крайней мере одну ошибку?

<u>Решение</u>.

Пусть x – количество верных ответов, данных участником; y – количество неверных ответов.

Итоговый балл участника викторины определяется диофантовым уравнением

$$7x - 11y = 84$$

с дополнительным ограничением $y \geq 1$.

Составим вспомогательное уравнение $7x - 11y = 1$. Здесь следует подчеркнуть, что его не обязательно решать строго, можно, например, применить метод подбора.

В нашем случае, очевидно, что

$$x_0 = 8,\ y_0 = 5.$$

Общее решение диофантова уравнения запишется в виде

$$\begin{cases} x = 8 \cdot 84 - 11 \cdot n, \\ y = 5 \cdot 84 - 7 \cdot n, \end{cases} n \in Z,$$

$$\begin{cases} x = 672 - 11 \cdot n, \\ y = 420 - 7 \cdot n, \end{cases} n \in Z.$$

Очевидно, что количество верных ответов, меньше 33.

Это означает, что должно выполняться неравенство

$$672 - 11 \cdot n < 33,$$
$$-11 \cdot n < 33 - 672,$$
$$n > \frac{639}{11}.$$

Наименьшим целым числом, удовлетворяющим последнему неравенству, является $n = 59$.

Подставим $n = 59$ в формулу для x и y, получим:

$$x = 672 - 11 \cdot 59 = 672 - 649 = 23,$$
$$y = 420 - 7 \cdot 59 = 420 - 413 = 7.$$

Если подставить $n = 60$, то будем иметь

$$x = 672 - 11 \cdot 60 = 672 - 660 = 12,$$
$$y = 420 - 7 \cdot 60 = 420 - 420 = 0.$$

По условию задачи $y \geq 1$, поэтому этот вариант не подходит, а попытки сделать $n > 60$ приведут к тому, что yокажется отрицательным, чего допускать вообще нельзя. Значит, единственно возможным решением будет $x = 23$.

Ответ: 23.

Пример 1.1.5.Для подведения природного газа к жилому дому необходимо протянуть газопровод, длина которого составляет 150 м. В распоряжении сварщиков имеются только два вида труб одного диаметра, длины которых составляют 13 и 9метров. Сколько понадобится труб, чтобы при прокладке трубопровода не пришлось их резать?

Решение. Пусть потребуется xтруб, длина которых составляет *9 м,* и y труб длиной *13м.*

Из условия задачи вытекает уравнение:

$$9x + 13y = 150.$$

Очевидно,*НОД(9;13)=1,* следовательно, этоуравнение разрешимо в целых числах.

Заметим, что для чисел13 и 9 имеют место разложения:

$$\left.\begin{array}{l}13=9\cdot1+4,\\ 9=4\cdot2+1\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$1=9-4\cdot2=9-(13-9\cdot1)\cdot2=9-13\cdot2+9\cdot2=$$

$$=9\cdot3+13\cdot(-2)\Rightarrow x_0=3, y_0=-2$$

Значит, общее решение этого диофантова уравнения запишется в виде:

$$\begin{cases}x=150\cdot3+13t,\\ y=150\cdot(-2)-9t.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=450+13t,\\ y=-300-9t.\end{cases}$$

По условию *x*и *y*– натуральные числа. Тогда, чтобы найти значение *t*, решим систему неравенств:

$$\begin{cases}13t+450\ge0.\\ -9t-300\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13t\ge-450,\\ -9t\ge300\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t\ge-34{,}6,\\ t\le-33{,}3\end{cases}\Rightarrow t=-34\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=13\cdot(-34)+450=8,\\ y=-9\cdot(-34)-300=6\end{cases}$$

Ответ: 8 труб по 9 м, 6 труб по 13м.

В теории чисел решение алгебраических уравнений более чем с одним неизвестным в целых числах представляет собой одну из труднейших проблем. Выдающиеся математики древности Пифагор и Диофант занимались поиском целочисленных решений алгебраических уравнений. Математики более близких эпох П. Ферма, Л. Эйлер и Ж. Лагранж также прикладывали усилия в этой области. Интерес к решению таких уравнений обусловлен наличием практических применений, например, в физике.

В качестве дополнения отметим, что в теории чисел для решения линейныхдиофантовых уравнений используются теоремы, одна из которых опирается на понятие «*подходящая дробь*», а вторая – на функцию Эйлера.

Теорема 1.1.3. Все решения линейного диофантова уравнения (1.1.1) находятся по формуле

$$\begin{cases}x=(-1)^{n-1}Q_{n-1}\cdot c-b\cdot n,\\ y=(-1)^{n-1}P_{n-1}\cdot c+a\cdot n,\end{cases} n\in Z, \tag{1.1.4}$$

где $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ – предпоследняя подходящая дробь разложения дроби $\frac{a}{b}$ в цепную дробь.

Пример 1.1.6. Решить уравнение$23x-17y=11$.

Решение.

Найдём $НОД(|-17|;23)$. Применим алгоритм Евклида.

$$\begin{array}{rrrrrl}
 & & & & 23 & \big|\ 17 \\
 & & & & 17 & \big|\ 1 = q_0 \\
 & & & 17 & 6 = r_1 & \\
 & & & 12 & 2 = q_1 & \\
 & & 6 & 5 = r_2 & & \\
 & & 5 & 1 = q_2 & & \\
 & 5 & 1 = r_3 & & & \\
 & 5 & 5 = q_3 & & & \\
 0 = r_4 & & & & &
\end{array}$$

Значит, цепная дробь для обыкновенной дроби $\frac{23}{17}$ примет вид

$$\frac{23}{17} = |1;2,1,5| \ .$$

Далее заполним таблицу

k	0	1	2	3
q_k	1	2	1	5
P_k	1	3	4	23
Q_k	1	2	3	17

из которой видим, что

$$\frac{P_2}{Q_2} = \frac{4}{3}.$$

Тогда общее решение данного уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} x = (-1)^2\, 3 \cdot 11 + 17 \cdot n, \\ y = (-1)^2\, 4 \cdot 11 + 23 \cdot n, \end{cases} n \in Z$$

или

$$\begin{cases} x = 33 + 17 \cdot n, \\ y = 44 + 23 \cdot n, \end{cases} n \in Z\,.$$

Теорема 1.1.4. Все решения линейного диофантова уравнения (1.1.1) вычисляются по формуле

$$\begin{cases} x = c \cdot a^{\varphi(b)-1} + b \cdot \mathrm{t}, \\ y = c \cdot \dfrac{1 - a^{\varphi(b)}}{b} - a \cdot \mathrm{t}, \end{cases} \qquad (1.1.5)$$

где $\mathrm{t} \in Z$, а $\varphi(\square)$ – функция Эйлера.

§ 1.2. Уравнения с двумя переменными порядка, выше первого

Уравнения с двумя переменными, старшая степень переменной в котором выше первой, называется *нелинейным*.

В прямоугольной системе координат график такого уравнения представляет собой кривую.

Определение 1.2.1. Уравнение вида

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0, \qquad (1.2.1)$$

в котором все буквенные коэффициенты принимают целочисленные значения, называется *диофантовым уравнением 2-го порядка*.

Частным случаем уравнения (1.2.1) является, например, уравнение $x^2+ay^2=1$, в котором a – целое число, не являющееся полным квадратом. В математику оно вошло под названием «уравнение Пелля», названо в честь британского алгебраиста Джона Пелля (1611–1685).

При решении диофантовых уравнений второго порядка можно использовать следующие методы:

1) *метод разложения на множители*

Пример 1.2.1. Найти целочисленные решения уравнения $x + y = xy$.

Решение.Перепишем данное уравнение в виде

$$(x-1)\cdot(y-1)=1,$$

которое, очевидно, равносильно исходному уравнению. Произведение двух целых чисел может равняться 1 только в том случае, когда оба они равны 1 или – 1.

Значит, исходное диофантово уравнение равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-1=1,\\ y-1=1;\end{cases}\\ \begin{cases}x-1=-1,\\ y-1=-1;\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l}\begin{cases}x=2,\\ y=2;\end{cases}\\ \begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}\end{array}$$

Ответ: (0; 0), (2; 2).

2)*с использованием признаков делимости*

Пример 1.2.2. Найти целочисленные решения уравнения

$$19x + 97y + xy = 4.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$19x + xy = 4-97y,$$

$$x\cdot(19+y) = 4-97y.$$

Если положить $y = -19$, то получим

$$x\cdot 0 = 4-97\cdot(-19),$$

откуда, очевидно, нельзя найти x.

Пусть $y \neq -19$, тогда

$$x = \frac{4-97y}{19+y}\ .$$

Полученная дробь является неправильной алгебраической дробью, а это означает, что из неё можно выделить целую часть.

$$\begin{array}{r|l} -97y+4 & y+19 \\ \cline{2-2} -97y-1843 & -97 \\ \hline 1847 & \end{array}$$

Заметим, что число 1847 – простое, что означает: $1847 \vdots \pm 1; \pm 1847$.

То есть имеем 4 случая:

1 случай) $19 + y = 1$; $y = -18$; $x = -97 + 1847 = 1750$, $\Rightarrow (1750; -18)$.

2 случай) $19 + y = -1$; $y = -20$; $x = -97 - 1847 = -1944$, $\Rightarrow (-1944; -20)$.

3 случай) $19 + y = 1847$; $y = 1228$; $x = -97 + 1 = -96$, $\Rightarrow (-96; 1228)$.

4 случай) $19 + y = -1847$; $y = -1866$; $x = -97 - 1 = -98$, $\Rightarrow (-98; -1866)$.

Ответ: (1750; –18), (–1944; –20), (– 96; 1228), (– 98; – 1866).

3) *использование четности*

Пример 1.2.3. Решить в простых числах уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$.

Решение. Это и есть то самое уравнение Пелля, о котором было сказано ранее.

Рассмотрим два возможных случая в зависимости от чётности или нечётности переменной x:

1) Пусть x – нечётное число. Применим подстановку $x = 2 \cdot t + 1$, которая неминуемо приведёт наше уравнение к виду

$$(2t+1)^2 - 2y^2 = 1,$$

$$2y^2 = 4t \cdot (t+1).$$

Так как правая часть полученного равенства является чётным числом, то величина y^2 должна делится на 2. С другой стороны, y – простое число, поэтому y = 2. Тогда $x = \sqrt{1+2^3} = \sqrt{9} = 3$.

2) Пусть x – чётное число. Так как x – простое число, то x = 2, но тогда y не будет простым числом.

Следовательно, данное уравнение в классе простых чисел имеет единственное решение (3;2).

§ 1.3. Системы уравнений. Основные понятия

Ознакомимся подробно с системами уравнений, методами их решения, а также их применениями.

Системы уравнений играют важную роль как в элементарной, так и в высшей математике и являются естественным обобщением понятия уравнения.

📖**Определение 1.3.1.**Совокупность двух и более уравнений $A_1 = B_1, A_2 = B_2, \quad \ldots \quad A_n = B_n$, рассматриваемых совместно, называется *системой уравнений* и записывают с помощью знака *парантеза* $\{$, заменяющего знак конъюнкции.

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n = B_n. \end{cases}$$

Это определение мы приводили ранее в нашем пособии (Часть 2) при иллюстрации методов решения различных видов уравнений.

Под системой уравнений также понимают группу уравнений, в которых одноимённые неизвестные обозначают одну и ту же величину.

📖**Определение 1.3.2.**Областью определения системы уравнений называется общая часть областей определения уравнений, входящих в состав системы.

📖**Определение 1.3.3.**Систему значений неизвестных называют *допустимой* системой значений неизвестных системы уравнений, если она содержится в области определения этой системы, то есть при подстановке в левые и правые части уравнений системы они имеют смысл.

📖**Определение 1.3.4.**Упорядоченный набор значений неизвестных системы, принадлежащих её множеству допустимых значений и удовлетворяющих всем уравнениям системы одновременно, принято называет *решением системы*.

📖**Определение 1.3.5.**Решить систему–это значит найти множество всех её решений или исследовать, *совместна* (имеет решение) ли она или нет.

📖**Определение 1.3.6.**Если система не имеет решений, то говорят, что она *противоречивая*, или *несовместная*.

📖**Определение 1.3.7.**Если совместная система имеет конечное число решений, то она называется *определённой*. Система *неопределённая*, если имеет бесконечное множество решений.

Классификацию систем обычно проводят по количеству неизвестных, а также по числу и характеру уравнений, входящих в систему.

Так, системы можно разделить на виды:

- системы *алгебраических* и *трансцендентных* уравнений;
- системы уравнений с одной, двумя, тремя и более неизвестными;
- системы с разным соотношением количества неизвестных и количества уравнений.

В свою очередь системы алгебраических уравнений подразделяются на системы рациональных и иррациональных уравнений, смешанные системы.

📖**Определение 1.3.8.**Система уравнений называется *алгебраической*, если все её уравнения алгебраические.

📖**Определение 1.3.9.**Система уравнений называется *трансцендентной,* если хотя бы одно из уравнений системы трансцендентное.

Многочлены (рассмотрены в Части 1нашего учебного пособия) характеризуются как степенью относительно совокупности переменных и степенью относительно каждого из переменных. Аналогично можно характеризовать уравнение

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0\,.$$

Так

- уравнение с n неизвестными называется *алгебраическим степенит,* если его левая часть есть многочлен степени mотносительно совокупности входящих в него неизвестных;
- уравнение с n неизвестными называется *уравнением степениs* относительно одного из неизвестных, если левая часть является многочленом от n неизвестных степени s относительно упомянутого неизвестного.

Пример 1.3.1. Уравнение $2x_1x_2{}^5x_3 - 5x_1{}^3x_2{}^4x_3{}^7 = 0$ –есть уравнение 14 степени относительно совокупности неизвестных и 5 степени относительно x_2.

Систему алгебраических уравнений чаще всего характеризуют наибольшей из степеней уравнений, входящих в неё; иногда систему характеризуют суммой степеней всех уравнений относительно совокупности входящих в систему неизвестных или относительно какого-либо неизвестного.

Так

- система уравнений, состоящая из алгебраических уравнений первой степени (линейных), называется *системой линейных уравнений*;
- система алгебраических уравнений, в составе которой имеется по крайней мере одно уравнение степени не ниже второй, называется *нелинейной системой* алгебраических уравнений (в общем виде изучаются в курсе высшей алгебры и рассмотрению в курсе элементарной математики не подлежит).

Основной подход при решении систем уравнений состоит в следующем: за счёт алгебраических преобразований, введения новых переменных получить более простую систему уравнений (или уравнение), являющуюся равносильной системой (или следствием) исходной системы. Дальнейшие преобразования проводятся над полученной системой (или уравнением).

Две системы называются *равносильными* (*эквивалентными*), если:

- во все уравнения этих систем входят одни и те же переменные;
- все уравнения систем рассматриваются на одних и тех же числовых множествах;
- множества решений этих систем совпадают.

Иными словами, две системы равносильны, если все решения одной из них являются и решениями другой и наоборот. Две равносильные системы уравнений могут состоять из одинакового или разного количества уравнений. В частности, система уравнений может быть равносильна одному уравнению.

Системы, равносильные на одном числовом множестве, могут быть неравносильны на другом.

Две несовместные системы уравнений также равносильны.

Две системы уравнений, равносильные одной и той же системе, равносильны между собой.

Наиболее распространённый способ решения систем уравнений – переход от данной системы уравнений к новой, равносильной данной, но более простой.

Утверждения о равносильности систем уравнений

1. Если в системе уравнений поменять местами уравнения, то получается система, равносильная данной.
2. Если правые части уравнений системы перенести в левые с противоположным знаком, то получится система, равносильная данной.
3. Если к обеим частям одного или нескольких уравнений системы прибавить одно и то же число или выражение, имеющее смысл на области допустимых значений неизвестных, входящих в уравнения системы, то получим систему, равносильную данной.
4. Если обе части одного или нескольких уравнений системы умножить на одно и то же число или выражение, имеющее смысл на области допустимых значений неизвестных и не равное нулю на этом множестве, то получим систему, равносильную данной.
5. Система, в которой одно или несколько уравнений представляют собой линейную комбинацию представленных в системе уравнений, то эта система равносильна первоначальной.
6. Системы уравнений (где *Aи B* – произвольные действительные числа) равносильны

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases} \text{и} \begin{cases} A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots \\ A_n = B_n. \end{cases}$$

7. Системы уравнений (где $C_1 \neq 0$, $D_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $D_2 \neq 0$ на области допустимых значений неизвестных) равносильны

$$\begin{cases} \dfrac{A_1}{C_1} = \dfrac{B_1}{D_1}, \\ \dfrac{A_2}{C_2} = \dfrac{B_2}{D_2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_n}{C_n} = \dfrac{B_n}{D_n} \end{cases} \text{и} \begin{cases} A_1 \cdot D_1 = B_1 \cdot C_1, \\ A_2 \cdot D_2 = B_2 \cdot C_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n \cdot D_n = B_n \cdot C_n. \end{cases}$$

8. Системы уравнений

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases} \text{и} \begin{cases} A_1A_2 = B_1B_2, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases}$$ равносильны.

9. Системы уравнений (где $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0$)

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases} \text{и} \begin{cases} \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases}$$ равносильны.

10. Системы уравнений (где $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, \dots, B_n \neq 0$)

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases} \text{и} \begin{cases} \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{1}{B_1}, \\ \dfrac{1}{A_2} = \dfrac{1}{B_2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{1}{A_n} = \dfrac{1}{B_n} \end{cases}$$ равносильны.

11. Системы уравнений (где $A_i \geq 0, B_i \geq 0$)

$$\begin{cases} A_1 = B_1, \\ A_2 = B_2, \\ \dots\dots\dots \\ A_n = B_n \end{cases} и \begin{cases} \left(A_1\right)^n = \left(B_1\right)^n, \\ \left(A_2\right)^m = \left(B_2\right)^m, \\ \dots\dots\dots \\ \left(A_n\right)^k = \left(B_n\right)^k \end{cases}$$ равносильны.

12. Пусть в системе двух уравнений одно из уравнений записано в виде, где в левой части стоит одно из неизвестных, например, x в первой степени, а в правой части – функция относительно у. Тогда говорят, что неизвестное х выражено через неизвестное у. Если, например, неизвестное х может быть выражено из первого уравнения системы, то, подставив во второе уравнение вместо х эту функцию от у, получим систему, равносильную первоначальной. Другими словами, равносильны системы

$$\begin{cases} x = \varphi(y), \\ f(x, y) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ h(x, y) = 0 \end{cases} и \begin{cases} x = \varphi(y), \\ f(\varphi(y), y) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ h(\varphi(y), y) = 0 \end{cases}.$$

13. Если одно из уравнений системы равносильно совокупности k алгебраических уравнений, то первоначальная система равносильна совокупности k систем уравнений (говорят, что система распадается на kсистем), в каждую из которых вместо первого уравнения входит одно из уравнений совокупности, на которое первое уравнение распадается. При этом каждое решение первоначальной системы является решением одной из систем совокупности, но обратное неверно из-за того, что решение одной из систем совокупности может не удовлетворять области допустимых значений хотя бы одной из функций, входящих в уравнения других систем.

14. Если одно из уравнений системы является следствием нескольких уравнений той же системы, то его можно отбросить. Полученная из оставшихся уравнений система равносильна исходной.

15. Если одно из уравнений системы удовлетворяется тождественно, то его можно отбросить. Полученная из оставшихся уравнений система равносильна исходной.

16. Если любой набор уравнений системы заменить равносильным (подсистему заменить равносильной ей), то получим систему, равносильную заданной.

Одна система называется следствием другой, если каждое решение первой системы является также и решением второй, но не наоборот. То есть, множество всех решений первой системы может быть шире множества всех решений второй системы.

Те решения системы-следствия, которые не являются решениями исходной системы, называются посторонними.

Как правило, при решении систем переход от данной системы к её следствию происходит за счёт того, что одно из уравнений исходной системы заменяется не равносильным уравнением, а уравнением-следствием.

Уравнение называется следствием системы, если каждое её решение является решением уравнения. Очевидно, что любое уравнение системы-следствия является следствием исходной системы.

Замечания о следствиях системы

1. Если следствие системы не имеет решений, то и сама система не имеет решений.
2. Если система-следствие имеет решения, то подстановкой проверяется, является ли оно решением исходной системы.
3. Систему-следствие можно присоединить к исходной системе и от этого множество решений последней не изменится.
4. Уравнение-следствие можно присоединить к или отбросить от исходной системы и от этого множество решений последней не изменится.
5. Если в системе уравнений одно из уравнений является следствием подсистемы, образованной всеми другими уравнениями системы, то эта подсистема равносильна заданной системе уравнений.

При решении систем уравнений возможны два пути:

а) совершать только равносильные переходы. Тогда при каждом переходе множество решений будет сохраняться и в конечном итоге получатся все решения исходной системы;

б) совершать переходы к следствию исходной системы. Тогда множество решений может расшириться за счёт появления посторонних решений, избавиться от которых можно путём проверки.

Очевидно, системы уравнений равносильны, если каждая из них является следствием другой.

Основные методы решения систем уравнений

1)Метод подстановки позволяет свести решение системы уравнений с двумя неизвестными к решению одного уравнения с одним неизвестным.

Обоснованием этого метода служит теорема: «Системы уравнений равносильны

$$\begin{cases} x=\varphi(y), \\ F(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\varphi(y), \\ F(\varphi(y);y)=0 \end{cases}».$$

При решении системы уравнений методом подстановки решают одно из её уравнений, например, последнее, относительно одного из неизвестных и записывают его в виде, когда это неизвестное выражено через остальные. Далее найденное выражение этого неизвестного подставляют во все остальные уравнения системы. В результате получают систему уравнений с числом уравнений и числом неизвестных на единицу меньше, чем у исходной системы. Полученную систему решают, а затем каждое полученное решение подставляют в то уравнение, в котором выбранное первоначально неизвестное выражено через остальные и находят значение этого неизвестного.

Процесс исключения неизвестных методом подстановки продолжают и дальше, если это возможно и в этом есть необходимость, до тех пор, пока не получат систему, решения которой известны или легко определяются. Если же в результате описанного процесса получают несовместную систему или уравнение, не имеющее решений, то и исходная система решений несовместна.

Механическое применение метода подстановки для решения систем уравнений иногда может привести к потере решений заданной системы. Так, в процессе решения системы уравнений методом подстановки приходится разрешать уравнения общего вида $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ относительно одного из неизвестных и заменять их уравнениями такого вида, когда одно из неизвестных выражено через другие. Область определения такого уравнения может оказаться уже, чем область определения первоначального уравнения общего вида. То есть, некоторые из допустимых систем значений неизвестных уравнений могут не быть допустимыми для уравнения, в котором одно неизвестное выражено через другие. Это может случиться, когда указанное выражение одного неизвестного через другие не имеет смысла. Это и приводит к потере решений.

2)Метод алгебраического сложения основан на теореме: Если к одному из уравнений системы, умноженному на множитель, имеющий смысл и не обращающийся в нуль при всех допустимых системах значений неизвестных, прибавим некоторые другие её уравнения, умноженные на любые множители, определённые при всех допустимых системах значений неизвестных, а остальные уравнения оставим без изменений, то получим систему, равносильную заданной.

При решении систем уравнений этим методом некоторые из уравнений системы умножают на специально подобранные множители, которые определены при всех допустимых системах значений неизвестных, а затем по частям прибавляют их к одному из других уравнений системы, которое в случае необходимости также умножают на специально подобранный множитель, определённый и отличный от нуля при всех допустимых системах значений неизвестных.

В результате этого одно из уравнений системы заменяется новым уравнением. Множители при этом подбираются так, чтобы это новое уравнение было более простым по сравнению с заменённым уравнением.В частности, иногда уравнение, к которому прибавляются другие уравнения, ни на какой множитель не умножают, т.е. специальный множитель для этого уравнения равен 1.

Чаще всего (но не всегда!) множители подбирают так, чтобы в новом уравнении уменьшилось количество неизвестных. Операцию сложения повторяют, применяя её к различным уравнениям системы, до тех пор, пока не получат систему, которая уже легко решается (например, содержит лишь одно неизвестное). Полученная таким образом система уравнений равносильна заданной системе, ибо при каждом очередном выполнении операции сложения получают систему уравнений, равносильную заданной системе. Поэтому для решения заданной системы достаточно решить полученную систему.

Иногда при решении системы уравнений методом алгебраического сложения некоторые из уравнений, к которым прибавляются другие уравнения, умножают на множители, обращающиеся в нуль при некоторых допустимых системах значений неизвестных. В результате этих преобразований получается система-следствие и не обязательно равносильная исходной системе. Поэтому для решения заданной системы уравнений в этом случае находят все решения другой системы, полученной как следствие из заданной, и затем путём подстановки их в первоначальную систему определяют, какие из них являются её решениями.

3)Метод исключения неизвестного основан на следующем положении:
«Если одно из уравнений этой системы можно разрешить относительно одной из неизвестных, то системы равносильны

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\varphi(y), \\ F_2(\varphi(y);y)=0 \end{cases}.$$

В последнем уравнении второй системы, неизвестную x мы исключили.

4)Метод замены неизвестных или введения новых неизвестных основан на положении о равносильности систем

$$\begin{cases} F_1(x;y)=0, \\ F_2(x;y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(u;v)=0, \\ f_2(u;v)=0 \end{cases},$$

при условии, что

$$\varphi_1(x;y)=u \text{, а } \varphi_2(x;y)=v.$$

При решении систем уравнений элементарными способами нередко приходится комбинировать методы алгебраического сложения, подстановки, введения новых неизвестных (замену неизвестных), а также применять различные частные приёмы, используя специфические особенности заданной системы.

<u>**Пример 1.3.2**</u>. Решить систему

$$\begin{cases}10x^2+5y^2-2xy-38x-6y+41=0,\\3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0,\end{cases}$$

Решение.Вычтем из первого уравнения второе, умноженное на 2, получим:

$$\begin{cases}4x^2+9y^2-12xy-4x+6y+1=0,\\3x^2-2y^2+5xy-17x-6y+20=0,\end{cases}$$

Решим первое уравнение, рассматривая его как квадратное относительно переменной x.

$$4x^2-4x(3y+1)+(9y^2+6y+1)=0,$$

$$\frac{D}{4}=4(3y+1)+(9y^2+6y+1)=0$$

Таким образом, второе уравнение системы имеет единственное решение $x=\frac{1}{2}(3y+1)$.Подставляя найденное значение во второе уравнение, получим:

$$\frac{3}{4}(3y+1)^2-2y^2+\frac{5}{2}y(3y+1)-\frac{17}{2}(3y+1)-6y-20=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 49y^2-98y+49=0\Leftrightarrow(y-1)^2=0\Leftrightarrow y=1\Rightarrow x=2.$$

Ответ: (2;1).

Все перечисленные методы решения систем основаны на том, что они позволяют заменить предложенную систему другой системой или совокупностью систем, равносильных первоначальной.

Очень много различных частных приёмов решения систем уравнений. Их невозможно организовать в какую бы то ни было общую теорию. При применении частных приёмов в каждом конкретном случае должен возникать вопрос: все ли найденные нами решения удовлетворяют заданной системе уравнений и не потеряли ли мы каких-либо из её решений. Этот вопрос подлежит специальному исследованию. Наличие же посторонних решений выявляют путём подстановки всех найденных решений в исходную систему. Для выявления потери рассматривают все проведённые преобразования на предмет приведения к потере решений.

Рассмотрим элементарный метод решения нелинейных систем алгебраических уравнений. Решение таких систем методами высшей алгебры часто довольно громоздко и не всегда приводит к результату (в силу того, что не всякое уравнение с одним неизвестным степени больше 4 решается в радикалах).

Рассмотрим систему m уравнений с nнеизвестными вида

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_2(x_2, ..., x_n) = 0, \\ ... \\ f_m(x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

в которой все уравнения, кроме первого, являются уравнениями нулевой степени относительно неизвестного x_1, то есть x_1 не входит в них.

Решение такой системы сводится к решению системы *m-1* уравнений с *n-1* неизвестными

$$\begin{cases} f_2(x_2, ..., x_n) = 0, \\ f_3(x_2, ..., x_n) = 0, \\ ... \\ f_m(x_2, ..., x_n) = 0 \end{cases}$$

и нескольких уравнений с одним неизвестным x_1 вида $f_1(x_1, k_2, ..., k_n) = 0$.

Для решения первоначальной системы нужно найти все решения последней системы из записанных и те из них, для которых это возможно, дополнить до решения исходной нелинейной системы *m* уравнений с *n*неизвестными.

То есть, решение любой нелинейной системы алгебраических уравнений можно свести средствами элементарной алгебры к решению нескольких алгебраических уравнений с одним неизвестным.

Описанным метод также довольно громоздкий и в результате его реализации могут получиться алгебраические уравнения с одним неизвестным, которые в радикалах не решаются.

Чаще нелинейную систему удаётся решить, комбинируя известные элементарные методы решения уравнений и систем уравнений (алгебраическое сложение, подстановка, введение новых неизвестных) и применяя частные приёмы. Выбор метода определяется специфическими особенностями заданной системы уравнений.

1. Система двух уравнений с двумя неизвестными, одно из которых второй, а другое – первой степени.

Такая система легко решается методом подстановки.

Пример 1.3.3. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Выразим неизвестную x из второго уравнения системы (уравнения первой степени относительно этой неизвестной)

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x + y = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 5, \\ x = 5 - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5 - y)^2 - y^2 = 5, \\ x = 5 - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 5 - y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 3. \end{cases}$$

Ответ: $(3;2)$.

2. Система двух уравнений второй степени с двумя неизвестными, которые не имеют членов первой степени.

В случае, когда свободные члены, содержащиеся в левых частях обоих уравнений не равны одновременно нулю, то умножают первое уравнение на коэффициент, равный свободному члену второго, а второе уравнение – на коэффициент, равный свободному члену первого уравнения и затем вычитают из одного уравнения другое. Затем полученное путём описанных преобразований уравнение либо решают, как однородное относительно неизвестной, равной отношению первоначальных неизвестных, либо решают разложением на множители.

3. Система двух уравнений второй степени с двумя неизвестными в общем виде.

Решение таких систем представляет значительные трудности и не входит в курс элементарной алгебры. Есть частные случаи, общее решение которых можно описать, не используя средства высшей математики. Так, можно выполнить преобразования, цель которых состоит в исключении второй степени одной из неизвестных. Для этого умножают каждое из уравнений на коэффициент при второй степени одной из неизвестных другого уравнения, а затем вычитают из одного полученного уравнения другое. Затем выражают одно неизвестное (которое входит в уравнение-комбинацию только в первой степени) через другое и впоследствии решают исходную систему методом подстановки.

Заметим, что область определения исходной системы может сузиться, так как при выражении неизвестного через остальные мы переходим к дробно-рациональному выражению. Зная, что в общем случае у такой системы должно быть четыре решения, планируем дальнейшие действия: если найдены не все решения, то необходимо исследовать, не имеет ли данная система решений, для которых значение неизвестной обращает в ноль знаменатель при выражении неизвестного через остальные. Для этого такие значение неизвестной подставляют в уравнение, из которого неизвестная выражалась. Если же указанное значение (значения) тождественно удовлетворяют уравнению системы, то его же подставляют во второе уравнение. После этого получается квадратное уравнение, из которого и находят значение соответствующей неизвестной.

В случае, когда по крайней мере один из коэффициентов у вторых степеней неизвестных равен нулю, решение системы упрощается.

4. Система двух однородных уравнений с двумя неизвестными.

Известно, что однородное уравнение помимо тривиального (нулевого) решения может иметь и нетривиальное (ненулевое) решение.

Однородные системы решаются комбинацией двух методов: линейных преобразований и введения новой неизвестной.

Рассмотрим систему двух однородных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Многочлены $f_1(x_1, x_2)$и $f_2(x_1, x_2)$ могут иметь общий множитель. В этом случае система имеет бесконечное множество решений вида $(0;k)$,гдеk – произвольное число. То есть, всякому отличному от нуля числу k соответствует ненулевое решение заданной системы.

Все другие ненулевые решения имеют вид $(k_1;k_2)$, где оба числа отличны от нуля.

5. *Система двух уравнений с двумя неизвестными, одно из которых однородное, а второе – неоднородное.*

При решении таких систем отдельно рассматриваются случаи $x_1=0$и $x_1 \neq 0$ в одном из уравнений, допустим, в первом. Случай $x_1=0$, в свою очередь, распадается на два – в зависимости от того равен ли нулю коэффициент при старшей степени второй переменной – x_2 в этом уравнении. Если не равен, то решением системы может быть только пара (0;0) (тривиальное решение), если же равен, то первое уравнение удовлетворяется при любом x_2 и остаётся найти корни уравнения $f_2(0, x_2) = 0$, то есть уравнения, получающегося из второго уравнения системы при условии $x_1=0$.

Случай $x_1 \neq 0$ предполагает применение деления на старшую степень x_1 того уравнения системы, которое является однородным, с последующим решением его относительно переменной $\dfrac{x_2}{x_1}$ и рассмотрением его в системе со вторым уравнением (не являющимся однородным).

6. *Система двух уравнений с двумя неизвестными, левые части которых однородные многочлены, а правые – отличные от нуля числа.*

Предположим, что задана система

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = a_1, \\ f_2(x_1, x_2) = a_2, \end{cases}$$

где левые части уравнений – однородные многочлены соответственно степени m_1и m_2, а a_1 и a_2 – отличные от нуля числа. Если степени многочленов равны, то из первого уравнения, умноженного на a_2, вычтем второе уравнение, умноженное на a_1. Тем самым мы уничтожаем свободные члены. Объединим полученное путём описанные преобразований уравнение и второе уравнение исходной системы в систему. Полученная система содержит одно однородное уравнение с нулевой правой частью и одно из первоначальных уравнений и решается рассмотренным в предыдущем положении способом.

Если же степени однородных многочленов не равны, то полагают в уравнениях исходной системы $x_1 = 0$. При данном условии находят решения системы, если они существуют. Затем ищут решения при условии $x_1 \neq 0$. Для этого находят наименьшее общее кратное степеней однородных многочленов n и возводят обе части первого уравнения в степень $\frac{n}{m_1}$, второго – в степень $\frac{n}{m_2}$. В результате проделанных преобразований получается система-следствие. Левые части уравнений этой системы становятся многочленами одной и той же степени n. Для решения в то уравнение, степень которого ниже, подставляется $x_2 = tx_1$. Получается уравнение с одной неизвестной и, если оно не удовлетворяется тождественно, то, решив его, найдём значения неизвестного. Из найденных значений выберем те, которые удовлетворяют второму уравнению системы.

Проиллюстрированный способ позволяет свести решение однородной системы к решению системы такого же вида, в которой правая часть одного из уравнений равна нулю.

Пример 1.3.4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ x^2 + xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Вычтем из первого уравнения, умноженного на 7, второе, умноженное на 3

$$7x^2 - 7y^2 - 3x^2 - 3xy - 3y^2 = 0,$$
$$4x^2 - 10y^2 - 3xy = 0.$$

Пусть $x=0$, тогда

$$10y^2 = 0, \Rightarrow y = 0.$$

То есть, одно из решений системы – тривиальное (0;0).

Если же $x \neq 0$, тогда разделим обе части уравнения на старшую степень x, т.е. на x^2:

$$4\frac{x^2}{x^2} - 10\frac{y^2}{x^2} - 3\frac{xy}{x^2} = 0,$$
$$4 - 10\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$
$$10\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{x}\right) - 4 = 0,$$

откуда получаем два соотношения: $\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$ и $\frac{y}{x}=-\frac{4}{5}$. То есть, $x=2y$ или $x=-1,25y$.

Получаем дизъюнкцию систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-y^2=3,\\ x=2y;\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-y^2=3,\\ x=-1,25y.\end{cases}\end{array}\right.$$

Решая данные системы методом подстановки, получаем требуемое.

Ответ: $(-2,-1),(2,1),\left(-\frac{5\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{5\sqrt{3}}{3};-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

7. Система нелинейных алгебраических уравнений, в состав которой входят линейные уравнения.

Пусть задана система алгебраических уравнений, в которой первые s уравнений линейные, а все последующие нелинейные, то есть степени выше первой.

Сначала рассматривают отдельно систему линейных уравнений, образованную первыми s уравнениями исходной системы, решаем её методом сложения и последовательно исключаем неизвестные из системы.

$$\begin{cases}f_1(x_1,x_2,.....,x_n)=0,\\ f_2(x_1,x_2,.....,x_n)=0,\\ ...\\ f_s(x_1,x_2,.....,x_n)=0,\\ \varPhi_1(x_1,x_2,.....,x_n)=0,\\ \varPhi_2(x_1,x_2,.....,x_n)=0,\\ ...\\ \varPhi_m(x_1,x_2,.....,x_n)=0.\end{cases}$$

Возможны следующие три случая:

- Получаем несовместную систему. Это означает, что и исходная система несовместна.
- Получаем систему, имеющую единственное решение. Исходная система также имеет единственное решение. Но если хотя бы одному уравнению найденное решение не удовлетворяет, то исходная система несовместна.
- Получаем систему, имеющую бесконечно много решений. Исходная система также имеет бесконечно много решений.

8. Системы симметрических уравнений.

Пусть система имеет вид

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0, \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

где $f_1(x_1, x_2)$ и $f_2(x_1, x_2)$ – симметрические многочлены от входящих в них переменных. То есть, они не меняются при замене x_1 на x_2 и наоборот. Простейшей системой указанного типа является

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a, \\ x_1 \cdot x_2 = b \end{cases}.$$

Приём решения такой системы описывается теоремой: система уравнений и квадратное уравнение

$$t^2 - at + b = 0$$

связаны следующим образом: если t_1иt_2 – корни последнего квадратного уравнения, то система имеет два решения (t_1;t_2)и (t_2;t_1) и не имеет других решений. Верна и обратная теорема.

В формулировке теоремы были использованы выражения, которые называются простейшими симметрическими многочленами от двух переменных. Их принято обозначать $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = x \cdot y$.

Через простейшие симметрические многочлены может быть выражен любой симметрический многочлен.

Поэтому и при решении симметрических систем рекомендуется вводить новые переменные, позволяющие уменьшить степени исходных уравнений, по формулам $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = x \cdot y$.

Итак, общими словами решение симметрической системы можно описать так:

1) ввести новые неизвестные $\sigma_1 = x + y, \sigma_2 = x \cdot y$;
2) решить получившуюся систему и совершить обратный переход.

В практике решения симметрических систем встречаются симметрические многочлены, в которые переменные входят в показателе степени выше первой. Речь идёт о так называемых степенных суммах $S_n = x^n + y^n$.Онитакже выражаются через простейшие тригонометрические многочлены σ_1и σ_2:

$$S_1 = x + y = \sigma_1;$$

$$S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \sigma_1{}^2 - 2\sigma_2;$$

$$S_3 = x^3 + y^3 = (x+y) \cdot ((x+y)^2 - 3xy) = \sigma_1 \cdot (\sigma_1{}^2 - 3\sigma_2);$$

$$S_4 = x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (\sigma_1{}^2 - 2\sigma_2)^2 - 2\sigma_2{}^2 = \sigma_1{}^4 - 4\sigma_1{}^2\sigma_2 + 2\sigma_2{}^3;$$

$$S_5 = x^5 + y^5 = (x^2 + y^2) \cdot (x^3 + y^3) - x^2y^2(x+y) = S_2S_3 - \sigma_1\sigma_2{}^2 =$$

$$= (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) - \sigma_1\sigma_2{}^2 = \sigma_1{}^5 - 5\sigma_1{}^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2{}^3.$$

<u>Пример 1.3.5</u>. Решить симметрическую систему с помощью замены через простейшие симметрические многочлены

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x^3+y^3=19. \end{cases}$$

Решение. Вводим обозначения: $\sigma_1 = x+y, \sigma_2 = x \cdot y$.

Тогда по записанной выше формуле второе уравнение системы примет вид $x^3+y^3=\sigma_1 \cdot (\sigma_1{}^2 - 3\sigma_2)$.

Новая система: $\begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_1 \cdot \left(\sigma_1{}^2 - 3\sigma_2\right) = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ 1-3\sigma_2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1, \\ \sigma_2 = -6. \end{cases}$

Возвращаемся к старым неизвестным, получаем систему:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6. \end{cases}$$

Ответ: $(-2,3),(3,-2)$.

Заметим, что с помощью симметрических систем решаются некоторые иррациональные уравнения. Например, иррациональное уравнение вида

$$\sqrt{a-f(x)}+\sqrt{b+f(x)}=c$$

Пример 1.3.6. Решить уравнение $\sqrt[4]{x+3}+\sqrt[4]{94-x}=5$ (методом замены с последующим составлениемсимметрической системы уравнений).

Решение.

Положим $u=\sqrt[4]{x+3}$, $\upsilon=\sqrt[4]{94-x}$.

Тогда

$$u^4=x+3, \quad \upsilon^4=94-x \quad \text{и} \quad u^4+\upsilon^4=97.$$

Таким образом, приходим к системе двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} u+\upsilon=5, \\ u^4+\upsilon^4=97, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+\upsilon=5, \\ \left(u^2+\upsilon^2\right)^2-2u^2v^2=97, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+\upsilon=5, \\ \left(\left(u+v\right)^2-2uv\right)^2-2u^2v^2=97, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u+\upsilon=5, \\ \left(25-2uv\right)^2-2u^2v^2=97, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u=\upsilon+1, \\ \left[\begin{array}{l} \upsilon=4, \\ \upsilon=-5; \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=5, \\ \upsilon=4; \end{cases} \\ \begin{cases} u=-4, \\ \upsilon=-5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt[3]{x+45}=5, \\ \sqrt[3]{x-16}=4; \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt[3]{x+45}=-4, \\ \sqrt[3]{x-16}=-5; \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=80, \\ x=-109. \end{array}\right.$$

Ответ: –109; 80.

При решении симметрических систем с большим количеством неизвестных используют в качестве неизвестных

$$\sigma_1=x+y+z, \sigma_2=xy+xz+yz, \sigma_3=xyz.$$

Заметим, что обозначения простейших многочленов с использованием греческих букв, не принципиальны.

Простейшей системой рассматриваемого типа является следующая:

$$\begin{cases} x+y+z=a, \\ xy+xz+yz=b, \\ xyz=c. \end{cases}$$

Приём её решения показывает теорема: «Система уравнений и кубическое уравнение $t^3-at^2+bt-c=0$ связаны друг с другом следующим образом. Если t_1,t_2,t_3 –корни кубического уравнения, то симметрическая система имеет шесть решений, получаемых всевозможными перестановкой этих чисел $(t_1,t_2,t_3),(t_1,t_3,t_2),(t_2,t_1,t_3),(t_2,t_3,t_1),(t_3,t_2,t_1),(t_3,t_1,t_2)$ и не имеет других решений». Верна и обратная теорема.

Замечание 1.3.1. К системе и её решению сводятся системы, среди уравнений которых имеется сумма натуральных степеней переменных. В этом случае используются формулы сокращённого умножения, например,

$$x^2+y^2+z^2=\left(x+y+z\right)^2-2(xy+xz+yz);$$

$$\left(x+y+z\right)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz$$

и т.д.

Пример 1.3.7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-4, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

Решение. Применим последнюю формулу из вышестоящего замечания для преобразования последнего уравнения системы

$$\left(x+y+z\right)^3=x^3+y^3+z^3+3(x+y+z)(xy+xz+yz)-3xyz;$$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=\left(x+y+z\right)^3-3(x+y+z)(xy+xz+yz)+3xyz;$$

$$\Rightarrow 1=1^3-3\cdot1\cdot(-4)+3xyz;$$

$$\Rightarrow xyz=-4.$$

И тогда первоначальная система принимает вид:

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ xy+xz+yz=-4, \\ xyz=-4. \end{cases}$$

$$a=1, b=-4, c=-4,$$

тогда кубическое уравнение имеет вид

$$t^3-t^2-4t+4=0.$$

Для его решения применяем теорему Безу и схему Горнера: $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = -2$.

Ответ: $(1,2,-2),(1,-2,2),(2,1,-2), (2,-2,1),(-2,1,2),(-2,2,1)$.

9. *Нелинейные системы алгебраических уравнений, левая часть одного из которых представляется в виде произведения.*

Предположим, что дана система

$$\begin{cases} f_2(x_2,.....,x_n) = 0, \\ f_3(x_2,.....,x_n) = 0, \\ ... \\ f_m(x_2,.....,x_n) = 0 \end{cases}$$

И пусть левая часть одного из уравнений системы (для определённости – первого) разлагается в произведение нескольких множителей. Это означает, что исходная система равносильна совокупности систем, в которые вместо первого уравнения входят уравнения, представляющие собой равенство нулю одного из множителей.

Не всегда пути решения линейных систем алгебраических уравнений приводят к решению нелинейных систем. Это связано с тем, что применением рассмотренных приёмов решение исходной системы сводится к решению одного или нескольких алгебраических уравнений с одним неизвестным, степени не ниже второй. Такие уравнения не всегда решаются в радикалах. Это, в частности, может быть тогда, когда решения системы уравнений с числовыми коэффициентами записываются с помощью радикалов в виде довольно сложных выражений и для практического применения приходится находить приближённые значения этих выражений. Решение удаётся найти в ряде случаев с использованием некоторых искусственных приёмов, выбор которых основан на каких-либо особенностях исходной системы.

Помимо рассмотренных видов систем и способов их решения, в некоторых случаях нелинейные (впрочем, как и линейные) системы можно решать графически. Этот способ используется как самостоятельный или как выход из сложившейся ситуации – когда решить систему аналитически крайне трудно. В последнем случае решение находится приближённо и чаще с весьма ограничительной степенью точности. Повысить степень точности позволяют неэлементарные методы, которые мы в рамках данного пособия не рассматриваем.

Итак, для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными графически нужно построить в одной и той же системе координат кривые, соответствующие уравнениям системы и найти точки пересечения этих кривых. Координаты каждой точки пересечения образуют решение исходной системы. В большинстве случаев построение требуемой кривой значительно упрощается в случае, когда уравнение можно решить относительно одного из неизвестных или если оба неизвестных могут быть заданы как функции одной и той же вспомогательной переменной.

Графические методы решения позволяют найти, как правило, грубо приближённые решения. Если требуется большая точность, то найденные решения уточняют (для этого применяют различные методы). Кроме того, если система легко решается аналитически, то нет смысла решать её графически.

Системы трёх уравнений с тремя неизвестными решаются в основном с использованием искусственных приёмов.

Рассмотрим подробно решение*линейных* систем уравнений.

Система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}, \text{ где } a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$$

называется *линейной*.

Основные методы решения линейных систем:

- метод подстановки;
- метод сравнения;
- метод исключения неизвестных (сложения, Гаусса);
- метод определителей (Крамера);
- метод Безу (метод неопределённых множителей).

В общем случае решением данной системы является пара чисел

$$x = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}, y = \frac{a_2c_1 - a_1c_2}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

Возможны случаи:

1) если $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$, а $a_2c_1 - a_1c_2 \neq 0$, в этом случае система не имеет решений;

2) если $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ и $a_2c_1 - a_1c_2 = 0$, в этом случае система имеет бесконечное множество решений $y = t, t \in R, x = \frac{c_1 - b_1t}{a_1}$;

3) если $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$, то система имеет единственное решение.

Система двух уравнений с двумя неизвестными называется приведённой, если оба коэффициента при одном и том же неизвестном равны 1, т.е.

$$\begin{cases} x + \frac{b_1}{a_1}y = \frac{c_1}{a_1}; \\ x + \frac{b_2}{a_2}y = \frac{c_2}{a_2}. \end{cases}$$

1. Если в приведённой системе левые части различные, то система имеет единственное решение ($\frac{b_1}{a_1} \neq \frac{b_2}{a_2}$, что при графической интерпретации означает пересечение заданных уравнениями системы прямых).
2. Если в приведённой системе левые части равны, а правые нет, то система решений не имеет (прямые параллельны).
3. Если в приведённой системе левые и правые части равны, то система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).

Рассмотрим систему из двух линейных уравнений с двумянеизвестными x, y:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Квадратная таблица чисел называется квадратной матрицей второго порядка

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}.$$

Запись такой таблицы обычно заключают в круглые скобки.

Заметим, что числа в этой таблице – это коэффициенты при неизвестных из данной системы. Она называется матрицей системы (матрицей коэффициентов системы).

Обозначим через X матрицу-столбец из неизвестных, т. е. $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, а через C матрицу-столбец свободных членов (правых частей уравнений из данной системы), т.е. $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, тогда система линейных уравнений может быть записана в виде: $M \cdot X = C$, который называется *матричной записью системы линейных алгебраических уравнений*.

Если матрица M квадратная, то и систему линейных уравнений называют *квадратной*; если $C = 0$, то систему называют *однородной* системой линейных уравнений.

Формально всю информацию о системе линейных уравнений (кроме обозначений неизвестных) сохраняет матрица

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1: & c_1 \\ a_2 & b_2: & c_2 \end{pmatrix},$$

называемая *расширенной матрицей* системы. В записи расширенной матрицы системы применяют разделитель – вертикальную черту, отделяющую столбец правых частей уравнений от матрицы коэффициентов.

Для решения системы линейных уравнений применяют *метод Гаусса* (метод исключения неизвестных). Процедура исключения неизвестного такова. В системе определяется уравнение, в котором есть неизвестное с ненулевым коэффициентом, это уравнение объявляется ведущим, а неизвестное, подлежащее исключению – главным. Ведущее уравнение с помощью преобразования ставится на первое место, а затем с помощью ведущего уравнения преобразованиями, состоящими в умножении уравнения на число и сложении его с ведущим уравнением, главное неизвестное исключается из остальных уравнений.

Процесс применения процедуры исключения обрывается за конечное число шагов, так как число уравнений и неизвестных конечно, а ведущие уравнения и главные неизвестные предыдущих шагов выбывают из рассмотрения на каждом следующем шаге.

В процессе исключения неизвестных одновременно с исключением одного неизвестного из уравнения может исключиться сразу несколько неизвестных или сразу все неизвестные: $0x+0y=0$ или $0x+0y=c$. В первом случае уравнение превращается в тождество и его можно опустить в системе, а во втором случае уравнение превратилось в неверное числовое равенство, что означает несовместность системы.

Определителем (или детерминантом) квадратной матрицы *M* называется число, равное сумме произведений элементов матрицы, взятых по одному и только одному из каждой строки и каждого столбца, так, для матрицывторого порядка в эту сумму входят:

1) произведение элементов главной диагонали со своим знаком a_1b_2;

2) произведение элементов побочной диагонали с противоположным знаком a_2b_1.

Символически записывают:

$$\det \mathrm{M}=\begin{vmatrix} a_1 & \mathrm{b}_1 \\ a_2 & \mathrm{b}_2 \end{vmatrix}=a_1\mathrm{b}_2-a_2\mathrm{b}_1.$$

Применение определителей позволяет решить систему линейных уравнений ещё одним способом – по правилу Крамера.

Определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

называется *определителем системы* (главным определителем системы).

Составим также определители Δ_x и Δ_y, каждый из которых получается из определителя Δ путём замены соответствующего позиции переменной столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

Теорема (Крамера). Если определитель системы двух линейных уравнений с двумя переменными отличен от 0, то система имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Замечание 1.3.2. Если Δ=0, то систему по правилу Крамера решить нельзя.

Замечание1.3.3. Правило Крамера применимо к системам линейных уравнений малых размеров ($n = 2,3$), а для больших n следует применять метод Гаусса.

Для системы трёх линейных уравнений с тремя неизвестными правило работает аналогично.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Определитель считается по, так называемому, «правилу треугольников» (либо поправилу Саррюса), согласно которому нужно сложить:

1) произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, образующих треугольники с основаниями, параллельными главной диагонали, со своими знаками, т.е. $a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1$;

2) произведение элементов побочной диагонали и произведение элементов, образованных треугольниками с основаниями, параллельными побочной диагонали, с противоположными знаками, т.е. $-a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - a_2b_1c_3$.

$$det\ \mathrm{M} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - a_2b_1c_3.$$

Пример 1.3.8. Решить систему

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ 2x + 3y + 4z = -1, \\ 3x + 4y + 6z = -1. \end{cases}$$

Решение. Составим и найдём главный определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 6+2\cdot 4\cdot 3+2\cdot 4\cdot 3-3\cdot 3\cdot 3-4\cdot 4\cdot 1-2\cdot 2\cdot 6=-1.$$

$\Delta \neq 0$, значит систему можно решать по правилу Крамера.

Находим Δ_x, Δ_y и Δ_z:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix} = -1\cdot 3\cdot 6 + 2\cdot 4\cdot(-1) + (-1)\cdot 4\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot(-1) - 4\cdot 4\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot 6 = -1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot 6 + 3\cdot 4\cdot(-1) + (-1)\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot 6 = 1,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -1\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 2\cdot 4 - 3\cdot 3\cdot(-1) - 4\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot(-1)\cdot 2 = 0.$$

Тогда $x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{-1} = 0.$

Ответ: $(1;-1;0)$.

Метод Безу (*метод неопределённых множителей*) оказывается полезным в том случае, когда не требуется находить значения всех неизвестных системы линейных уравнений, а надо отыскать лишь значение одной из них.

Пример 1.3.9. Методом Безу найти значение переменной z из представленной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + 2z = 68, \\ 2x + 3y + 3z = 82, \\ x + y + 2z = 40. \end{cases}$$

Решение. Умножим первое уравнение системы на m, второе – на n, а третье уравнение оставим без изменений, получим новую систему уравнений

$$\begin{cases} 3x\cdot m + 2y\cdot m + 2z\cdot m = 68\cdot m, \\ 2x\cdot n + 3y\cdot n + 3z\cdot n = 82\cdot n, \\ x + y + 2z = 40. \end{cases}$$

Далее получим следствие этой системы, сложив почленно все её выражения в левой и правой частях соответственно:

$$(3m + 2n + 1)\cdot x + (2m + 3n + 1)\cdot y + (2m + 3n + 2)\cdot z = 68m + 82n + 40 \qquad (*)$$

Так как нам необходимо найти значение неизвестной z, положим коэффициенты, стоящие перед x и y в формуле (*), равными нулю.

В таком случае нам предстоит решить линейную систему, включающую в себя два уравнения с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3m + 2n + 1 = 0, \\ 2m + 3n + 1 = 0. \end{cases}$$

Получим уравнение следствие последней системы $5m+5n = -2$ (здесь мы почленно сложили буквенные выражения и числовые, перенеся их в правую часть равенства).

Очевидно, что

$$m+n=-\frac{2}{5}, m=-\frac{2}{5}-n.$$

Составим новую систему из двух уравнений, равносильную последней системе

$$\begin{cases} m=-\frac{2}{5}-n, \\ 2m+3n+1=0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=-\frac{2}{5}-n, \\ 2\cdot\left(-\frac{2}{5}-n\right)+3n=-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=-\frac{2}{5}-n, \\ -\frac{4}{5}-2n+3n=-1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=-\frac{2}{5}-n, \\ n=-\frac{1}{5}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} m=-\frac{1}{5}, \\ n=-\frac{1}{5}. \end{cases}$$

Найденные значения mи nподставим в формулу (*), получим:

$$0\cdot x+0\cdot y+\left(-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+2\right)\cdot z=68\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+82\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+40.$$

Далее будем иметь:

$$z=-\frac{68}{5}-\frac{82}{5}+40,$$

$$z=-\frac{150}{5}+40,$$

$$z=-30+40,$$

$$z=10.$$

Ответ: $z=10$.

ГЛАВА II.ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 2.1. Текстовые задачи на составление уравнений или систем уравнений. Основные понятия и определения

В текстовых задачах соотношения между искомыми величинами, числовыми данными и переменными (при решении задач в общем виде) задаются не в виде готовых формул, а устанавливаются из условия задачи, сформулированного словесно.

Искомые величины, или другие величины, зная которые, можно определить искомые, обозначенные буквами – эти величины называются *неизвестными*. Все независимые между собой соотношения между данными и неизвестными величинами либо непосредственно сформулированные в условии (в словесной форме), либо вытекающие из смысла задачи (например, физические законы, которым подчиняются рассматриваемые величины), либо следующие из условия путём некоторых рассуждений, записанные в виде равенств и неравенств. То есть, составляется одно или несколько соотношений (уравнений и неравенств) с данными неизвестными.

Таким образом, решение задачи сводится к решению полученной системы соотношений (уравнений, неравенств) в некотором числовом поле при определённых дополнительных условиях. Последними условиями из множества всех решений полученных уравнений (неравенств) выделяются те решения, для которых значения неизвестных (в соответствии с их конкретным смыслом) являются дополнительными. То есть, согласно смысла величин, входящих в условие задачи, не каждый корень уравнения (уравнений), составленного по условию задачи, обязательно должен оказаться решением самой задачи.

Если утверждения, на основании которых были составлены уравнения (неравенства) неприменимы в некоторых «особенных» случаях, то эти случаи следует рассматривать отдельно. Обычно это случаи, отражающие условия, при которых система, уравнение или неравенство, составленное по условию задачи, не имеет решений, имеет бесконечно много решений. Нередко в исследование задачи включаются дополнительные вопросы, относящиеся к конкретному истолкованию решения. Например, при каких условиях неизвестное положительно (если неизвестное обозначает величину, значения которой можно отсчитывать в двух противоположных направлениях) или отрицательно.

📖**Определение 2.1.1.***Текстовой задачей* называется описание некоторой ситуации (ситуаций) на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие, определить вид отношения.

Любая текстовая задача состоит из двух частей: условия и требования (вопроса).

В условии собираются сведения об объектах и некоторых величинах, характеризующих данные объекты, об известных и неизвестных значениях этих величин, об отношениях между ними.

Требование задачи – это указание того, что нужно найти. Оно может быть выражено предложением в повелительной или вопросительной форме.

Задачи могут быть с недостающей или избыточной информацией.

В теории и методике выделяют четыре этапа в решении текстовых задач:

1) восприятие и анализ содержания задачи;
2) поиск и составление плана решения;
3) выполнение плана решения и формулировка выводов о выполнении требования задачи;
4) проверка решения и устранение ошибок (если они есть).

На первом этапе очень важна переформулировка с разбиением текста на смысловые составные части.

Второй этап может проводиться по чертежу или по схематической записи.

Третий этап: а) составление выражения по условию и нахождение его значения; б) запись по действиям с пояснениями; в) запись каждого пункта с соответствующим арифметическим действием; г) запись вопроса и соответствующих действий.

Решить задачу – значит через логически выверенную последовательность действий и операций с имеющимися в задаче явно или косвенно числами, величинами, отношениями выполнить её требование.

Способы решения задач:

1) *арифметический* (вопрос–действие, действие – пояснение, числовое решение без комментариев);
2) *алгебраический* (составление уравнения – перевод задачи с естественного языка на язык формул с последующим упрощением связи между данными и искомыми числами);
3) *графический*;
4) *практический*.

Способов решения сложных чисто арифметических задач обыкновенно различают два: аналитический (отправляемся от вопроса к условиям общими рассуждениями) и синтетический (отправляются от частностей задачи к решению её вопроса).

Пример 2.1.1. Мотоциклист должен был проехать расстояние между пунктами в 600 км со скоростью 30 км/ч. Но в дороге он задержался на 4 часа. Чтобы вовремя прибыть на место назначения, он вдвое увеличил скорость после остановки. На каком расстоянии от начала движения произошла остановка?

Решение (арифметический способ).

1) Сколько часов требовалось мотоциклисту первоначально? $600:30=20$ (ч.)
2) Сколько часов затрачено на переезд реально? $20-4=16$ (ч.)
3) Сколько проехал бы мотоциклист за 4 часа, если бы продолжал двигаться с первоначально запланированной скоростью? $4\cdot 30=120$ (км.)
4) Каково время движения с увеличенной скоростью? $\frac{120}{60-30}=4$ (ч.)
5) Каково время движения с первоначальной скоростью? $16-4=12$ (ч.)
6) На каком расстоянии от начала движения произошла остановка? $30\cdot 12=360$ (км.)

Ответ: на расстоянии 360 км.

Чтобы решить задачу алгебраическим способом, нужно:

- выбрать одну из неизвестных величин задачи и обозначить её буквой, составить уравнение, содержащее эту неизвестную;
- решить получившееся уравнение;
- выяснить, удовлетворяет ли каждое из получившихся решений уравнения условиям задачи.

При алгебраическом способе решения задач следует обращать внимание на согласованность выражения величин в тех или иных единицах. Так, выражению расстояния в километрах должен соответствовать час для выражения времени, если объём выражен в кубических метрах, то вес – в тоннах и т.д.

Заметим, что алгебраический способ решения предложенной выше задачи довольно прост, по сравнению с предложенным арифметическим. В частности, в третьем действии применён приём замещения реальной ситуации.

Решение (алгебраический способ).

Пусть до остановки мотоциклист проехал *x* км. Тогда после остановки – *(600-x)* км.

Получаем уравнение:

$$\frac{600}{30}=\frac{x}{30}+4+\frac{600-x}{60}.$$

Решая его, получаем, что *x=360* км.

Аналитический способ приводит нас к ряду действий, подлежащих выполнению.

Синтетический приём решения задач требует быстрой оценки двух условий вопроса, которые можно разрешить на их основании, и быстрой оценки того, насколько ответ на эти вопросы нужен нам для решения главного вопроса задачи.

Аналитический способ решения имеет свои трудности:

- разумная запись условия задачи и понимание его смысла и связей элементов;
- выработка и установка твёрдого и определённого плана решения;
- чистое и аккуратное выполнение работы.

Синтетический способ решения может отвлечь внимание учеников от необходимых действий и привести их к действиям, для решения задачи даже ненужным. Но этот способ иногда быстрее аналитического приводит к цели.

Аналитический способ требует значительной тонкости ума и власти над рассуждениями, исходящими из общих соображений.

Часто при решении задач целесообразно ввести чертёж-рисунок: отрезок прямой, прямоугольник, круг.

Текстовые задачи делятся на типы, которые определяют и методику их решения.

2.1.1. Задачи на движение

Уравнения, которые составляются на основании условий задач на движение, обычно содержат такие величины, как расстояние, скорости движущихся объектов, ускорение (при равноускоренном движении), время, а также скорость течения воды (при движении по реке).

При решении таких задач для различных типов движения делаются определённые допущения.

1) равномерное движение по прямой
   a) движение на отдельных участках считается равномерным, а пройденный путь определяется по формуле $S = vt$;
   b) повороты движущихся тел считаются мгновенными, скорость при этом также меняется мгновенно;
   c) скорость всегда считается величиной положительной;
   d) скорость движения объекта по течению есть сумма собственной скорости и скорости течения, против – разность этих величин;
   e) если речь идёт о движении плотов, то считают, что плот имеет ту же скорость, что и течение реки;
   f) при движении навстречу друг другу время встречи вычисляется по формуле $t = \frac{S}{v_1+v_2}$, если одно тело догоняет другое – время встречи $t = \frac{S}{v_1-v_2}$ (два наиболее часто встречающихся случая при решении задач на движение).
2) равномерное движение по окружности

a) время встречи при движении в противоположных направлениях
$$t = \frac{s}{v_1+v_2}, \text{ в одном } t = \frac{s}{v_1-v_2};$$
b) при движении в одном направлении независимо от того, на каком круге одно тело догоняет первый раз второе и сколько прошло времени, считается, что первое тело (с большей скоростью) прошло только на один круг больше, на $S = 2\pi r$, чем второе (если в условии задачи специально не оговорены ситуации, при которых существенен второй, третий и т.д. обгоны).

3) движение с ускорением

a) пройденный путь определяется по формуле
$$S = v_0 t + a\frac{t^2}{2}, a = \frac{v-v_0}{t}, v = v_0 t;$$
b) считается, что движение либо равноускоренное (a>0), либо равнозамедленное (a<0).

При решении таких задач рекомендуется сделать рисунок, отображающий все условия задачи: динамику движения, встречи, остановки и повороты. При этом необходимо выбрать схему решения, то есть установить: какого вида уравнение составлять, что сравнивать, время на отдельных участках пути или пройденный каждым объектом путь. Хорошо выполненный чертёж позволяет не заглядывать в условие задачи.

Характерно, что в задачах на движение часто удаётся составить уравнений меньше, чем неизвестных. В этом случае необходимо внимательнее прочитать условие. Например,если для двух движущихся тел введены неизвестные S, v_1, v_2, а требуется найти время, за которое эти два объекта проходят путь S, и удалось составить только два уравнения, то, разделив эти уравнения на Sили v_1, вводя новые неизвестные ($u = \frac{s}{v_1}$, $v = \frac{s}{v_2}$или$u = \frac{s}{v_1}$, $v = \frac{v_2}{v_1}$ и т. п.), приходим к двум уравнениям с двумя неизвестными.

В подобных случаях эффективным является также графический способ решения.

Кроме того, если в условии задачи нет величин, имеющих размерность длины, то расстояние можно обозначить за 1 (единицу измерения длины).

Стоит сделать важную оговорку: если при выборе неизвестных какая-либо величина принимается за единицу, то необходимо убедиться, что все встречающиеся в условии задачи величины с той же размерностью выражены как доли единицы.

Пример 2.1.2. Две старушки вышли одновременно навстречу друг другу из двух городов. Они встретились в полдень и достигли чужого города: первая – в 4 часа пополудни, вторая – в 9 часов пополудни. Узнать, когда они вышли из своих городов?

Решение.
I способ (графический):

Пусть $p(x)$ – зависимость пройденного первой старушкой пути от времени x, $q(x)$ –второй старушкой. Построим графики этих соответствий на координатной плоскости.

Время, за которое первая старушка пройдет путь AB равно длине отрезка AG, а также равно длине отрезка BC; а время, затраченное второй старушкой на этот же путь равно длине отрезка AD. Таким образом, задача сводится к нахождению длин отрезков BC и AD. Обозначим длину отрезка AE через x, $AE = x = BF$.Соответственно, $FC=4$, $ED=9$, абсцисса точки O соответствует полудню.

Треугольники COF и AOE(рис. 1) подобны по двум углам.

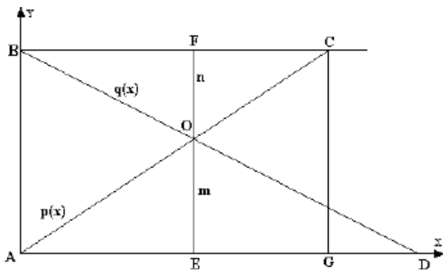

Рис. 1

Из подобия следует равенство

$$\frac{AE}{FC}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow\frac{4}{x}=\frac{n}{m}.$$

Треугольники DOE и BOF подобны по двум углам. Из их подобия вытекает следующееравенство:

$$\frac{BF}{ED}=\frac{m}{n}\Leftrightarrow\frac{x}{9}=\frac{n}{m}.$$

Тогда, учитывая, что правые части двух последних равенств одинаковые, приравняем друг к другу левые части:

$$\frac{x}{9}=\frac{4}{x}\Rightarrow x^2=36\Rightarrow x=6.$$

Это, в свою очередь, означает, что от выхода старушек до полудня прошло 6 часов, а, значит, и вышли они в 6 часов (утра).
Ответ: в 6 часов.

II способ (аналитический):

Пустьv_1и v_2 – скорости движения первой и второй старушек соответственно; $x=t_1=t_2$ – время, затраченное старушками до встречи; S_1 и S_2– пути, пройденные до встречи первой и второй старушками соответственно (тогда S_2иS_1 – пути, пройденные после встречи первой и второй старушками соответственно; t_3=4и t_4=9–время, затраченное старушками на преодоление оставшегося пути после встречи.

Далее составим и заполним таблицу

Процесс	*Скорость*	*Время*	*Расстояние*	*Условие*
Движение первой старушки до встречи	v_1	$t_1 = \frac{s_1}{v_1}$	S_1	$t_1 = t_2 = x$
Движение второй старушки до встречи	v_2	$t_2 = \frac{s_2}{v_2}$	S_2	$t_1 = t_2 = x$
Движение первой старушки после встречи	v_1	$t_3 = 4 = \frac{s_2}{v_1}$	S_2	$t_4 - t_3 = 5$
Движение второй старушки после встречи	v_2	$t_4 = 9 = \frac{s_1}{v_2}$	S_1	$t_4 - t_3 = 5$

Тогда, т.к. $4 = \frac{s_2}{v_1}$, то $s_2 = 4v_1$ и $9 = \frac{s_1}{v_2}$, то $s_1 = 9v_2$.

Используя две первые строки таблицы и подставив выраженные значения участков пути, получим

$$\frac{9v_2}{v_1} = \frac{4v_1}{v_2} \Rightarrow 4v_1^{\ 2} = 9v_2^{\ 2} \Rightarrow \frac{9}{4} = \frac{v_1^{\ 2}}{v_2^{\ 2}} \Rightarrow \frac{9}{4} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{3}{2}v_2, v_2 = \frac{2}{3}v_1$$

Затем вновь воспользуемся условием в одной из двух последних строк (например, в третьей)

$$4 = \frac{s_2}{v_1} = \frac{s_2}{\frac{3}{2}v_2} = \frac{2}{3}x \Rightarrow x = 6$$

Ответ: в 6 часов.

III способ (аналитический): пусть *S*, *v_1*и*v_2*, *x* – расстояние между городами, скорости движения старушек и время, прошедшее от начала движения соответственно.

Тогда по условию задачи можно составить систему уравнений

$$\begin{cases} (12-x)\cdot v_1 + (12-x)\cdot v_2 = S, \\ (12-x)\cdot v_1 + 4v_1 = S, \\ (12-x)\cdot v_2 + 9v_2 = S \end{cases}$$

Это система трёх уравнений с четырьмя неизвестными. Согласно общим положениям, такая система решений не имеет, за исключением особых случаев, рассматривая которые можно, если и не найти значение всех переменных, то найти значение одной требуемой.

Для решения системы вводим новые неизвестные, равные отношениям исходных:

$$a = \frac{v_2}{v_1}, b = \frac{s}{v_1}.$$

Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} 12 - x + (12 - x) \cdot a = b, \\ 12 - x + 4 = b, \\ (12 - x) \cdot a + 9a = b \end{cases}$$

Решая её, получаем

$$\begin{cases} (12 - x) \cdot (1 + a) = b, \\ b + x = 16, \\ (21 - x) \cdot a = b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12 - x = 9a, \\ (12 - x)a = 4, \\ b + x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6, \\ a = \dfrac{2}{3}, \\ b = 10 \end{cases}$$

Для ответа нам необходимо только значение x.

Ответ: в 6 часов.

В задачах на движение в качестве неизвестных обычно бывает удобно выбирать расстояние (если оно не задано) и скорости движения объектов.

<u>Пример 2.1.3</u>. Три велосипедиста, стартовав одновременно с одного места и в одном направлении, едут по кругу длиной 1 км. Через некоторое время второй впервые догоняет первого, 4 минуты спустя в ту же точку прибывает третий, проехав такое же расстояние, какое проехал первый к моменту встречи со вторым. Скорости велосипедистов в некотором порядке образуют арифметическую прогрессию с разностью 5 км/ч. Найдите эти скорости.

<u>Решение.</u> При решении задачи будем использовать дополнительные сведения об арифметической прогрессии(с. 49 настоящего пособия).Очевидно, здесь это не является целью, прогрессия – средство, с помощью которого задана арифметическая зависимость между искомыми величинами – скоростями. Зависимость отправляет нас к своду формул, с помощью которых мы можем вместо трёх неизвестных ввести одну.

Итак, пусть искомые скорости v_1, v_2, v_3.Эти величины образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 5\, км/ч$. Кроме того, из условия задачи следует, что $v_1 < v_2$.Второй велосипедист обходит первого только на один круг, длина которого равна 1 км, к моменту их встречи, значит время, прошедшее до момента их встречи:

$$t = \frac{1}{v_2 - v_1}.$$

За это время первый велосипедист проходит путь

$$s = v_1 t = \frac{v_1}{v_2 - v_1}.$$

Заметим, что это же расстояния преодолевает и третий велосипедист, но с опозданием в 4 минуты, то есть за время $t+\frac{1}{15}(ч)$.

Тогда

$$\frac{v_1}{v_2-v_1}=v_3\cdot\left(\frac{1}{v_2-v_1}+\frac{1}{15}\right),\Rightarrow\frac{v_1-v_3}{v_2-v_1}=\frac{v_3}{15}.$$

Так как правая часть в последнем уравнении положительна, то, при условии равенства частей, левая также должна быть положительной. Знаменатель положителен, так как $v_1<v_2$.

Значит, и числитель должен иметь тот же знак, то есть $v_1>v_3$.

Итак, соотношение между величинами скоростей $v_2>v_1>v_3$.

Тогда v_3 - первый член арифметической прогрессии и

$$v_1=v_3+5(км/ч), v_2=v_1+5(км/ч)=v_3+10(км/ч),$$

а это означает

$$\frac{v_1-v_3}{v_2-v_1}=\frac{v_3+5-v_3}{v_3+10-(v_3+5)}=\frac{v_3}{15},\Rightarrow 1=\frac{v_3}{15},\Rightarrow v_3=15(км/ч).$$

Отсюда находим и оставшиеся скорости (второй и третий члены арифметической прогрессии: $v_2=25(км/ч), v_1=20(км/ч)$.

Ответ: *25 км/ч, 20 км/ч, 15 км/ч*.

К типологии задач «на движение» относят также и задачи, в которых кто-либо выполняет какую-либо работу, или задачи на заполнение/опорожнение резервуаров. В этом случае вся работа или полный объём резервуара играют роль расстояния, а аналогами скорости движения являются производительности.

2.1.2. Задачи на совместную работу и производительность

Задачи этого типа содержат обычно сведения о выполнении несколькими субъектами (рабочими, механизмами, насосами и т.д.) некоторой работы, объём которой не указан и не является искомым (печать рукописи, изготовление деталей, рытьё траншей, заполнение водоёмов через трубы и т. д.). предполагается, что выполняемая работа производится равномерно, то есть с постоянной для каждого субъекта производительностью. Объём всей работы принимается за 1.При этом используют формулу $\mathrm{p}=\frac{1}{t}$.

Если несколько субъектов работают вместе, то складываются производительности (мощности) p, а не время t.

К задачам на работу можно с очевидными изменениями отнести часто встречающиеся задачи на перекачивание жидкости насосами. В качестве производимой работы в этом случае удобно рассматривать объём перекачанной воды.

<u>Пример 2.1.4</u>. (*задача Л.Н. Толстого)* Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились. Одна половина осталась косить большой луг, а другая перешла на малый, вдвое меньше первого, но не успела к концу дня закончить работу. Назавтра на этот луг вышел один косец и докосил его. Сколько было косцов? (Считать производительность косцов одинаковой, а объём выполненной за день работы равным 1)

<u>Решение</u>. На большом луге за первую половину дня выкошено $\frac{2}{3}$ его площади.На малом за вторую половину дня (за первый день) – $\frac{1}{2}$ его площади или $\frac{1}{3}$ площади большого луга.Всего за первый день выкошено $\frac{4}{3}$ площади большого луга или 1 (согласно дополнению к условию задачи).

На следующий день осталось выкосить $\frac{1}{3}$ площади малого луга или $\frac{1}{6}$ площади большого.

Обратимся вновь к дополнительному условию о том, что объём выполненной за день работы считается равным 1, составив необходимую пропорцию, получаем, что $\frac{1}{6}$ площади большого луга в этом случае соответствует

$$\frac{4}{3} - 1$$
$$\frac{1}{6} - x$$

Отсюда,$x = \frac{1}{8}$. Это тот объём работ, который предполагалось выполнить на следующий день на втором луге и это же производительность одного косца. Значит, косцов было 8.

Ответ: 8 косцов.

<u>Замечание 2.1.1.</u> Если не учитывать условия в скобках (см. текст задачи), то ответ не однозначен.

2.1.3. Задачи на планирование

К задачам этого типа относят задачи, в которых выполняемый объём работы известен или его нужно определить. При этом используют известную формулу для нахождения работы.

<u>Пример 2.1.5.</u> Машинистка рассчитала, что если она будет печатать ежедневно на 2 листа больше установленной для неё нормы, то закончит работу ранее намеченного срока на 3 дня. Если же она будет печатать по 4 листа сверх нормы, то окончит работу на 5 дней ранее срока. Сколько листов она должна была перепечатать и в какой срок?

<u>Решение.</u> Пусть производительность работы машинистки – x листов в день, y дней – первоначально установленный срок для выполнения работы.

Тогда, согласно условию задачи, увеличение производительности повлекло уменьшение срока выполнения работы. Составляем систему уравнений:

$$\begin{cases}(x+2)\cdot(y-3)=xy,\\(x+4)\cdot(y-5)=xy,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+2y-3x-6-xy=0,\\xy+4y-5x-20-xy=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2y-3x=6,\\4y-5x=20.\end{cases}$$

Решая последнюю систему любым из способов – сложения, подстановки, по правилу Крамера, получаем: $x=8,\ y=15$.

Кроме первоначально планируемого срока окончания работы, согласно требованию задачи, нужно найти объём работы, количество листов:

$$xy=120\,(листов).$$

Ответ: *8 дней, 120 листов*.

2.1.4. Задачи на прогрессии и ряды

Арифметическая прогрессия – это последовательность элементов (чисел), в которой каждый элемент, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же постоянным числом $d(d\neq 0)$, называемым *разностью прогрессии*.

$a_n = a_1 + (n-1)d = a_{n-1} + d$

Свойства:

1)$a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}, k \geq 2$; т.е., у конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноотстоящих от концов, равна сумме крайних членов (характеристическое свойство арифметической прогрессии);

2) $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$;

3) $S_n = \frac{a_1+a_2}{2}n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2}n$.

Геометрическая прогрессия – это последовательность элементов (чисел), в которой каждый элемент, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же постоянное число$q\,(q\neq 0, q\neq \pm 1)$, называемым *знаменателем прогрессии*.

$b_n = b_1 q^{n-1} = b_{n-1}q$

Свойства:

1) ${b_k}^2 = b_{k-1}b_{k+1}, k \geq 2$ или если члены прогрессии положительны, то $b_k = \sqrt{b_{k-1}b_{k+1}}$ (характеристическое свойство геометрической прогрессии);

2)$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n$; т.е., у конечной геометрической прогрессии произведение членов, равноотстоящих от концов, равно произведению крайних членов;

3) $S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q}, q \neq 1$; $S_n = nb_1, q = 1$; $S = \frac{b_1}{1-q}, |q| < 1$.

На практике встречаются как «чистые» задачи на один из видов прогрессий, так и смешанные задачи, в которых обе прогрессии присутствуют одновременно.

<u>Пример 2.1.6.</u> Три числа, составляющих арифметическую прогрессию, дают в сумме 15. Если к ним прибавить соответственно 1, 4, 19, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

<u>Решение.</u> Обозначим числа, составляющие арифметическую прогрессию a, b и c. Тогда, $c = a + 2d = b + d$, где d – разность арифметической прогрессии. Кроме того, согласно характеристического свойства арифметической прогрессии, имеем:

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

Сумма членов этой прогрессии

$$15 = a + b + c = 3a + 3d, \Rightarrow a + d = 5, \Rightarrow b = 5.$$

Тогда

$$5 = \frac{a+c}{2}, \Rightarrow a + c = 10.$$

Далее, $a+1,\ b+4,\ c+19$ составляют геометрическую прогрессию. Применим характеристическое свойство геометрической прогрессии:

$$(b+4)^2 = (a+1)(c+19).$$

Используем в этом равенстве зависимости между a, b и c как между членами арифметической прогрессии и полученные выше значения bи $a+c$:

$$9^2 = (a+1)(a+2d+19), \Rightarrow 81 = (a+1)(d+24).$$

Получаем систему:

$$\begin{cases} a + d = 5, \\ (a+1)(d+24) = 81. \end{cases}$$

Решая её, получаем $d = 3, a = 2.$

Тогда $c = 8.$

Ответ: 2, 5, 8.

2.1.5. Задачи на зависимости между компонентами арифметических действий

a) задачи, в которых требуется найти сумму, каждое из слагаемых которой составляет о ту или иную часть искомой суммы;

b) задачи, в которых требуется найти сумму, каждое из слагаемых которой пропорционально некоторому числу;

c) задачи на использование стандартного вида числа

$$\mathrm{A} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

(число А имеет $n+1$знак в десятичной записи).

Для успешного решения задач этого типа нужны сведения из теории делимости:

- если при делении натурального числа a на натуральное число b в частном получается q, а в остатке r, то $a = bq + r, (r < b)$;
- если два из трёх натуральных чисел в равенстве $a = b + c$делятся на натуральное число n, то и третье число также делится без остатка на n;
- признаки делимости (часть 1, с. 29-30)
- при делении одного натурального числа N на другое рвозможны случаи: делимость нацело, делимость с остатком (в этом случае в остатке будет одно из чисел – 1,2,3,…,*p*-1);
- метод математической индукции (часть 1, С. 62).

Пример 2.1.7. Если двузначное число разделить на число, написанное теми же цифрами в обратном порядке, то в частном получится 4, а в остатке 15. Если из данного числа вычесть 9, то получится сумма квадратов цифр исходного числа. Найдите это число.

Решение. Пусть искомое число имеет стандартный вид

$$\overline{xy} = 10 \cdot x + y.$$

Число, записанное теми же числами в обратном порядке, будет иметь вид

$$\overline{yx} = 10 \cdot y + x.$$

Запишем первое условие задачи:

$$\overline{xy} = 4 \cdot \overline{yx} + 15$$

или

$$10 \cdot x + y = 4 \cdot (10 \cdot y + x) + 15.$$

После выполнения тождественных преобразований последнее равенство примет вид:

$$2x - 13y = 5.$$

Второе условие задачи запишется следующим образом:

$$10x + y - 9 = x^2 + y^2.$$

В итоге приходим к системе из двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2x - 13y = 5, \\ 10x + y - 9 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

Решая её, например, методом подстановки

$$x = \frac{5 + 13y}{2}$$

во второе уравнение этой системы и после выполнения некоторых элементарных преобразований, получим квадратное уравнение относительно переменной *y*:

$$173y^2 - 134y - 39 = 0.$$

Так как сумма коэффициентов этого уравнения равна 1, то одним из его корней является число $y = 1$. С учетом теоремы Виета ясно, что второй корень является дробным и он не удовлетворяет условию задачи.

Далее найдём x:

$$x = \frac{5+13y}{2} = \frac{5+13\cdot 1}{2} = 9.$$

Таким образом, искомым числом является 91.

Ответ: 91.

Пример 2.1.8. Сейчас мне и Вам вместе 86 лет. Число моих лет составляет 15/16 от возраста, который Вы будете иметь тогда, когда мой возраст составит 9/16 от того числа лет, которое Вы имели бы, если бы дожили до тех лет, что вдвое больше числа моих лет в тот момент, когда я могу быть старше вас вдвое. Сколько мне лет?

Решение. Глядя на обилие условий в формулировке задачи, немудрено запутаться. Поэтому решающий сразу должен выбрать, кто в этой задаче «я», и кто «вы». Если «я» – внук, «вы» – дед, как, судя по нормативам обращения хочется сразу условиться, то переформулировка условия задачи, в частности, последнее условие будет звучать так: «…который вдвое больше числа лет внука в тот момент, когда внук может быть старше деда вдвое». Подобное условие предполагает полное абстрагирование от возможной семейной иерархии и плохо представимо в плане возможного возраста внука.

Опираясь на вышесказанное, положим, что «я» – дед, «вы» – внук. Тогда:

1) в финале многочисленных условий идёт речь о каком-то моменте времени, когда дед будет вдвое старше внука; пусть в этот момент внуку t лет, тогда деду – $2t$лет и дед старше внука на tлет;
2) если будет выполнено предыдущее условие, то есть внук доживёт до возраста, вдвое большего возраста деда в момент времени (описан в пункте 1), то внуку будет $4t$лет; тогда возраст деда будет составлять
$$\frac{9}{16}\cdot t = \frac{9t}{16}\ (лет),$$
тогда внуку будет
$$\frac{9t}{4} - t = \frac{5t}{4}\ (лет);$$
3) сейчас возраст деда составляет
$$\frac{15}{16}\cdot\frac{5t}{4} = \frac{75t}{64}\ (лет),$$
тогда внуку будет
$$\frac{75t}{64} - t = \frac{11t}{64}\ (лет);$$

4) согласно первого условия задачи, мы знаем суммарный возраст

$$86=\frac{75t}{64}+\frac{11t}{64}=\frac{86t}{64},\Rightarrow t=64\,(\textit{года});$$

5) итак, деду

$$\frac{75\cdot 64}{64}=75\,(\textit{лет}),$$

внуку

$$86-75=11\,(\textit{лет}).$$

Ответ: 75 лет («я» – дед).

2.1.6. Задачи на процентный прирост и вычисление сложных процентов

Решение этих задач тесно связано с тремя понятиями: нахождение части от целого, восстановление целого по известной части, нахождение процентного прироста.

Так:

- пусть известна некоторая величина *A* и требуется найти *a%* от неё, тогда $x = A\cdot\frac{a}{100}$;
- пусть известно некоторое число b, составляющее *a%* от неизвестной *A*, тогда $A = b\cdot\frac{100}{a}$;
- пусть некоторая переменная величина *A=A(t)* в начальный момент t_0имеет значение A_0, а в $t_1 - A_1$, тогда абсолютный прирост величины *A* за $t_1 - t_0$ будет равен, относительный прирост $\frac{A1-A0}{A0}$, а процентный прирост $p=\frac{A1-A0}{A0}\cdot 100\%$, отсюда $A_1 = A_0 + A_0\cdot\frac{p}{100} = A_0\cdot(1+\frac{p}{100})$; если же в разные временные промежутки процентные приросты также разные, тогда

$$A_n = A_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right);$$

если же $p_1 = p_2 =\ldots= p$, то

$$A_n = A_0\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^n \text{(формула сложных процентов)};$$

- для нахождения процентного отношения первого числа ко второму нужно
  - разделить первое число на второе, полученное частное умножить на 100 и после записать символ %;
  - разделить второе число на 100, разделить первое число на это частное, поставить после найденного частного символ %;
- для нахождения среднего процента нельзя находить простое среднее арифметическое из чисел, выражающих соответствующие процентные отношения по каждой группе в отдельности не даёт правильного

результата; для нахождения требуемого нужно умножить каждое процентное отношение на число, показывающее числитель соответствующей группы (её вес), а затем сумму всех полученных произведений разделить на сумму числителей (весов) всех групп.

Пример 2.1.9. Банк начисляет 7% годовых. 1 января 2000 г. в этот банк была положена сумма *a* рублей. Найдите размер вклада на 1 января 2005 г., если в течение этого времени процентная ставка оставалась без изменения. С помощью калькулятора выясните, через какое наименьшее число лет сумма вклада увеличится более чем в 2 раза.

Решение. Воспользуемся приведённой выше формулой, получим, что размер вклада на 1.01.2005 года составит

$$a_5 = a \cdot (1+0,07)^5 = 1,07^5 \cdot a.$$

Пусть n – искомое число лет, согласно последнему требованию задачи, тогда

$$1,07^n \cdot a > 2a, \Rightarrow 1,07^n > 2.$$

С помощью калькулятора находим, что $n=11$ (берём целое значение n).

Ответ: $1,07^5 \cdot a$ рублей, 11 лет.

Предложенная выше формула сложных процентов имеет интересное приложение. Во многих областях практики имеются величины, которые испытывают приращение не скачкообразным образом, а меняются непрерывно, так, что их изменение за этап составляет одно и то же количество процентов.

Если же начисление процентов производить в течение каждого этапа не один, а несколько, например, k раз, из расчёта p процентов за этап, то в этом случае каждый раз начисляется $\frac{p}{k}$%и за n этапов начисление процентов произойдёт kn раз. Тогда формула сложных процентов имеет вид

$$A_n(k) = A_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^{k \cdot n}.$$

Здесь $A_n(k)$ – значение величины A в конце k-го этапа при условии, что в течение каждого этапа проценты начислялись k раз.

Интересно то, что неограниченно увеличивая число k и рассматривая непрерывное увеличение величины A, можно прийти к вычислению второго замечательного предела. Тогда окончательный вид рассматриваемой формулы:

$$A_n(k) = \lim_{k \to \infty} \left(A_0 \left(1 + \frac{p}{k \cdot 100}\right)^{kn} \right) = A_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot n}$$

Иногда в задачах встречается понятие «средний процент прироста». Под ним понимают такой постоянный процент прироста, который за n этапов начисление процентов даёт такое же изменение величины A, которое она получает при неравных поэтапных процентах изменения. Средний процент определяется формулой:

$$A_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot \ldots \cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right) = A_0 \cdot \left(1+\frac{q}{100}\right)^n$$

Из последней формулы видно, что средний процент не является средним арифметическим неравных поэтапных процентов изменения. Здесь можно провести аналогию с физическим понятием «средней скорости движения».

2.1.7. Задачи на концентрацию смесей и сплавов

В задачах этого типа основным является понятие концентрации.

Допущения:

1) все рассматриваемые смеси (растворы, сплавы) однородны;
2) не делается различия между литром как единицей ёмкости и единицей массы;
3) общая масса или объём – величина аддитивная (масса целого равна сумме масс частей; заметим, что таким свойством объём со строгой физической точки зрения не обладает).

Используется также известная формула из физики $m = \rho \cdot V$.

Пример 2.1.10. Смесь равных объёмов двух веществ имеет массу $6\frac{2}{13}$ г. Масса второго вещества в смеси равна массе $\frac{52}{7}$ см^3 первого вещества, а плотность второго вещества равна 1 г/см^3. Найти объём каждого вещества в смеси.

Решение.Запишем данные и соответственно вводимые нами обозначения в виде таблицы

	m	**ρ**	**V**
I вещество	m_1	ρ_1	v
II вещество	$\frac{52}{7}\rho_1$	1	v
III (смесь)	$6\frac{2}{13}$	-	2v

Используем аддитивность массы:

$$6\frac{2}{13} = m_1 + m_2,$$

С одной стороны, $m_2 = \frac{52}{7}\rho_1$, ,а с другой – $m_2 = V \cdot 1$, тогда $\frac{52}{7}\rho_1 = V$.

$$\frac{80}{13} = \rho_1\left(V + \frac{52}{7}\right) = \rho_1\left(\frac{52}{7}\rho_1 + \frac{52}{7}\right),$$

$$\frac{52}{7}\rho_1^{\ 2}+\frac{52}{7}\rho_1-\frac{80}{13}=0,$$
$$676\rho_1^{\ 2}+676\rho_1-560=0,$$
$$169\rho_1^{\ 2}+169\rho_1-140=0,$$
$$D=123201=351^2,\Rightarrow \rho_1=\frac{-169+351}{338}=\frac{7}{13},\rho_2<0.$$

Тогда $V=\frac{7}{13}\cdot\frac{52}{7}=4\left(см^3\right)$.

Ответ: $4\,см^3$.

Основная формула: $m=c\cdot M$, где m – масса данного вещества, c– весовая концентрация, M – общая масса смеси. Или: $v=c\cdot V$, где v – объём данного вещества, c– объёмная концентрация, V – общий объём смеси.

Существуют задачи, в которых приходится пересчитывать объёмную концентрацию(c_i) в весовую (k_i)и наоборот. Для этого нужно знать удельные веса компонент, входящих в раствор или сплав. Тогда общий вес находится по формуле $G=V_1\cdot d_1+V_2\cdot d_2$.Здесь d_1,d_2– удельные веса компонент. Тогда весовые концентрации находят по формулам

$$k_1=\frac{V_1\cdot d_1}{V_1\cdot d_1+V_2\cdot d_2}=\frac{c_1\cdot d_1}{c_1\cdot d_1+c_2\cdot d_2}=\frac{c_1\cdot d_1}{c_1\cdot(d_1-d_2)+d_2}$$
$$k_2=\frac{V_2\cdot d_2}{V_1\cdot d_1+V_2\cdot d_2}=\frac{c_2\cdot d_2}{c_1\cdot d_1+c_2\cdot d_2}=\frac{c_2\cdot d_2}{c_2\cdot(d_2-d_1)+d_1}$$

Выделяют два вида задач:

- в случае, когда сливают две смеси с массами m_1и m_2, концентрациями c_1 и c_2и требуется определить массу вещества в смеси и его новую концетрацию, используют формулу

$$c=\frac{c_1m_1+c_2m_2}{m_1+m_2} \qquad (\#)$$

(в условии таких задач встречается один и тот же повторяющийся элемент – смеси чаще состоят из одних и тех же компонентов, отношение которых в получающейся смеси или сплаве требуется определить);

- в случае, когда задан некоторый объём смеси и от него начинают отливать некоторое количество, а затем доливают таким же или другим количеством той же или другой смеси (другой концентрации), эта операция производится несколько раз, необходимо установить жёсткий контроль за количеством вещества и его концентрацией при каждом отливе и доливе(выявление общей закономерности изменения той или иной величины в результате многократно повторяющейся операции).

Если смесь (сплав, раствор) массы m состоит из веществ A, B, C массами m_1, m_2 и m_3, то $\frac{m_1}{m}$,$\frac{m_2}{m}$и $\frac{m_3}{m}$ – концентрации веществ A, B, C соответственно. Тогда сумма концентраций всех составных частей смеси (сплава) равна 100% (или 1):$\frac{m_1}{m}+\frac{m_2}{m}+\frac{m_3}{m}$=1. Заметим, что концентрация – величина безразмерная. И, чтобы структура раствора, сплава или смеси была определена, необходимо знать концентрации всех компонентов, кроме одного.

При составлении уравнений обычно прослеживают содержание какого-нибудь одного вещества из тех, которые сплавлялись или сливались.

<u>Пример 2.1.11</u>. Сколько граммов 30% и 10% растворов кислоты нужно взять, чтобы получилось 600 г. 15% раствора?

<u>Решение</u>.

I способ: используем формулу (#).Пусть *x* г. – масса 30% раствора кислоты, тогда *600-x* г.

Согласно формуле новая концентрация вычисляется так

$$15=\frac{30\cdot x+10\cdot(600-x)}{600}.$$

Заметим, что в формулу не обязательно вводить данные о концентрации частей в виде десятинных дробей. Мы воспользовались записью данных в виде процентов.

Тогда *x=150 г, 600–x=450 г.*

Ответ: 150 г. и 450 г.

Кроме того, задача первого вида имеет решение, если $c\epsilon[c_1;c_2]$ и, если $c\neq c_1$ и $c\neq c_2$, то можно получить сплав или раствор с любым процентным содержанием между c_1 и c_2.

<u>Пример 2.1.12</u>.В сосуд ёмкостью 6 л налито 4 л 70%-го раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же ёмкости налито 3 л 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нём получился *r*%-ный раствор серной кислоты? Найти все *r*, при которых задача имеет решение.

<u>Решение</u>.Пусть из второго сосуда в первый переливают *x* л, тогда по формуле

$$\mathrm{r}=\frac{4\cdot 70+90\cdot x}{4+x}.$$

Тогда

$$\mathrm{r}=\frac{4\cdot 70+90\cdot x}{4+x}=\frac{280+90\cdot x}{4+x}.$$

Выразим *x* из последнего равенства

$$\mathrm{x}=\frac{4r-280}{90-r}.$$

Далее мы должны оценить, в каких пределах может быть *x*. Учитываем, что в первом сосуде не может быть суммарно более 6 л. То есть, максимальное значение *x* – 2 л. Минимальное – мы вообще ничего не перельём, т. е. 0 л. Исходя из этого:

$$\frac{4\cdot 70+90\cdot 0}{4+0}\leq r\leq \frac{4\cdot 70+90\cdot 2}{4+2},$$

$$70\leq r\leq \frac{460}{6}, \text{или } 70\leq r\leq 76\frac{2}{3}.$$

Ответ: в первый сосуд будет перелито $\frac{4r-280}{90-r}$ л, концентрация получившегося раствора может находиться в пределах $(70;76\frac{2}{3})$.

В ряде задач бывает невозможно однозначно найти значения концентраций, но можно отыскать их соотношение, т. е. дать ответ в виде указания частей, которые приходятся на компоненты.

<u>Пример 2.1.13.</u>Имеются три смеси, составленные из трёх элементов А, В, С. В первую смесь входят только элементы А и В в весовом отношении 3:5. Во вторую смесь входят только элементы В и С в весовом отношении 1:2, в третью смесь входят только элементы А и С в весовом отношении 2:3. В каком отношении нужно взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы А, В и С содержались в весовом отношении 3:5:2?

<u>Решение</u>. В условии задачи вместо концентраций фигурируют части. Работать с такими данными будем аналогично данным о процентном содержании и использовать ту же формулу.

Итак, пусть x, yи z кг соответственно по массе взято первой, второй и третьей смести для получения новой (эти значения неотрицательные и не равны нулю одновременно). Учитываем, что:

- соотношение веществ в первой смеси 3:5, следовательно, вещества A в ней 3/8, а вещества B – 5/8 от общей массы (8=3+5);
- соотношение веществ во второй смеси 1:2, следовательно, вещества Bв ней 1/3, а вещества C – 2/3 от общей массы (3=1+2);
- соотношение веществ в третьей смеси 2:3, следовательно, вещества A в ней 2/5, а вещества C – 3/5 от общей массы (5=2+3);
- соотношение веществ во вновь полученной смеси 3:5:2, следовательно, вещества A в ней 3/10, B – 5/10, а C – 2/10 от общей массы (10=3+5+2).

Тогда следим за каждым из трёх веществ отдельно:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{10}=\dfrac{\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}z}{x+y+z}, \\ \dfrac{5}{10}=\dfrac{\frac{5}{8}x+\frac{1}{3}y}{x+y+z}, \\ \dfrac{2}{10}=\dfrac{\frac{2}{3}y+\frac{3}{5}z}{x+y+z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3y+3z=\dfrac{15}{4}x+4z, \\ 5x+5y+5z=\dfrac{25}{4}x+\dfrac{10}{3}y, \\ 2x+2y+2z=\dfrac{20}{3}y+6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+12y+12z=15x+16z, \\ 60x+60y+60z=75x+40y, \\ 6x+6y+6z=20y+18z \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-12y+4z=0, \\ 15x-20y-60z=0, \\ 6x-14y-12z=0. \end{cases}$$

В параграфе1.3 настоящего пособия мы рассмотрели способы решения линейных систем трёх уравнений с тремя переменными. По правилу Крамера данную систему решить не представляется возможным, так как главный определитель равен нулю. Значит начнём исключать неизвестные. Умножим первое уравнение на –5 и сложим со вторым, умножим его же на –2 и сложим с третьим:

$$\begin{cases} 3x-12y+4z=0, \\ 40y-80z=0, \\ 10y-20z=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-12y+4z=0, \\ y-2z=0. \end{cases}$$

Два последних уравнения в системе тождественны, поэтому исключаем одно из них. У нас остаётся система двух уравнений с тремя неизвестными. Вообще такая система имеет бесконечное множество решений, но, с учётом вопроса задачи – нам нужны не конкретные значения, а их отношение, мы сможем получить однозначное решение этой системы, выполнив подстановку $y=2z$ из второго уравнения в первое и разделив оба уравнения системы на *z:*

$$\begin{cases} 3x-12y+4z=0, \\ y=2z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-24z+4z=0, \\ y=2z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=20z, \\ y=2z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x}{z}=20, \\ \dfrac{y}{z}=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{20z}{3}, \\ y=2z. \end{cases}$$

Интерпретируем полученный результат:

- второй смеси нужно взять в два раза больше, чем третьей, т.к. $y=2z$;
- три части первой смеси по весу равны двадцати частям третьей, так как $3x=20z$, и т.к. $x,y,z\in Z_0$ и мы использовали деление на *z*, следовательно $z\neq 0, z=3$;
- первой смеси нужно взять 20 частей.

Ответ: 20:6:3.

В задачах второго вида концентрация после n переливаний представляет собой убывающую геометрическую прогрессию и определяется формулой

$$c_n = \frac{p}{100} \cdot \left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n$$

Здесьa – объём, который доливается или отливается, p – процентное содержание первоначального раствора. Множитель $1 - \frac{a}{V_0}$ показывает, во сколько раз убывает концентрация после очередного переливания (этот множитель, кстати, и являетсязнаменателем геометрической прогрессии).

Если же в смесь с первоначальнойконцентрацией$\frac{p}{100}$каждый раз доливается не однородная жидкость (вода или вещество), а также раствор, но с иной концентрацией $\frac{q}{100}$рассматриваемого вещества в нём, то концентрацию после n переливаний можно найти по формуле

$$c_n = \frac{p}{100} + \frac{p-q}{100} \cdot \left(\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n - 1\right).$$

Можно провести аналогию с формулой сложных процентов. Здесь также некоторая величина подвержена поэтапному изменению, и каждый раз её изменение составляет определённое число процентов от значения, которое эта величина имела на предыдущем этапе.

Пример 2.1.14.Из сосуда, до краёв наполненного чистым глицерином, отлили литр глицерина, а взамен долили литр воды. После перемешивания снова отлили литр смеси и долили литр воды. Затем проделали эту операцию ещё один раз. В результате количество воды в сосуде оказалось в 7 раз больше по объёму оставшегося в нём глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?

Решение.Пусть V литров глицерина было в сосуде первоначально. Тогда в результате проделанных операций концентрация глицерина в сосуде равна $\frac{1}{8}$(7 частей воды и 1 часть глицерина). Первоначальная концентрация глицерина – 100%.

Используем последнюю формулу:

$$\frac{1}{8} = \frac{100}{100} \cdot \left(1 - \frac{1}{V}\right)^3 \text{ или } \frac{1}{8} = \left(1 - \frac{1}{V}\right)^3.$$

Получаем уравнение:

$$1 - \frac{3}{V} + \frac{3}{V^2} - \frac{1}{V^3} = \frac{1}{8},$$

обе части которого мы умножимна $8V^3 \neq 0$ $(V \neq 0,$ иначе задача не имеет смысла).

$$8V^3 - 24V^2 + 24V - 8 - V^3 = 0,$$
$$7V^3 - 24V^2 + 24V - 8 = 0.$$

Используем для решения последнего уравнения теорему Безу, получаем единственный действительный корень $V = 2$.

Интерпретируем результат: в 2 литрах смеси 7 частей воды и 1 часть глицерина. Значит, глицерина 0,25 л, а воды 1,75 л.
Ответ: 0,25 л, 1,75 л.

2.1.8. Задачи с целочисленными неизвестными

Целочисленность искомого неизвестного (неизвестных) обычно является дополнительным условием, позволяющим выбрать его (их) однозначно из некоторого множества значений, удовлетворяющих остальным условиям задачи.

2.1.9. Задачи с неравенствами

Большое количество задач сформулировано таким образом, что введённые неизвестные связаны между собой не только уравнениями, но для них существуют определённые ограничения, математическая запись которых представляет собой некоторую систему неравенств. Возможны случаи, когда уравнения вообще составить невозможно, а для определения неизвестных приходится решать эту систему неравенств.

В абсолютном большинстве случаев решением неравенства является множество, представляющее собой некоторый интервал или отрезок действительной оси. При ответе на вопрос о том, каким образом из этого множества выбрать единственное значение возможны две ситуации:

1) значения неизвестной принадлежит одновременно двум промежуткам вида $[a;b]$и $[b;c]$–в этом случае делается вывод о том, что $x=b$;
2) имеется ряд косвенных признаков, определённых условиям задачи, по которым возможно получить однозначное решение.

<u>Пример 2.1.15.</u>Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причём девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет более 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько пятиэтажных и девятиэтажных домов построено?

<u>Решение</u>. Пусть x – количество пятиэтажных, а y – количество девятиэтажных домов. Тогда по условиям задачи можно составить систему неравенств.

$$\begin{cases} y<x, \\ 2y+x>24, \\ 2x+y<27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y<0, \\ 2y+x-24>0, \\ 2x+y-27<0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 24-3y<0, \\ 3x-27<0, \end{cases} \\ \begin{cases} 21-3x<0, \\ 3y-30<0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow y\in(8;10), x\in(7;9)$$

Так как количество домов должно выражаться целым числом, то *y=9*, *x=8*.

Ответ: 9 пятиэтажных и 8 девятиэтажных домов.

2.1.10. Задачи на применение классических средних

Предлагаем читателю самостоятельно познакомиться с классическими средними и их свойствами (см. книгу [7] в библиографическом списке, приведённом в конце этой книги), они играют важную роль в математике.

Мы приведем лишь формулы, по которым можно их вычислять:

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} - \textit{среднее арифметическое};$$

$$g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} - \textit{среднее геометрическое};$$

$$h = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} - \textit{среднее гармоническое};$$

$$g = \sqrt{\frac{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}}{n}} - \textit{среднее квадратическое.}$$

Рассмотрим пример решения задачи, при которой используется понятие «*среднее гармоническое*».

Пример 2.1.16. В магазине имеется два контейнера с капустой, в первом килограмм этого овоща стоит 20 руб., во втором – 30 руб. Контейнеры оказались разного объёма, а их суммарная стоимость капусты в них оказалась одинаковой. Далее все овощи переместили в третий контейнер, где они перемешались. По какой цене магазину следует реализовать килограмм этойсмеси, чтобы не понести убытки?

Решение.

1 способ. Будем исходить из того, что НОК (20; 30) = 60. Пусть стоимость капусты, содержащейся в каждом контейнере, составляла 60*x* руб. Тогда в первом контейнере было 3*x* кг капусты, а во втором – 2*x* кг. Очевидно, что масса всей смеси равна 5*x* кг, в то же время суммарная стоимость капусты в двух контейнерах равна 120*x* руб. Тогда цена килограмма смеси составит:

$$120x : 5x = 24 \ (\textit{руб.}).$$

2 способ. Воспользуемся формулой для вычисления среднего гармонического двух чисел

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}} = \frac{2}{\frac{5}{60}} = \frac{2 \cdot 60}{5} = 24.$$

Ответ: 24 руб.

2.1.11. Задачи с числом неизвестных, большим числа уравнений

В некоторых текстовых задачах может получиться так, что однозначное определение всех неизвестных из системы, получаемой после математической интерпретации условий задачи, невозможно, но искомая комбинация этих неизвестных находится однозначно. Так, исходя из удобства обозначений, может получиться так, что величина, которую необходимо найти, может не войти в число введённых обозначенных неизвестных и представляет собой комбинацию введённых неизвестных. В этих случаях вводятся новые неизвестные (как в задачах на движение, см. пример 2.1.2, второй способ решения, с. 44) и задача решается однозначно. В других задачах необходимо провести анализ полученных уравнений и тогда, возможно, сделав соответствующие ограничения на неизвестные, также удаётся получить решение. Возможны и ситуации, при которых из меньшего количества уравнений удаётся найти большее количество неизвестных.

2.1.12. Задачи с параметрами

В таких задачах числовые данные заменены буквами. Задача носит общий характер.

Пример 2.1.17. От двух кусков сплава массами m и n килограммов с различным процентным содержанием меди отрезано по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Какова масса каждого из отрезанных кусков?

Решение.

Запишем данные в условии задачи в виде таблицы

	I кусок	II кусок
масса отрезанной части	x кг	x кг
масса оставшейся части	$m-$ x кг	$n-$ x кг
масса добавляемой части	x кг	x кг
концентрация	c_1	c_2

Так как концентрации (в условии – процентное содержание) меди в обоих получившихся в результате всех действий сплавах стало одинаковым, получаем уравнение:

$$\frac{c_1(m-x)+c_2x}{m}=\frac{c_2(n-x)+c_1x}{n}.$$

Раскрываем скобки, группируем подобные слагаемые, выносим общие множители за скобки, получаем:

$$(c_2-c_1)(x(n+m)-nm)=0,\Rightarrow x=\frac{nm}{n+m}.$$

$c_2\neq c_1$ по условию задачи.

Ответ: $x=\dfrac{nm}{n+m}$.

Полученный результат не предполагает исследования. Дробь $\dfrac{nm}{n+m}$ существует всегда и никакие ограничения здесь не требуются. Записывать условие $nm\leq n+m$ не нужно, так как абсолютно безразлично, в каком виде представлялись в задаче концентрации c_1 и c_2– в виде десятичных дробей или процентов. Условие $n+m\neq 0$ также лишнее (масса – величина неотрицательная).

Задачи с параметрами могут быть и других типов. Решение таких задач включает анализ на разрешимость и, часто, на однозначность решения. То есть, выясняется, при каких условиях задача с параметром не имеет решения, имеет единственное решение или имеет множество решений.

По тематике задачи этого типа могут быть совершенно различными.

В ходе самого решения задачи возникает иногда потребность накладывать на параметры определённые ограничения, или формулировка условия задачи не позволяет однозначно составить все уравнения. Но чаще всего требуется исследовать само решение. Как правило, бывает необходимо найти минимальное и максимальное значение непрерывной дифференцируемой функции, определяющей решение задачи на некотором интервале изменения аргумента. Это можно сделать, не используя производную. Так, в нахождении наибольших и наименьших значений помогают свойства функций и иные соображения, например, неравенство Коши

$$a+b\geq 2\sqrt{ab}, a\geq 0, b\geq 0.$$

С этой целью можно использовать следующие положения:

1) если для всех значений x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x)>A, g(x)<A$,где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x)=g(x)$ решений не имеет;
2) если для всех значений x из некоторого промежутка X справедливы неравенства $f(x)\geq A, g(x)\leq A$,где A – некоторое число, то на множестве X уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$;
3) пусть $f(x)$ – непрерывная и строго монотонная функция на промежутке X, тогда уравнение $f(x)=a$, где a – заданное число, может иметь не более одного решения на промежутке X;
4) пусть $f(x)$ и $g(x)$ –непрерывные на промежутке X функции, причём $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ – строго убывает на промежутке X, тогда уравнение $f(x)=g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке X и др.

Следует помнить, например, что дробно-линейная функция максимальное и минимальное значения имеет на концах интервалов непрерывности.

В более сложных случаях функцию исследуют с помощью производной. Далее в ход идёт правило отыскания максимумов и минимумов (в некоторых случаях даже с помощью второй производной).

Заметим, что если значение второй производной в точке равно нулю, то экстремума в этой точке нет.

Вообще, задачи на отыскание экстремумов функции, нахождение наибольших и наименьших значений объединяются в особую группу. В формулировке такой задачи обычно содержится условие, которое удовлетворяется только при решении задачи на нахождение наибольших и наименьших значений.

В таких задачах часто приходится рассматривать функцию вида

$$y = bx + \frac{a}{x}.$$

Эта функция при $x>0$имеет минимум y= $2\sqrt{ab}$, который достигается при $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$.При $x<0$имеет минимум y= $-2\sqrt{ab}$, который достигается при x= $-\sqrt{\frac{a}{b}}$.

<u>Пример 2.1.18.</u>Два парохода движутся навстречу друг другу в тумане с одинаковой скоростью v_0. На расстоянии 4 км между ними капитаны включают на некоторое время обратный ход с ускорение 0,1 м/с^2. Какова наибольшая скорость пароходов, при которой они не столкнутся?

<u>Решение</u>.Исходя из условия задачи, мы предполагаем, что в задаче будет осуществляться поиск наибольшего или наименьшего значения функции. Это будет зависеть от того, что мы выберем в качестве переменной – скорость или время.

Чтобы не столкнуться, каждый из пароходов должен проделать путь не более, а лучше строго меньше,двух километров.

Пусть t – время, отведённое каждому из поездов до полной остановки.

Так как движение происходит с ускорением (капитаны включают обратный ход), то используем формулу движения с ускорением.

$$S = v_0 t - 0{,}1 \cdot \frac{t^2}{2} < 2.$$

Выражаем искомую скорость v_0 из этого неравенства:

$$v_0 < \frac{2}{t} + \frac{t}{20}.$$

Теперь мы начинаем искать наименьшее значение функции

$$f(t) = \frac{2}{t} + \frac{t}{20}.$$

Поиск наименьшего значения осуществляется в связи с тем, что эта функция от переменной t, от времени. А время и скорость – величины обратно пропорциональные. Наименьшему времени будет соответствовать наибольшая скорость, если величина пути не меняется.

Преобразуем аналитическое выражение этой функции. Цель выполняемых преобразований следующая – представить аналитическое выражение функции в таком виде, чтобы можно было без использования производной, по виду выражения, показать, что функция ограничена снизу. Для этого наиболее подходит представление в виде суммы двух неотрицательных слагаемых, одно из которых – число. Тогда легко делается вывод, что такая сумма принимает наименьшее значение в том случае, когда слагаемое, содержащее переменную, равно нулю.

$$f(t)=\frac{2}{t}+\frac{t}{20}=2\left(\frac{1}{t}+\frac{t}{40}\right)=2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}\right)^2\right)=$$

$$=2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}+\left(\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}\right)=$$

$$=2\left(\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}\right)^2+\frac{2}{\sqrt{10}}=$$

$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}\right)^2+\sqrt{\frac{4}{10}}.$$

Функция $f(t)=2\left(\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}\right)^2+\sqrt{\frac{4}{10}}$ принимает наименьшее значение, если выражение в скобках равно нулю, то есть:

$$\frac{1}{\sqrt{t}}-\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}}=0,\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{10}},\Rightarrow t=2\sqrt{10}.$$

Теперь подставляем это значение в неравенство, связывающее скорость и время:

$$\mathrm{v}_0<\frac{2}{t}+\frac{t}{20},\Rightarrow\mathrm{v}_0<\frac{2}{2\sqrt{10}}+\frac{2\sqrt{10}}{20}=\frac{20+20}{20\sqrt{10}}=\frac{2}{\sqrt{10}}=\sqrt{0,4}\,(м/с)=$$

$$=0,72\sqrt{10}\,(км/ч).$$

Ответ: скорость пароходов не должна превышать $0,72\sqrt{10}$км/ч.

Заметим, что этот же результат мы могли бы получить, используя предложенную до последнего примера формулы.

Общая закономерность решения состоит в следующем – сначала выявляются выражения, пределы изменения которых позволяют дать ответ на вопрос задачи. Затем вводится параметр, от которого это выражение зависит. Как следствие, возникает функция, для которой отыскиваются наибольшее и наименьшее значения, в большинстве случаев с помощью производной. В ряде случаев по условию задачи составляются дифференциальные уравнения, в которые входит как сама функция, так и её производная или получается система, относящаяся к линейному программированию.

2.1.13. Разные задачи на составление уравнений

В задачах, не относящихся к определённой тематике, неизвестные вводятся по необходимости, то есть, исходя из условия задачи. Надо каждое условие попытаться реализовать в виде уравнения, связывающего введённые неизвестные. Заметим, что получающиеся уравнения могут быть довольно сложными. Кроме того, их решение может быть неоднозначным. Тогда, исходя из условия задачи, необходимо выбрать нужное.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Азаров, А.И.**Системы алгебраических уравнений. Текстовые задачи. Справочное пособие / А.И. Лазаров, С.А. Барвенов, В.С. Федосенко, А.С. Шибут. Минск: Тетра-Системс, 1998. 288 с.
2. **Алексеев, В.К.**Методы решения типовых задач элементарной алгебры. Учебное пособие / В.К. Алексеев. М.: Общество «Знание» Российской Федерации, 1992. 140 с.
3. **Алексеев, В.М.** Элементарная математика. Решение задач/ В.М. Алексеев Киев: Вища школа, 1983. 351 с.
4. **Ашкинузе, В.Г., Шоластер, Н.Н.** Алгебра и элементарные функции. Пособие для старших классов средней школы / В.Г. Ашкинузе, Н.Н. Шоластер. М.: Просвещение, 1964. 544 с.
5. **Башмаков, М.И.** Алгебра и начала анализа. Задачи и решения / М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой, Ю.И. Ионин. М.: Высшая школа, 2004. 296 с.
6. **Башмаков, М.И.** Школьная математика. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ / М.И. Башмаков, Ш.И. Цыганов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 271 с.
7. **Блинков, А.Д.** Классические средние в арифметике и в геометрии А.Д. Блинков. М.: МЦНМО, 2012. 168 с.
8. **Болтянский, В.Г.** Лекции и задачи по элементарной математике / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М.: Наука,Физматлит, 1971. 592 с.
9. **Василевский, А.Б.** Задания по внеклассной работе по математике: 9-11 классы: книга для учителя / А.Б. Василевский. Минск: Народная асвета, 1988. 172 с.
10. **Василевский, А.Б**. Методы решения задач по математике: методическое пособие / А.Б. Василевский. Минск: МПИ, 1981. 107 с.
11. **Василевский, А.Б.** Упражнения по алгебре и началам анализа: кн. для учителя / А.Б. Василевский. Минск: Народнаяасвета, 1991. 221 с.
12. **Вересова, Е.Е.** Практикум по решению математических задач: для педагогических институтов по мат. и физ. спец. / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 239 с.
13. **Выгодский, М.Я.** Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский. М., 2006. 509 с.
14. **Ганеев, Р.М., Ганеева, А.Р.** Лекции по элементарной математике / Р.М. Ганеев, А.Р. Ганеева. Елабуга: Изд.-во ЕГПУ, 2009. 106 с.
15. **Глазков, Ю.А.** Математика. ЕГЭ: сборник заданий: методическое пособие для подготовки к экзамену / Ю.А. Глазков, Т.Д. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелева. 3-е изд., испр. М.: Издательство «Экзамен», 2010. 287 с. (Серия «ЕГЭ. Сборник заданий»)

16. **Дорофеев, Г.В.** Математика: Пособие для поступающих в вузы / Г.В. Дорофеев, М.К. Потапов, Н.Х. Розов. М. Дрофа, 2001. 672с.
17. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Элементарная математика. Часть 1. Арифметика. Начала алгебры. Комбинаторика. Функции: учебное пособие / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников.Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2015. 128 с.
18. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Элементарная математика. Часть 2. Уравнения / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников. Елец: ЕГУ им. И.А. Бунина, 2020. 103 с.
19. **Зайцев, В.В.** Элементарная математика: Повторительный курс / В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави; Под ред. В.В. Рыжкова. 3. изд., стереотип. М.: Наука, 1976. 592 с.
20. **Иванов, О.А.** Избранные главы элементарной математики / О.А. Иванов; С.-Петербургскийгос. ун-т. СПб: Изд-во СПб.ун-та, 1995. 223 с.
21. **Кипнис, И.М.** Задачи на составление уравнений и неравенств: Пособие для учителей / И.М. Кипнис. М.: Просвещение, 1980. 62 с.
22. **Кравцев, С.В.**Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / С.В. Кравцев, Ю.Л. Макаров, М.И. Максимов и др. М.: Экзамен, 2001. 544 с.
23. **Крамор, В.С.** Задачинасоставлениеуравненийиметодыихрешения / В.С. Крамор.М.: ООО«ИздательствоОникс», 2009. 256 с.
24. **Лидский, В.Б.** Задачи по элементарной математике. 6-е изд., стереотип. / В.Б. Лидский, Л.В. Овсянников, А.Н. Тулайков, М.И. Шабунин. М.: Наука, 1969. 416 с.
25. **Литвиненко, В.Н.** Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учебноепособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей / В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1991. 348 с.
26. **Лурье, М.В**. Задачи на составление уравнений. Техника решения. 3-е изд., стереотип. / М.В. Лурье. М.: Изд-во УНЦ ДО, 2005. 124 с.
27. **Любецкий, В.А.** Основные понятия элементарной математики: учебное пособие для вузов / В.А. Любецкий. 2-е изд., испр. М.: Айрис-пресс, 2004. 624 с.
28. **Ляпин, С.Е**. Сборник задач по элементарной алгебре. Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / С.Е. Ляпин, И.В. Баранова, З.Г. Борчугова. Изд. 2-е перераб., доп. М.: Просвещение, 1973. 351 с.
29. **Маргулис, Б.Е.** Системы линейных уравнений. Популярные лекции по математике. Выпуск 34. Б.Е. Маргулис. М.: ГИФМЛ, 1960. 96 с.
30. **Моденов, В.П.** Математика: Пособие для поступающих в вузы / В.П. Моденов. М.: ООО «Издательство Новая Волна», 2002. 800 с.

31. Пособиепоматематике для поступающих в вузы / Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Наука, 1981. 608с.

32. **Орехов, Ф.А.** Решение задач методом составления уравнений. Пособие для учителей восьмилетней школы / Ф.А. Орехов. М.: Просвещение, 1971. 160с.

33. **Рурукин, А.Н.** Пособие для интенсивной подготовки к экзамену по математике. Выпускной, вступительный, ЕГЭ на 5+ / А.Н. Рурукин. М.: «ВАКО», 2006. 304 с.

34. **Рязановский, А.Г**. 500 способов и методов решения задач по математике / М.: Дрофа, 2001. 480с.

35. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / Под ред. М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1988.

36. Сборник задач по математике с решениями / Д.Н. Кравчук, Е.В. Кравчук, С.И. Клемина. Донецк: ПКФ «БАО», 1997. 192 с.

36.Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи [Текст] / Л. М. Фридман. – М.: Моск. психол.-социал. ин-т; Воронеж: Издательство НПО «МОДЭК», 1999. – 236 с.: ил.; 20 см. – Библиотека педагога-практика. – 10000 экз. – ISBN 5-89395-082-8.

37.Фридман, Л.М. Логико-психологический анализ школьных учебных задач / Л.М. Фридман; Науч.-исслед. ин-т общей и пед. психологии АПН СССР. – М.: Педагогика, 1977. 207 с.

38.Фридман, Л.М. Основы проблемологии. Серия «Проблемология» / Л.М. Фридман. М.: СИНТЕГ, 2001. 228 с.

39.Шарыгин, И.Ф., **Голубев, В.И.** Факультативный курс по математике. Решение задач Учеб.пособие для 11-го класса средней школы / И.Ф. Шарыгин, В.И. Голубев. М.: Просвещение, 1991.383 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Галина Георгиевна Ельчанинова,
Роман Анатольевич Мельников

Школьная математика: от альфа до омега
Часть 7 (эта). СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Технический редактор – Н. П. Безногих
Техническое исполнение – В. М. Гришин

Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Усл.-печ.л. 4. Уч.-изд.л. 4,5,
Тираж 500 экз. (1-й завод 50 экз.). Заказ 93

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28