МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников

ШКОЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА: ОТ АЛЬФА ДО ОМЕГА

Часть 5 (эпсилон)

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Елец, 2022

УДК 37
ББК 74.2
Э 64

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
от 2022 г., протокол №

Рецензенты:

Масина Ольга Николаевна – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования, компьютерных технологий и информационной безопасности (Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина, Елец).

Томилова Анна Евгеньевна – кандидат педагогических наук, доцент кафедры экспериментальной математики и информатизации образования ФГАОУ ВО Северный (Арктический) федеральный университет им. М. В. Ломоносова

Авторы: Ельчанинова Г.Г., Мельников Р.А.

Е 64 Школьная математика: от альфа до омега. Часть 5 (эпсилон). Тригонометрические уравнения. Учебное пособие. – Елец: ЕГУ им. И. А. Бунина, 2022. – 69 с.
978-5-94809-853-1 (часть 5)

Основная цель учебного пособия – оказать помощь изучающим математику.

Материал издания посвящён наиболее многогранной области – решению тригонометрических уравнений. Каждое из таких уравнений допускает как минимум пять способов решения. Пособие предназначено, в первую очередь, для учеников старших классов и учителей общеобразовательных учреждений на этапе систематизации знаний, а также студентам, обучающимся по направлению 44.03.05 Педагогическое образование, профиль которых связан с математикой, и их преподавателям.

УДК 37
ББК 74.2

978-5-94809-853-1 (часть 5)

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1.1. Простейшие тригонометрические уравнения

Известно, что *уравнением* называется аналитическая запись задачи об отыскании значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны.

✍ *Тригонометрическим уравнением* называется равенство, содержащее неизвестную величину только под знаком тригонометрической функции (одной или нескольких), и справедливое лишь при некоторых значениях неизвестной.

Все уравнения принято делить на две большие группы: алгебраические уравнения и трансцендентные уравнения.

Отличие трансцендентных уравнений от алгебраических состоит, главным образом, в том, что они не могут быть решены с помощью последовательного выполнения ряда арифметических и алгебраических действий над данными, входящими в их состав.

В школьном курсе математики к трансцендентным уравнениям кроме тригонометрических уравнений относят ещё показательные и логарифмические уравнения, которые традиционно изучаются после тригонометрических уравнений.

При решении тригонометрических уравнений часто приходится прибегать к различным соотношениям между тригонометрическими функциями, упрощать их к такому виду, чтобы можно было определить значения одной из тригонометрических функций искомого аргумента. После чего корни тригонометрического уравнения получают с помощью обратных тригонометрических функций.

Таким образом, решение большинства тригонометрических уравнений сопряжено с преобразованием их к простейшему виду с последующим применением известных формул.

✍ ***Простейшими тригонометрическими уравнениями*** называются уравнения типа $\sin x=a$, $\cos x=a$, $tg\, x=a$, $ctg\, x=a$, где a – некоторое действительное число.

Решать эти уравнения можно разными способами:

1) с помощью единичной тригонометрической окружности;

2) графически;

3) с помощью формулы.

Наиболее распространённым способом решения простейших уравнений является способ, основанный на использовании формул.

Получим формулы для решения простейших тригонометрических уравнений трёх наиболее важных типов $\sin x = a$, $\cos x = a$, $tg\, x = a$.

1.1.1. Уравнение sin x = a

Для решения уравнения $\sin x = a$, отметим сначала на тригонометрической окружности (Рис. 1) все точки с ординатой *a*, т.е. точки пересечения единичной тригонометрической окружности и прямой *y* = *a*.

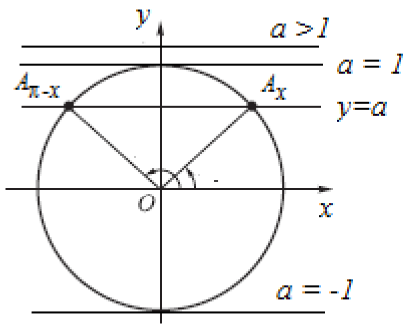

Рис. 1

Исходя из Рис. 1, видим, что при $|a| > 1$окружность и прямая *y* = *a* общих точек не имеют, а значит, уравнение решений не имеет.

Если же $|a| = 1$, то прямая *y* = *a* касается окружности, т.е. при $a = 1$ и $a = -1$ окружность и прямая имеют одну общую точку.

Наконец, если $|a| < 1$, то тригонометрическая окружность и прямая *y* = *a* всегда имеют две общие точки, симметричные относительно оси ординат *Oy*.

При этом надо учитывать, что каждой общей точке тригонометрической окружности с прямой *y* = *a* соответствует не одно число *x*, а бесконечное множество чисел вида $x + 2\pi k$, $k \in Z$.

Очевидно, что все эти числа и будут решениями рассматриваемого уравнения.

Задача теперь состоит в том, чтобы записать эти решения. Поскольку точке A_x соответствует число $\arcsin a$, то одна из серий решений уравнения $\sin x = a$ записывается в виде

$$x_1 = \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Точка $A_{\pi - x}$ на Рис. 1 соответствует числу $\pi - \arcsin a$, поэтому вторая серия решений этого уравнения может быть записана в виде

$$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Нередко две полученные серии объединяют в одну, что позволяет сократить запись

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$$

Отметим, что сокращенная запись удобна лишь для записи ответа, для анализа полученного решения предпочтение следует отдавать записи решения в виде совокупности двух серий.

Заметим, что при значениях $n=2k$, $k \in Z$ из сокращенной записи следует первая серия решений, а при значениях $n=2k+1$, $k \in Z$ – вторая серия решений.

Итак, решение уравнения $sin\,x=a$ можно представлять следующим образом:

1) в виде совокупности двух серий точек:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = arcsin\,a + 2\pi k, \\ x_2 = \pi - arcsin\,a + 2\pi k,\ \ k \in Z; \end{array}\right. \tag{1.1.1}$$

2) в сокращенном виде

$$x = (-1)^n arcsin\,a + \pi n, n \in Z. \tag{1.1.2}$$

Особо следует сказать об уравнениях $sin\,x=-1$, $sin\,x=0$, $sin\,x=1$. Это так называемые частные случаи простейшего тригонометрического уравнения типа $sin\,x=a$. Сразу скажем, что формулы (1.1.1) и (1.1.2) для этих случаев неприменимы. Для этих уравнений позже мы составим специальную таблицу, в которой будут содержаться решения для всех частных случаев простейших тригонометрических уравнений, содержащих основные тригонометрические функции.

Заметим, что в случае, когда $a \in (-1;0)$ формула (1.1.2) приобретает вид

$$x = (-1)^{n+1} arcsin|a| + \pi n, n \in Z. \tag{1.1.2*}$$

Рассмотрим ещё один подход к поиску решений уравнения $sin\,x=a$.

Допустим, что мы нашли какой-либо корень x_1 этого уравнения. Тогда в силу периодичности функции $y=sin\,x$, имеем

$$sin(x_1 + 2\pi k) = sin\,x_1 = a$$

и числа вида $x_1 + 2\pi k$ также удовлетворяют этому уравнению.

Заметим ещё, что

$$sin(\pi - x_1) = sin\,x_1 = a,$$

тем самым получается $\pi - x_1$ также удовлетворяет этому уравнению. Учитывая ранее отмеченное, можно утверждать, что и числа вида $\pi - x_1 + 2\pi k$ также ему удовлетворяют.

Следовательно, зная одно какое-то значение x_1, удовлетворяющее уравнению $sin\,x=a$ можно получить две серии значений аргумента, удовлетворяющих этому же уравнению:

$$x_1 + 2\pi k, k \in Z, \tag{1.1.3}$$

$$(2k+1)\pi - x_1, k \in Z. \tag{1.1.4}$$

Если в качестве x_1 взять $arcsin\,a$, то из формул (1.1.3) и (1.1.4) легко получается формула (1.1.1).

1.1.2. Уравнение cos x = a

Для решения уравнения $\cos x = a$, отметим сначала на тригонометрической окружности (Рис. 2) все точки с абсциссой *a*, т.е. точки пересечения единичной тригонометрической окружности и прямой *x* = *a*.

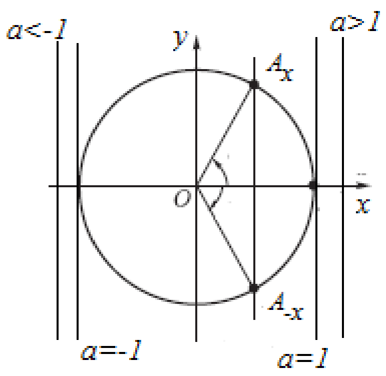

Рис. 2

Исходя из Рис. 2, видим, что при $|a|>1$окружность и прямая *x* = *a* общих точек не имеют, и, следовательно, уравнение решений не имеет.

Если же $|a|=1$, то прямая *x* = *a* касается окружности, т.е. при *a=1* и *a=-1* окружность и прямая имеют одну общую точку.

Наконец, если $|a|<1$, то тригонометрическая окружность и прямая *x* = *a* всегда имеют две общие точки, симметричные относительно оси абсцисс *Ox*.

При этом здесь, как и в случае уравнения $\sin x = a$, надо учитывать, что каждой общей точке тригонометрической окружности и прямой *x* = *a* соответствует не одно число *x*, а бесконечное множество чисел вида $x+2\pi k$, $k \in$ Z.

Эти числа и будут решениями этого уравнения. Остаётся только правильно записать сами решения.

Поскольку точке A_X на Рис. 2 соответствует число $\arccos a$, то одна из серий решений уравнения $\cos x = a$ записывается в виде

$$x_1 = \arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Точка A_{-X} на Рис. 2 симметрична точке A_X относительно оси абсцисс, поэтому вторая серия решений этого уравнения может быть записана в виде

$$x_2 = -\arccos a + 2\pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$$

Нередко две полученные серии объединяют в одну, что позволяет сократить запись

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}.$$

Итак, решение уравнения $\cos x = a$ можно представлять следующим образом:

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ n \in \mathrm{Z}. \quad (1.1.5)$$

Заметим также, что в случае, когда $a \in (-1;0)$ формула (1.1.5) приобретает вид

$$x = \pm\left(\pi - \arccos|a|\right) + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}. \quad (1.1.5^*)$$

Также особо следует сказать об уравнениях $\cos x=-1$, $\cos x=0$, $\cos x=1$. Это так называемые частные случаи простейшего тригонометрического уравнения типа $\cos x=a$. Сразу скажем, что формула (1.1.5) для этих случаев неприменима.

1.1.3. Уравнение tg x = a

Чтобы решить уравнение $tg\, x=a$, отметим сначала на тригонометрической окружности (Рис. 3) все точки, для которых отношение ординаты к абсциссе равно заданному числу a.

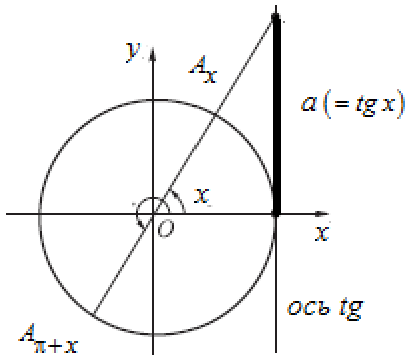

Рис. 3

Таких точек, очевидно, будет две. Они симметричны относительно центра окружности O и лежат на прямой, проходящей через точку O и отсекающей на оси тангенсов отрезок длины a.

Каждой точке соответствует бесконечное множество точек вида $x+2\pi k$, $k \in Z$.

Все эти числа являются решениями данного уравнения.

Поскольку точке A_x на Рис. 3 соответствует число $arctg\, a$, то одна из серий решений уравнения $tg\, x=a$ записывается в виде

$$x_1 = arctg a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Точка $A_{\pi+x}$ на Рис. 3 соответствует числу $arctg\, a+\pi$, поэтому вторая серия решений этого уравнения может быть записана в виде

$$x_2 = \pi + arctg a + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Легко заметить, что точка $A_{\pi+x}$ и точка A_x расположены на развернутом угле, которому соответствует радианная мера π. Это позволяет объединить две полученные серии в одну.

Итак, решение уравнения $tg\, x=a$ можно представлять следующим образом:

$$x = arctg a + \pi m,\ m \in Z. \qquad (1.1.6)$$

Заметим также, что в случае, когда $a \in (-\infty;-1) \cup (-1;0)$ формула (1.1.6) приобретает вид

$$x = -arctg|a| + \pi m,\ m \in Z. \qquad (1.1.6^*)$$

Также особо следует сказать об уравнениях $tg\, x=-1$, $tg\, x=0$, $tg\, x=1$. Это так называемые частные случаи простейшего тригонометрического уравнения типа $tg\, x=a$. Сразу скажем, что для этих случаев формулой (1.1.6) пользоваться не рекомендуется.

Представим сводку формул, необходимых для решения всех типов простейших тригонометрических уравнений, отразив в ней так называемые *частные случаи*:

a	$\in(-\infty;-1)$	$=-1$	$\in(-1;0)$	$=0$	$\in(0;1)$	$=1$	$\in(1;+\infty)$
$sinx=a$	$\varnothing$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$x=(-1)^{k+1}\cdot arcsin\lvert a\rvert+\pi k$	$x=\pi k$	$x=(-1)^{k}\cdot arcsin\,a+\pi k$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$	$\varnothing$
$cosx=a$	$\varnothing$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\pm(\pi-arccos\lvert a\rvert)+2\pi k$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\pm arccos\,a+2\pi n$	$x=2\pi n$	$\varnothing$
$tgx=a$	[#]	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi l$	$x=-arctg\lvert a\rvert+\pi l$ [#]	$x=\pi l$	$x=arctga+\pi l$ [*]	$x=\frac{\pi}{4}+\pi l$	[*]
$ctgx=a$	[@]	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi t$	$x=-arcctga+\pi t$ [@]	$x=\frac{\pi}{2}+\pi t$	$x=arcctga+\pi t$ [$]	$x=\frac{\pi}{4}+\pi t$	[$]

Например, требуется решить уравнение $cos\,x=\frac{1}{2}$.

Согласно таблице: $x=\pm arccos\frac{1}{2}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$ или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbf{Z}$.

Рассмотрим примеры решения простейших тригонометрических уравнений.

Пример 1.1.1. Решить уравнение $2sin4x = -1$.

Решение.

Уравнение легко преобразуется в виду

$$\sin 4x = -\frac{1}{2}.$$

По формуле (1.1.2*) имеем:

$$4x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Откуда

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$$

Ответ: $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$.

Пример 1.1.2. Решить уравнение $tg\frac{x}{2} = 2$.

Решение. Применим формулу (1.1.6):

$$\frac{x}{2} = arctg2 + \pi n, n \in Z.$$

Далее получаем

$$x = 2arctg2 + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x = 2arctg2 + 2\pi n, n \in Z$.

Особый интерес представляют простейшие тригонометрические уравнения, в правой части которых содержится не конкретное число, а числовое выражение, содержащее какую-либо тригонометрическую функцию.

Пример 1.1.3. Решите уравнение $sin x = cos1$.

Решение.

Здесь $a = cos1$. Так как $0 < cos1 < 1$, то уравнение имеет решение, которое можно записать по формуле (1.1.2), т.е. $x = (-1)^n arcsin(cos1) + \pi n, n \in Z$.

Но так как

$$arcsin(cos1) = arcsin\left(sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right) = \frac{\pi}{2} - 1, \text{ то}$$

$$x = (-1)^n\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 1.1.4. Решите уравнение $cos x = 2cos6$.

Решение.

Здесь $a = 2cos6$. Уравнение будет иметь решение, если $|2cos6| \le 1$.

Очевидно, имеет место двойное неравенства $\frac{11\pi}{6}<6<2\pi$. На интервале $\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right)$, которому принадлежат точки $\frac{11\pi}{6}$ и 6, функция $y=cos\ x$ является монотонно возрастающей, и, следовательно,

$$cos 6 > cos\frac{11\pi}{6}=cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тогда получаем, что $2cos 6 > 2cos\frac{11\pi}{6}=\sqrt{3}>1$, и поэтому данное уравнение не имеет решения.

§ 1.2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители

Основными методами, используемыми при решении тригонометрических уравнений (впрочем, как и других типов уравнений), являются:

1) разложение на множители;
2) введение новой переменной (переменных).

В данном параграфе мы рассмотрим только метод разложения на множители.

Если в уравнении, приведенном к виду $f(x)=0$, его левая часть разлагается на множители, т.е. $f(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)$, то следует каждый из этих множителей приравнять к нулю. Получится несколько отдельных уравнений (совокупность уравнений), корни каждого из которых будут корнями исходного уравнения, если только они входят в ОДЗ каждого из множителей левой части уравнения.

Рассмотрим пример, когда учет ОДЗ имеет существенное значение при решении тригонометрического уравнения.

Пример 1.2.1. Решите уравнение $sin x\cdot ctg\, 2x=0$.

Решение.

Так как в левой части уравнения присутствует множитель, содержащий функцию котангенс, которая, как известно, существует не при всех значениях x, то обязательной частью решения является либо нахождение ОДЗ, либо выполнение проверки найденных серий. Мы будем использовать ОДЗ:

$2x\neq\pi n$, т.е. $x\neq\frac{\pi n}{2}$, $n\in Z$.

Далее получаем совокупность, состоящую из двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} sin x=0, \\ ctg\, 2x=0. \end{array}\right.$$

Решая первое из уравнений совокупности, получаем $x=\pi k$, $k \in Z$. Но полученная серия решений не удовлетворяет ОДЗ, т.к. при $k=\frac{n}{2}$ множитель $ctg\,2x$ теряет смысл.

Далее переходим к решению второго уравнения совокупности. Ясно, $2x=\frac{\pi}{2}+\pi m$, $m \in Z$. Откуда получаем, что $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$. Полученная серия решений не противоречит ОДЗ.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}$, $m \in Z$.

Рассмотрим теперь пример, когда необходимость нахождения ОДЗ не возникает.

Пример 1.2.2. Решите уравнение **1** $(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\sin^2 x$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, чтобы в дальнейшем разложить правую часть уравнения с помощью формулы разности квадратов, получим:

$$(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=1-\cos^2 x;$$

$$(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)=\left(1+\cos x\right)\left(1-\cos x\right).$$

Далее перенесём выражение, стоящее в правой части, в левую часть уравнения, чтобы вынести повторяющийся множитель за скобки. Тем самым будет осуществлено разложение на множители. Будем иметь:

$$(2\sin x-\cos x)(1+\cos x)-\left(1+\cos x\right)\left(1-\cos x\right)=0;$$

$$(1+\cos x)\left(2\sin x-1\right)=0.$$

В итоге получаем совокупность, состоящую из двух простейших тригонометрических уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \cos x=-1, \\ \sin x=\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Очевидно, что

$$x_1=\pi+2\pi k,\ k\in Z;\quad x_2=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ. $\pi+2\pi k,\ k\in Z;\quad (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z.$

При решении тригонометрических уравнений методом разложения на множители может возникнуть ещё один «чисто методический» нюанс. Он касается правильности оформления записи ответа.

Так как при решении тригонометрических уравнений методом разложения на множители приходится, в конечном счёте, решать совокупность простейших тригонометрических уравнений, то это означает, что после решения всех уравнений совоупности найденные множества решений следует объединить. Объединеняя семейства решений, часто получают более компактную запись ответа.

Объединение решений удобнее всего выполнять с помощью единичной тригонометрической окружности, на которую наносят семейства решений соответсвующей совокупности уравнений.

Рассмотрим на примере, как это надо делать.

Пример 1.2.3. Решите уравнение $2\sin 3x = \cos 2x$.

Решение.

Сначала воспользуемся формулой приведения, с помощью которой функцию косинус преобразуем в синус.

Действительно, так как $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, то исходное уравнение примет вид

$$\sin 3x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

Перенося слагаемое в левую часть уравнения, получим возможность воспользоваться формулой разности синусов. Действительно,

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

или

$$2\sin\frac{3x - \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} \cdot \cos\frac{3x + \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)}{2} = 0.$$

Далее получаем

$$\sin\frac{5x - \frac{\pi}{2}}{2} \cdot \cos\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} = 0.$$

После этого получаем совокупность двух тригонометрических уравнений, относящихся к частным случаям (см. стр. 8):

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Ясно, что

$$\left[\begin{array}{l} \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi k, k \in Z, \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Далее имеем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2}{5}\pi k, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Построим точки каждой из полученных серий на единичной тригонометрической окружности (см. Рис. 4). Очевидно, что серии x_1 будут соответствовать пять «основных» точек, каждая из которых с учётом периода определяет остальные точки этой серии.

В серию же x_2 входит лишь одна точка, которая с учётом своего периода также определяет все остальные точки этой серии. Но, как мы видим, точки серии $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ явно присутствуют в серии x_1.

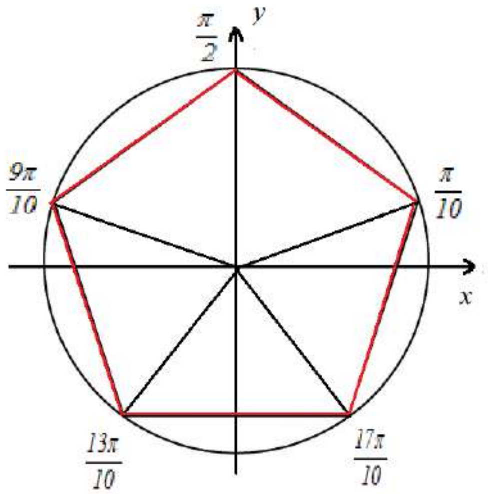

Рис. 4

Таким образом, при объединении серий x_1 и x_2 остается лишь одна серия решений, а именно $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2}{5}\pi k, k\in Z.$ Наличие второй серии в ответе можно трактовать как ошибку (методическую неточность).

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2}{5}\pi k, k\in Z.$

§ 1.3. Решение тригонометрических уравнений вида $sin(\alpha x)=sin(\beta x)$, $cos(\alpha x)=cos(\beta x)$, $tg(\alpha x)=tg(\beta x)$

Рассмотренный в предыдущем параграфе **Пример 1.2.3** представляет интерес с другой точки зрения.

Его можно воспринимать как уравнение, относящееся к специальной группе уравнений вида $sin(\alpha x)=sin(\beta x)$.

Рассмотрим общий способ решения таких уравнений. Сначала представим его в несколько ином виде

$$sin(\alpha x)-sin(\beta x)=0.$$

Очевидно, что можно применить формулу разности синусов:

$$2sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x\right)=0.$$

Откуда получаем

$$sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x\right)=0 \text{ или } cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x\right)=0.$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x=\pi k, k\in Z; \qquad \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

В итоге получаем формулы:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\pi k}{\alpha-\beta}, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi(2n+1)}{\alpha+\beta}, n\in Z. \end{array}\right. \qquad (1.3.1)$$

Знание формул (1.3.1) существенно укорачивает решение уравнений, входящих в рассмотренную группу. Рассмотрим это на примере.

<u>Пример 1.3.1.</u> Решите уравнение $sin5x=sin3x$.

Решение.

У нас $\alpha=5$, $\beta=3$. Применяя формулы (1.3.1), получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\pi k}{5-3}, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi(2n+1)}{5+3}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\pi k, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pi k, k\in Z, \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4}, n\in Z.$

Теоретическое обоснование приведенного метода решения уравнений подобного вида можно осуществить иным способом.

Этот способ основан на использовании соотношений между двумя дугами, имеющими одинаковое значение данной тригонометрической функции.

<u>Теорема 1.3.1.</u> Какова бы ни была система двух действительных чисел (u,v), где $u^2+v^2=1$ существует единственная дуга $0\le\alpha\le 2\pi$ (т.е. в пределах единичной окружности), *косинус* и *синус* которой имеют данные значения u и v, т.е.

$$cos\alpha=u, sin\alpha=v. \qquad (1.3.2)$$

<u>Доказательство</u>: на плоскости существует единственная точка M с абсциссой u и ординатой v, точка M лежит на единичной окружности т.к. $\rho(O,M) = |OM| = \sqrt{u^2+v^2} = 1$. Радиус OM определяет единственный угол α в промежутке от 0 до 2π, для которого *косинус* и *синус* имеют данные значения u и v.

В поле R существует бесконечное множество значений аргументов, удовлетворяющих соотношению (1.3.2), каждое из этих значений отличается от α на слагаемое $2\pi k,\ k\in Z$.

<u>Следствие</u>. Какова бы ни была система действительных чисел u, v, w, z взятых при условиях $u^2+v^2=1, z=\dfrac{v}{u}, w=\dfrac{u}{v}$, в промежутке от 0 до 2π существует единственное значение аргумента α, при котором

$$\cos\alpha=u, \sin\alpha=v, tg\alpha=z, ctg\alpha=w.$$

<u>Теорема 1.3.2.</u> Необходимым и достаточным условием того что:

1) две дуги u и v имели одинаковый *синус*, т.е. $\sin u = \sin v$ является наличие соотношения: $u=(-1)^n v+\pi n, n\in Z$;

2) две дуги u и v имели одинаковый *косинус,* т.е. $\cos u = \cos v$ является наличие соотношения: $u = \pm v + 2\pi k, k \in Z$;

3) дуги u и v, отличные от дуг вида $\dfrac{2k+1}{2}$, имели одинаковый *тангенс*, является наличие соотношения: $u = v + \pi n, n \in Z$.

<u>Доказательство:</u> докажем только справедливость первого утверждения теоремы.

1) <u>достаточность условия</u>.

Если имеет место соотношение $u=(-1)^n v+\pi n$, то, в зависимости от четности или нечетности числа n, имеем:

$$\sin u=\sin\begin{cases} v+2\pi k \\ \pi - v+2\pi k\end{cases}$$

в обоих случаях $\sin u=\sin v$.

2) <u>необходимость условия</u>.

Пусть $\sin u=\sin v$. Обозначим через m общее значение синуса двух дуг u и v:

$$\sin u=m, \sin v=m.$$

Рассмотрим множество всех дуг, у которых синус равен m:

$$(-1)^n \arcsin m+\pi n,$$

каждая из дуг u и v: содержится в этом выражении при некотором значении n:

$$\begin{aligned} u&=(-1)^{n_1}\arcsin m+\pi n_1, \\ v&=(-1)^{n_2}\arcsin m+\pi n_2. \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Если числа n_1 и n_2 одинаковой чётности (т.е. оба чётные или нечётные), то вычтем почленно соотношения (1.3.3):

$$u - v = (n_1 - n_2)\pi = 2\pi k.$$

Если же числа n_1 и n_2 различной чётности, то сложим почленно соотношения (1.3.3):

$$u + v = (n_1 + n_2)\pi = (2k+1)\pi.$$

Итак, если дуги u и v имеют одинаковые значения синуса, то либо их разность равна целому числу периодов $2\pi k$, либо их сумма равна нечётному числу полупериодов $(2k+1)\pi$.

Следовательно,

$$u = \begin{cases} v + 2\pi k \\ -v + (2k+1)\pi \end{cases} = (-1)^n v + \pi n.$$

Перейдём теперь к рассмотрению способа решения тригонометрических уравнений вида $cos(\alpha x) = cos(\beta x)$.

Очевидно, что в таком случае можно применить формулу разности косинусов:

$$-2\,sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x\right)\cdot sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x\right) = 0.$$

Откуда получаем

$$sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x\right) = 0 \text{ или } sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x\right) = 0.$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x = \pi k, k \in Z; \qquad \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x = \pi n, n \in Z.$$

В итоге получаем формулы:

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{2\pi k}{\alpha-\beta}, k \in Z, \\ x_2 = \dfrac{2\pi n}{\alpha+\beta}, n \in Z. \end{array}\right. \qquad (1.3.4)$$

<u>Замечание.</u> Рассмотрим ещё один интересный случай $sin(\alpha x) = cos(\beta x)$.

Перенося выражение, содержащее функцию косинус в левую часть уравнения и заменяя его по формуле приведения, получим

$$sin(\alpha x) - sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right) = 0.$$

Применяя формулу разности синусов, будем иметь

$$2\,sin\left(\frac{\alpha x - \left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right)}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{\alpha x + \left(\frac{\pi}{2} - \beta x\right)}{2}\right) = 0.$$

Или

$$2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Далее переходим к совокупности двух тригонометрических уравнений, относящихся к частным случаям.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot x-\frac{\pi}{4}\right)=0, \\ \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot x+\frac{\pi}{4}\right)=0. \end{array}\right.$$

Откуда получаем окончательные формулы:

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}\cdot(4k+1), k\in Z, \\ x_2=\frac{\pi}{2(\alpha-\beta)}\cdot(4n+1), n\in Z. \end{array}\right. \quad (1.3.5)$$

Осталось рассмотреть лишь способ решения уравнений вида $tg(\alpha x)=tg(\beta x)$.

Будем считать, что обе функции, входящие в это уравнение, имеют смысл, так как мы обязаны учесть тот факт, что тангенс не всегда определен.

Воспользуемся формулой разности тангенсов, после чего уравнение примет вид

$$\frac{\sin[(\alpha-\beta)\cdot x]}{\cos(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)}=0.$$

Откуда возможно лишь, что

$$\sin[(\alpha-\beta)\cdot x]=0.$$

Полученное уравнение весьма простое, поэтому сразу получаем формулу:

$$x=\frac{\pi k}{\alpha-\beta}, k\in Z. \quad (1.3.6)$$

<u>Пример 1.3.2.</u> Решите уравнение $\sin 15x=\cos 5x$.

Решение.

Этот случай рассмотрен нами в замечании. Ясно, что $\alpha=15$, $\beta=5$. Воспользуемся формулами (1.3.5).

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{\pi}{2(15+5)}\cdot(4k+1), k\in Z, \\ x_2=\frac{\pi}{2(15-5)}\cdot(4n+1), n\in Z. \end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{40}+\dfrac{\pi k}{10}, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{40}+\dfrac{\pi k}{10}, k\in Z,\ \dfrac{\pi}{20}+\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z$.

§ 1.4. Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с одной и той же тригонометрической функцией одного и того же аргумента, и сводящиеся к ним

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые способы (методы и методические подходы) решения тригонометрических уравнений, которые объединены общей идеей, смысл которой состоит в том, что данное уравнение приводят сначала к уравнению, содержащему выражения с тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Далее, как правило, используется метод замены переменной.

1.4.1. *Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с одной и той же тригонометрической функцией одного и того же аргумента*

В этом пункте мы будем иметь дело с уравнениями, содержащими какую-либо одну тригонометрическую функцию одного и того же аргумента. В таком случае следует заменить эти функцию какой-либо новой переменной, в результате получится алгебраическое уравнение, решив которое и сделав обратную замену, мы сможем судить о наличии или отсутствии решений у исходного уравнения.

Пример 1.4.1. Решите уравнение $2tg^4 3x-3tg^2 3x+1=0$.

Решение.

Положим $tg^2 3x=t$. Очевидно, что на переменную следует наложить дополнительное ограничение $t\geq 0$. Переходим к квадратному уравнению относительно переменной t

$$2t^2-3t+1=0.$$

Так как сумма коэффициентов этого квадратного уравнения равна нулю, то одним из его корней обязательно будет $t_1=1$. Тогда, опираясь на теорему Виета, легко назвать второй корень этого уравнения. Им будет $t_2=\dfrac{1}{2}$.

Значит, мы имеем совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} tg^2 3x=1, \\ tg^2 3x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Очевидно, что вместо этой совокупности можно записать совокупность из четырех простейших тригонометрических уравнений

$$\left[\begin{array}{l} tg\,3x=1, \\ tg\,3x=-1, \\ tg\,3x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \\ tg\,3x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{3}, k\in Z, \\ x_{3,4}=\pm\dfrac{1}{3}arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{3}, k\in Z$, $\pm\dfrac{1}{3}arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\pi n}{3}, n\in Z$.

1.4.2. *Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с ко-функциями одного и того же аргумента*

В таких случаях необходимо сначала выполнить преобразования, направленные на то, чтобы одна из ко-функций была полностью заменена на другую, соответствующую ей ко-функцию.

Делается это достаточно просто, достаточно помнить, что синус и косинус одного и того же аргумента связаны основным тригонометрическим тождеством, а произведение тангенса и котангенса равно 1.

Пример 1.4.2. Решите уравнение $2cos^2 x+14cos\,x=3sin^2 x$.

Решение.

Так как $sin^2 x=1-cos^2 x$, то исходное уравнение можно преобразовать к виду

$$2cos^2 x+14cos\,x-3\left(1-cos^2 x\right)=0.$$

Очевидно, что после раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых оно запишется следующим образом:

$$5cos^2 x+14cos\,x-3=0.$$

Положим, $cos\,x=y$. Переходим к решению квадратного уравнения

$$5y^2+14y-3=0.$$

Откуда нетрудно получить, что

$$y_1=\frac{1}{5}; y_2=-3.$$

Значит, либо

$$\cos x=\frac{1}{5},$$

откуда

$$x=\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n, n\in Z,$$

либо

$$\cos x=-3.$$

Второе простейшее уравнение не имеет решений, так как не выполняется условие ограниченности косинуса $|\cos x|\le 1$

Ответ: $\pm\arccos\frac{1}{5}+2\pi n, n\in Z$.

1.4.3. *Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с разноимёнными тригонометрическими функциями одного и того же аргумента*

В этом случае имеется в виду чуть большая «загруженность» записи уравнения, т.е. могут присутствовать компоненты, не являющиеся, например, ко-функциями по отношению друг к другу. В таком случае приходится производить чуть больше упрощений, но их целью должно быть выявление в записи преобразованного уравнения только одной функции одного и того же аргумента.

<u>Пример 1.4.3.</u> Решите уравнение $tg^3 x-1+\frac{1}{\cos^2 x}-3ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=3$.

Решение.

Используя формулы $1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$ и $ctg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=tg\,x$, перепишем исходное уравнение в виде

$$tg^3 x-1+\left(1+tg^2 x\right)-3tg\,x=3$$

или

$$tg^3 x+tg^2 x-3tg\,x-3=0.$$

Введём обозначение $tg\,x=t$, получим алгебраическое уравнение третьей степени

$$t^3+t^2-3t-3=0.$$

Применим метод разложения на множители, но предварительно выполним группировку слагаемых и вынесение общего множителя за скобки

$$t^2\left(t+1\right)-3\left(t+1\right)=0.$$

Далее получаем

$$(t+1)\cdot(t^2-3)=0.$$

Ясно, что $t_1=-1,\ t_{2,3}=\pm\sqrt{3}$.

Тогда получаем совокупность из трёх простейших тригонометрических уравнений, каждое из которых содержит функцию тангенс

$$\left[\begin{array}{l} tg\,x=-1, \\ tg\,x=\sqrt{3}, \\ tg\,x=-\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Решая каждое из уравнений совокупности, соответственно находим:

$x_1=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\ x_{2,3}=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z,\ \pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$

§ 1.5. Однородные тригонометрические уравнения первого порядка

✍ Уравнение вида $a\sin x+b\cos x=0$, где a и b – произвольные, отличные от нуля константы, называется *однородным тригонометрическим уравнением первого порядка*.

Решение этого уравнения незамысловато. Сначала надо разделить обе части данного уравнения на $\cos x\neq 0$, после этого действия уравнение примет вид

$$a\cdot tg\,x+b=0.$$

Очевидно, что полученное уравнение легко преобразуется в простейшее тригонометрическое уравнение, содержащее функцию тангенс

$$tg\,x=-\frac{b}{a},$$

которое всегда разрешимо.

__Пример 1.5.1.__ Решите уравнение $3\sin x-2\cos x=0$.

Решение.

Выполнив деление обеих частей уравнения на $\cos x\neq 0$, получаем

$$3tg\,x-2=0$$

или

$$tg\,x=\frac{2}{3}.$$

Значит,

$$x=arctg\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $arctg\frac{2}{3}+\pi n, n\in Z$.

§ 1.6. Однородные тригонометрические уравнения второго порядка и сводящиеся к ним

✍ Уравнение вида $a\cdot sin^2 x+b\cdot sin x cos x+c\cdot cos^2 x=0$, где a, b и c – произвольные, отличные от нуля константы, называется *однородным тригонометрическим уравнением второго порядка*.

Замечание. Рассмотрим случай, когда одна из констант, входящих в данное уравнение всё же равна нулю. Возможны случаи:

1) $a=0, b\neq 0, c\neq 0$.

В этом случае исходное уравнение приобретает вид

$$b\cdot sin x cos x+c\cdot cos^2 x=0,$$

т.е., по сути, оно потеряло первое слагаемое. Оно легко решается методом разложения на множители, т.к. косинус может быть вынесен за скобки. В таком случае уравнение имеет две серии решений (одна получается из уравнения $cos x=0$, а вторая находится из однородного уравнения первого порядка $b\cdot sin x+c\cdot cos x=0$).

2) $a\neq 0, b\neq 0, c=0$.

Этот случай близок к первому случаю. Отличие состоит лишь в том, что из исходного уравнения выпадает третье слагаемое и в результате оно принимает вид

$$a\cdot sin^2 x+b\cdot sin x cos x=0.$$

Как и в первом случае, это уравнение решается методом разложения на множители и также имеет две серии решений (одна из которых получается благодаря уравнению $sin x=0$, а вторая находится из однородного уравнения первого порядка $a\cdot sin x+b\cdot cos x=0$).

3) $a\neq 0, b=0, c\neq 0$.

Этот случай принципиально отличается от двух предыдущих, ибо теперь в уравнении отсутствует второе слагаемое, и оно приобретает вид

$$a\cdot sin^2 x+c\cdot cos^2 x=0.$$

Возникает вопрос о разрешимости такого уравнения. Здесь возможны два случая:

3.1) если коэффициенты, входящие в уравнение, – числа противоположных знаков. Тогда можно разделить обе части этого уравнения на $cos^2 x\neq 0$. Получится уравнение вида

$$a\cdot tg^2 x+c=0,$$

которое при сделанных ранее допущениях, очевидно, разрешимо;

3.2) если же коэффициенты этого уравнения – числа одного знака, то левая часть данного уравнения обязана быть равной нулю, а это невозможно в силу того, что синус и косинус одного и того же аргумента одновременно не обращаются в ноль. Выходит, что в этом случае уравнение не имеет решений.

Вернёмся всё же к исходному уравнению и рассмотрим способ его решения.

Разделим обе части данного уравнения на $cos^2 x \neq 0$. Получим

$$a \cdot tg^2 x + b \cdot tg\, x + c = 0.$$

Очевидно, что полученное уравнение легко решается заменой переменной. Например, можно положить $tg\, x = t$, после чего уравнение примет вид

$$a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0.$$

Как известно, разрешимость или неразрешимость квадратного уравнения зависит от знака его дискриминанта. Поэтому в случае, когда $D = b^2 - 4ac \geq 0$ исходное уравнение разрешимо. Если же $D < 0$, то исходное уравнение не имеет решений.

Пример 1.6.1. Решите уравнение $5sin^2 x - 3sin\, x cos\, x - 2cos^2 x = 0$.

Решение.

После деления на $cos^2 x \neq 0$ уравнение стало иметь вид

$$5tg^2 x - 3tg\, x - 2 = 0.$$

Заметим, что сумма коэффициентов полученного квадратного уравнения равна нулю, следовательно, среди его решений есть число 1, а вторым корнем, согласно теореме Виета, должно быть число $-\frac{2}{5}$.

Значит, получаем совокупность двух простейших тригонометрических уравнений относительно функции тангенс.

$$\left[\begin{array}{l} tg\, x = 1, \\ tg\, x = -\frac{2}{5}. \end{array}\right.$$

Отсюда, очевидно, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, \\ x_2 = -arctg\frac{2}{5} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$, $-arctg\frac{2}{5} + \pi n, n \in Z$.

Рассмотри теперь уравнение вида

$$a \cdot sin^2 x + b \cdot sin\, x cos\, x + c \cdot cos^2 x = d,$$

в котором для определённости будем считать все константы отличными от нуля.

Это уравнение легко сводится к однородному тригонометрическому уравнению второго порядка. Для этого нужно поступить следующим образом:

1) сначала умножить правую часть уравнения на тригонометрическую единицу, после чего уравнение примет вид

$$a \cdot sin^2 x + b \cdot sin x cos x + c \cdot cos^2 x = d \cdot \left(sin^2 x + cos^2 x\right);$$

2) далее следует раскрыть скобки в правой части уравнения и получившиеся слагаемые перенести в левую часть уравнения, сделав там после этого необходимую перегруппировку слагаемых. В результате уравнение предстанет в виде

$$\left(a - d\right) \cdot sin^2 x + b \cdot sin x cos x + \left(c - d\right) \cdot cos^2 x = 0.$$

3) После деления обеих частей последнего уравнения на $cos^2 x \neq 0$, следует работать с полученным уравнением, как с однородным тригонометрическим уравнением второго порядка.

<u>Пример 1.6.2.</u> Решите уравнение

$$2 sin^2 x - 5 sin x cos x - 8 cos^2 x = -2.$$

Решение.

Перепишем уравнение в виде

$$2 sin^2 x - 5 sin x cos x - 8 cos^2 x = -2 \cdot \left(sin^2 x + cos^2 x\right).$$

Далее запишем его следующим образом

$$4 sin^2 x - 5 sin x cos x - 6 cos^2 x = 0.$$

Поделив обе его части на $cos^2 x \neq 0$, получаем

$$4 tg^2 x - 5 tg\, x - 6 = 0.$$

Находим дискриминант полученного квадратного уравнения

$$D = \left(-5\right)^2 - 4 \cdot 4 \cdot \left(-6\right) = 25 + 96 = 121 > 0.$$

Значит, $tg\, x = \dfrac{5 \pm 11}{8}$, т.е. $tg\, x = 2$ или $tg\, x = -\dfrac{3}{4}$.

Тогда получаем

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = arctg\, 2 + \pi k, k \in Z, \\ x_2 = -arctg \dfrac{3}{4} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $arctg\, 2 + \pi k, k \in Z,\ -arctg \dfrac{3}{4} + \pi n, n \in Z$.

§ 1.7. Уравнения, содержащие выражения с тригонометрическими функциями различных аргументов

1.7.1. Уравнения, содержащие выражения с разноименными тригонометрическими функциями различных кратных аргументов

Если в тригонометрическом уравнении содержатся выражения с разноименными тригонометрическими функциями, причём аргументы у них кратные (например, *x, 2x, 4x, ..., 2nx*), то можно использовать формулы двойного аргумента и (или) формулы половинного аргумента. После выполнения преобразований с помощью указанных формул, такие уравнения, как правило, приводятся к уравнениям с одним и тем же аргументом.

Пример 1.7.1. Решите уравнение $cos\,2x = cos^4\frac{x}{2} - sin^4\frac{x}{2}.$

Решение.

Воспользуемся формулой косинуса двойного угла, согласно которой будем иметь

$$cos\,2x = 2cos^2 x - 1.$$

Выражение, стоящее в правой части данного уравнения, можно преобразовать, используя формулу разности квадратов, т.е.

$$cos^4\frac{x}{2} - sin^4\frac{x}{2} = \left(cos^2\frac{x}{2}\right)^2 - \left(sin^2\frac{x}{2}\right)^2 = \left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right)\cdot\left(cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}\right).$$

Первый из полученных множителей преобразуется по формуле косинуса двойного аргумента, а второй – тригонометрическая единица, поэтому

$$cos^4\frac{x}{2} - sin^4\frac{x}{2} = cos\,x\,.$$

Значит, исходное уравнение записывается теперь следующим образом:

$$2cos^2 x - 1 = cos\,x$$

или

$$2cos^2 x - cos\,x - 1 = 0\,.$$

Полученное квадратное уравнение, очевидно, равносильно совокупности двух простейших тригонометрических уравнений, содержащих функцию косинус

$$\left[\begin{array}{l} cos\,x = 1, \\ cos\,x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Решая эти уравнения, получаем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2\pi k, k\in Z, \\ x_{2,3}=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $2\pi k, k\in Z$, $\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

1.7.2. Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени

При решении широкого круга тригонометрических уравнений решающую роль играют формулы понижения степени:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}.$$

Пример 1.7.2. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0.$$

Решение.

Применим формулы понижения степени

$$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1-\cos 4x}{2}-\frac{1+\cos 6x}{2}-\frac{1+\cos 8x}{2}=0$$

или

$$(\cos 2x+\cos 4x)+(\cos 6x+\cos 8x)=0.$$

Используя формулу суммы косинусов, получим

$$2\cos 3x\cdot\cos x+2\cos 7x\cdot\cos x=0.$$

Иначе

$$2\cos x\cdot(\cos 3x+\cos 7x)=0.$$

Ещё раз применим формулу суммы косинусов, перепишем уравнение в виде

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 5x=0.$$

В результате имеем совокупность из трёх простейших тригонометрических уравнений, каждое из которых содержит функцию косинус

$$\left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \cos 2x=0, \\ \cos 5x=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \\ 5x=\dfrac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z, \\ x_3=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi m}{5}, m\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}, k \in Z$, $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}, m \in Z$.

1.7.3. Уравнения, решаемые с помощью формул тройного аргумента

Особенностью этих уравнений является наличие у тригонометрических функций, входящих в них аргументов, отличающихся друг от друга на числовой множитель, представляющий собой какую-либо степень числа 3. При решении уравнений, входящих в эту группу, существенную роль играют формулы:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha;$$

$$tg3\alpha = \frac{3tg\alpha - tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n\in Z;$$

$$ctg3\alpha = \frac{3ctg\alpha - ctg^3\alpha}{1-3ctg^2\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi k}{3}, k\in Z.$$

По уровню сложности эти уравнения бывают разными. Мы приведём здесь два примера с разными уровнями сложности.

Пример 1.7.3. Решите уравнение $\cos 3x = -2\cos x$.

Решение.

Применив формулу косинуса тройного аргумента, получим

$$4\cos^3 x - 3\cos x = -2\cos x$$

или

$$4\cos^3 x - \cos x = 0.$$

Вынося общий множитель за скобки, будем иметь

$$\cos x \cdot \left(4\cos^2 x - 1\right) = 0.$$

Далее переходим к совокупности двух уравнений, предварительно применив во втором уравнении формулу понижения степени

$$\left[\begin{array}{l} \cos x=0, \\ \cos 2x=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \\ 2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z, \\ x_{2,3}=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$, $\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z$.

Пример 1.7.4. Решите уравнение $cos\dfrac{4x}{3}=cos^2 x.$

Решение.

Осуществим замену переменной, положив $\dfrac{x}{3}=y$, т.е. $x=3y$. В результате исходное уравнение примет вид

$$cos\,4y=cos^2 3y.$$

Применив формулу двойного аргумента в левой части полученного уравнения, и формулу понижения степени в его правой части, приведём к виду

$$2cos^2 2y-1=\frac{1+cos\,6y}{2}.$$

Умножив обе части последнего равенства на 2, получим

$$4cos^2 2y-2=1+cos\,6y.$$

Применим формулу тройного аргумента для слагаемого, стоящего в правой части уравнения

$$4cos^2 2y-2=1+4cos^3 2y-3cos\,2y.$$

После переноса всех слагаемых в одну сторону и выполнения тождественных преобразований уравнение примет вид

$$4cos^2 2y\cdot\left(cos\,2y-1\right)-3\cdot\left(cos\,2y-1\right)=0$$

или

$$\left(cos\,2y-1\right)\cdot\left(4cos^2 2y-3\right)=0.$$

Далее переходим к совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} cos\,2y=1, \\ 2cos^2 2y=\dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} cos\,2y=1, \\ 1+cos\,4y=\dfrac{3}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} cos\,2y=1, \\ cos\,4y=\dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2y=2\pi n, n\in Z, \\ 4y=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=\pi n, n\in Z, \\ y=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}=\pi n, n\in Z, \\ \dfrac{x}{3}=\pm\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\pi k}{2}, k\in Z. \end{array}\right.$$

Окончательно получаем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=3\pi n, n\in Z, \\ x_{2,3}=\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi k}{2}, k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $3\pi n, n\in Z$, $\pm\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{3\pi k}{2}, k\in Z$.

1.7.4. Уравнения, решаемые с помощью формул разности и суммы тригонометрических функций

Эти уравнения можно условно разделить на две группы:

1) уравнения, в записи которых легко обнаруживаются формулы суммы и разности тригонометрических функций;
2) уравнения, запись которых не содержит намёка на соответствующие формулы, но возможность их применения обнаруживается после выполнения преобразований иного рода.

Приведём примеры таких уравнений.

Пример 1.7.5. Решите уравнение $\sin 3x+7\sin 2x=7\sin x.$

Решение.

Нетрудно заметить, что может быть использована формула разности синусов. Действительно, перепишем данное уравнение в виде

$$\sin 3x+7\left(\sin 2x-\sin x\right)=0.$$

Применяя формулу разности синусов, получаем

$$\sin 3x+14\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}=0.$$

Заметим, что слагаемое $\sin 3x$ можно разложить по формуле синуса двойного аргумента, после чего появится возможность вынести общий множитель $2\cos\dfrac{3x}{2}$ за скобки. Действительно,

$$2\sin\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}+14\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{3x}{2}=0.$$

Далее

$$2\cos\frac{3x}{2}\cdot\left(\sin\frac{3x}{2}+7\sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

Переходим к равносильной совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \cos\dfrac{3x}{2}=0, \\ \sin\dfrac{3x}{2}+7\sin\dfrac{x}{2}=0. \end{array}\right.$$

Первое из уравнений представляет собой частный случай, поэтому сразу же можем получить его решение

$$\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

Итак,

$$x_1=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z.$$

Теперь займёмся решением второго уравнения совокупности. Первое слагаемое может быть преобразовано по формуле тройного аргумента, т.е.

$$3\sin\frac{x}{2}-4\sin^3\frac{x}{2}+7\sin\frac{x}{2}=0.$$

После приведения подобных слагаемых оно приобретает вид

$$10\sin\frac{x}{2}-4\sin^3\frac{x}{2}=0.$$

Далее получаем

$$2\sin\frac{x}{2}\cdot\left(5-2\sin^2\frac{x}{2}\right)=0.$$

Значит, имеем совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{x}{2}=0, \\ 5-2\sin^2\frac{x}{2}=0. \end{array}\right.$$

Первое из этих уравнений дает нам ещё одну серию решений

$$x_2=2\pi k, k\in Z.$$

При решении второго уравнения совокупности воспользуемся формулой понижения степени. В результате получаем

$$5-(1-\cos x)=0.$$

Но тогда $\cos x=-4$, что лишено смысла. Поэтому второе уравнение совокупности не имеет решений.

Ответ: $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z$, $2\pi k, k\in Z$.

<u>Пример 1.7.6.</u> Решите уравнение

$$\cos 2x-\sin 3x-\cos 8x=\sin 10x-\cos 5x.$$

Решение.

Заметим, что в левой части уравнения имеется возможность применить формулу разности косинусов

$$(\cos 2x-\cos 8x)-\sin 3x=\sin 10x-\cos 5x.$$

Действительно, получаем

$$-2\sin\frac{2x-8x}{2}\cdot\sin\frac{2x+8x}{2}-\sin 3x=\sin 10x-\cos 5x$$

или

$$2sin3x\cdot sin5x-sin3x=sin10x-cos5x.$$

В левой части уравнения, очевидно, появилась возможность вынесения общего множителя за скобки, а в правой части можно использовать формулу синуса двойного аргумента с последующим вынесением общего множителя за скобки. После выполнения описанных действий, получаем

$$sin3x\cdot\left(2sin5x-1\right)=cos5x\cdot\left(2sin5x-1\right).$$

Наличие одинаковых множителей в левой и правой частях последнего уравнения даёт нам возможность переписать его в виде совокупности двух уравнений.

$$\left[\begin{array}{l} 2sin5x-1=0, \\ sin3x-cos5x=0. \end{array}\right.$$

Ясно, что первое уравнение совокупности имеет решение вида

$$5x=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$$

или

$$x_1=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z\ .$$

Второе уравнение совокупности потребует чуть больше временных затрат, но сначала, используя формулу приведения, заменим функцию косинус на синус, т.е.

$$sin3x-sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0\ .$$

Применим теперь формулу разности синусов

$$2sin\frac{3x-\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)}{2}\cdot cos\frac{3x+\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)}{2}=0\ .$$

Упрощая, получаем

$$2sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\cdot cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0\ .$$

Перейдём к совокупности двух уравнений, воспользовавшись в одном из них свойством чётности функции косинус

$$\left[\begin{array}{l} sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)=0, \\ cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0. \end{array}\right.$$

Тогда получаем

$$\left[\begin{array}{l} 4x-\dfrac{\pi}{4}=\pi k, k\in Z, \\ x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+\pi m, m\in Z. \end{array}\right.$$

Далее имеем

$$\left[\begin{array}{l} x_2=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi k}{4}, k\in Z, \\ x_3=\dfrac{3\pi}{4}+\pi m, m\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{30}+\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z$, $\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{\pi k}{4}, k\in Z$, $\dfrac{3\pi}{4}+\pi m, m\in Z$.

Теперь рассмотрим пример уравнения, в котором сразу не обнаруживается возможность применения формул суммы и разности тригонометрических функций.

Пример 1.7.7. Решите уравнение $1+\sin 2x=\left(\sin 3x-\cos 3x\right)^2$.

Решение.

Используя алгебраическую формулу квадрата разности и учитывая появление тригонометрической единицы, может переписать исходное уравнение в виде

$$1+\sin 2x=1-\sin 6x.$$

После взаимного уничтожения единиц и переноса одного слагаемого в левую часть, уравнение может быть записано следующим образом

$$\sin 6x+\sin 2x=0.$$

Только теперь у нас появилась возможность применить формулу суммы двух синусов

$$2\sin 4x\cdot\cos 2x=0,$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l} \sin 4x=0, \\ \cos 2x=0. \end{array}\right.$$

Далее получаем

$$\left[\begin{array}{l} 4x=\pi k, k\in Z, \\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Окончательно имеем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi k}{4}, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi k}{4}, k \in Z$, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

1.7.5. Уравнения вида $f\left(sin^{2k} x \pm cos^{2k} x; sin 2mx; cos 2nx\right)=0$, где k, m, n $\in N$

Указанные в название этого пункта уравнения, в которых f – некоторый многочлен, решаются с использованием представления алгебраической суммы $sin^{2k} x \pm cos^{2k} x$ в виде выражений, содержащих синус и косинус чётных аргументов.

Не вдаваясь в подробности, запишем ряд формул, которые оказываются весьма полезными при решении уравнений указанного типа:

$$sin^4 x + cos^4 x \equiv 1-\frac{1}{2}sin^2 2x \equiv \frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos^2 2x;$$

$$sin^4 x - cos^4 x \equiv -cos\, 2x \equiv 2sin^2 x - 1;$$

$$sin^6 x + cos^6 x \equiv 1-\frac{3}{4}sin^2 2x \equiv \frac{1}{4}+\frac{3}{4}cos^2 2x;$$

$$sin^8 x + cos^8 x \equiv \frac{1}{8}sin^4 2x - sin^2 2x + 1 \equiv \frac{1}{8}cos^4 2x + \frac{3}{4}cos^2 2x + \frac{1}{8};$$

$$sin^{10} x + cos^{10} x \equiv \frac{5}{16}sin^4 2x - \frac{5}{4}sin^2 2x + 1 \equiv \frac{5}{16}cos^4 2x + \frac{5}{8}cos^2 2x + \frac{1}{16}.$$

Предлагаем читателям получить эти формулы самостоятельно[1].

Пример 1.7.8. Решите уравнение $20\left(sin^4 x + cos^4 x\right) - cos\, 4x = 11.$

Решение.

Преобразуем его левую часть с помощью одной из этих формул

$$20\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos^2 2x\right) - cos\, 4x = 11$$

или

$$10 + 10cos^2 2x - cos\, 4x = 11.$$

Перепишем теперь уравнение в виде

$$10cos^2 2x = 1 + cos\, 4x.$$

Применим в правой части формулу половинного аргумента

$$10cos^2 2x = 2cos^2 2x.$$

Далее имеем

$$8cos^2 2x = 0,$$

откуда

---

[1] При возникновении затруднений рекомендуем читателю использовать книгу «Тригонометрия. На страницах и за страницами школьного учебника» / В.В. Амелькин Т.И. Рабцевич. Минск: Красико-Принт, 2011. 256 с. (см. стр. 68-69).

$$cos\,2x = 0.$$

Значит,

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z\,.$$

Окончательно получаем

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z\,.$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$.

<u>Пример 1.7.9.</u> Решите уравнение $sin^{10} x + cos^{10} x = \frac{29}{16} cos^4 2x.$

Решение.

Это уравнение мы решим двумя способами, чтобы понять насколько облегчается решение, когда имеешь под рукой соответствующие формы, а также, что приходится придумывать в случае их отсутствия.

<u>1 способ</u> (с помощью формулы для упрощения выражения $sin^{10} x + cos^{10} x$).

Ясно, что выражение $sin^{10} x + cos^{10} x$ следует заменить тождественным выражением, содержащим косинусы, т.е.

$$\frac{5}{16} cos^4 2x + \frac{5}{8} cos^2 2x + \frac{1}{16} = \frac{29}{16} cos^4 2x\,.$$

Умножим обе части полученного уравнения на 16 и приведем подобные слагаемые, получим

$$24 cos^4 2x - 10 cos^2 2x - 1 = 0\,.$$

Получили биквадратное уравнение относительно $cos\,2x$. Используем замену $cos^2 2x = y$. На переменную y следует наложить дополнительное ограничение $y \ge 0$.

Переходим к соответствующему квадратному уравнению

$$24y^2 - 10y - 1 = 0\,.$$

Его корнями будут числа

$$\left[\begin{array}{l} y_1=\frac{1}{2}, \\ y_2=-\frac{1}{12}. \end{array}\right.$$

Число $y_2=-\frac{1}{12}$ следует отсеять, так как оно не удовлетворяет требованию $y \ge 0$.

Тогда мы приходим к уравнению

$$cos^2 2x = \frac{1}{2},$$

которое с помощью понижения степени влечёт появление следующего результата

$$\frac{1+cos\,4x}{2}=\frac{1}{2}$$

или

$$cos\,4x=0.$$

Значит,

$$4x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

Окончательно имеем

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z.$$

<u>2 способ</u> (если не знать формулы для упрощения выражения $sin^{10}x+cos^{10}x$).

В таком случае перепишем исходное уравнение в виде

$$\left(sin^2 x\right)^5+\left(cos^2 x\right)^5=\frac{29}{16}cos^4 2x.$$

Применим теперь формулы понижения степени

$$\left(\frac{1-cos\,2x}{2}\right)^5+\left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)^5=\frac{29}{16}cos^4 2x.$$

Положим, что $cos\,2x=y$, тогда

$$\frac{1}{32}(1-y)^5+\frac{1}{32}(1+y)^5=\frac{29}{16}y^4.$$

Умножим обе части последнего равенства на 2

$$(1-y)^5+(1+y)^5=58y^4.$$

Применим теперь формулу бинома Ньютона для пятой степени:

$$1-5y+10y^2-10y^3+5y^4-y^5+1+5y+10y^2+10y^3+5y^4+y^5=58y^4.$$

После приведения подобных слагаемых, упрощаем его к виду

$$2+20y^2-48y^4=0,$$

откуда получаем

$$24y^4-10y^2-1=0.$$

Далее решение становится близким к результатам, полученным первым способом, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} y^2=\frac{1}{2}, \\ y^2=-\frac{1}{12}. \end{array}\right.$$

В итоге также получаем, что

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in Z$.

Предлагаем читателю самостоятельно оценить преимущества (или недостатки) каждого из представленных способов решения этого уравнения.

1.7.6. Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Решение отдельных тригонометрических уравнений опирается на применение следующих формул:

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)+\cos(x+y)\right);\ \sin x\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos(x-y)-\cos(x+y)\right);$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin(x+y)+\sin(x-y)\right).$$

Пример 1.7.10. Решите уравнение $\cos 4x\cdot\cos 2x=\sin 3x\cdot\sin 5x.$

Решение.

Так как

$$\cos 4x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 6x\right)$$

и

$$\sin 3x\cdot\sin 5x=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos 8x\right),$$

то

$$\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 6x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos 8x\right).$$

Далее имеем

$$\cos 6x=-\cos 8x\ .$$

Теперь применим формулу суммы косинусов:

$$2\cos 7x\cdot\cos x=0\,.$$

Получаем совокупность двух частных случаев

$$\left[\begin{array}{l}\cos 7x=0,\\ \cos x=0.\end{array}\right.$$

Далее получаем

$$\left[\begin{array}{l}7x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z,\\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Окончательно имеем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi k}{7}, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{14}+\dfrac{\pi k}{7}, k\in Z$, $\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

<u>Пример 1.7.11.</u> Решите уравнение $tg\left(x-15^\circ\right)\cdot ctg\left(x+15^\circ\right)=\dfrac{1}{3}$.

Решение.
ОДЗ:

$$\begin{cases} x-15^\circ\neq 90^\circ+180^\circ\cdot k, k\in Z, \\ x+15^\circ\neq 180^\circ\cdot n, n\in Z; \end{cases} \quad \begin{cases} x\neq 105^\circ+180^\circ\cdot k, k\in Z, \\ x\neq -15^\circ+180^\circ\cdot n, n\in Z. \end{cases}$$

Преобразуем левую часть исходного уравнения

$$tg\left(x-15^\circ\right)\cdot ctg\left(x+15^\circ\right)=\frac{sin\left(x-15^\circ\right)\cdot cos\left(x+15^\circ\right)}{cos\left(x-15^\circ\right)\cdot sin\left(x+15^\circ\right)}=$$

$$=\frac{\left(sin2x-sin30^\circ\right)}{\frac{1}{2}\left(sin2x+sin30^\circ\right)}=\frac{sin2x-\frac{1}{2}}{sin2x+\frac{1}{2}}.$$

Тогда получаем

$$\frac{sin2x-\frac{1}{2}}{sin2x+\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.$$

Применив свойство пропорции, будем иметь

$$3sin2x-\frac{3}{2}=sin2x+\frac{1}{2},$$

откуда

$$sin2x=1.$$

Далее получаем

$$2x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Окончательно,

$$x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

§ 1.8. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной подстановки

При изучении тождественных преобразований тригонометрических выражений устанавливается, что все главные тригонометрические функции могут быть выражены через тангенс половинного аргумента.

✍ Подстановку $t = tg\dfrac{x}{2}$ называют *универсальной*.

Действительно,

$$1)\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};$$

$$2)\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}};$$

$$3)\ tgx = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}};$$

$$4)\ ctgx = \frac{1}{tgx} = \frac{1}{\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}.$$

Знание этих формул оказывается весьма ценным инструментов при решении отдельных тригонометрических уравнений.

Тригонометрическое уравнение вида

$$R\left(\sin nx,\ \cos mx,\ tg\,kx,\ ctg\,px\right) = 0,$$

где R – рациональная функция; *n, m, к, p* – целые числа с помощью тригонометрических формул двойного и тройного аргумента, а также формул сложения тригонометрических функций можно свести к рациональному уравнению относительно *sin x, cos x, tg x, ctg x*. После этого исходное уравнение может быть приведено к рациональному уравнению относительно $t = tg\frac{x}{2}$ с помощью формул универсальной подстановки.

Заметим лишь, что применение этих формул может привести к сужению ОДЗ первоначального уравнения, так как $tg\frac{x}{2}$ не существует в точке $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, поэтому в таких случаях нужно проверять являются ли углы $x = \pi + 2\pi k$ корнями исходного уравнения.

Универсальную подстановку не стоит применять всякий раз, ибо это сопряжено с трудоёмкими и громоздкими преобразованиями, и результат их, как правило, непредсказуем. Верным признаком использования универсальной подстановки является наличие в записи тригонометрического уравнения хотя бы одной из функций (тангенс, котангенс), а также других функций, аргумент которых в два раза больше, чем у тангенса или котангенса.

Пример 1.8.1. Решите уравнение $\sin x + ctg\frac{x}{2} = 2.$

Решение.

Как видим, в записи уравнения присутствует функция котангенс, а также синус, аргумент которого в два раза больше, нежели у котангенса. Это благоприятная ситуация для применения универсальной подстановки.

Действительно, положим

$$tg\frac{x}{2} = t,$$

тогда

$$\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1}{t} - 2 = 0.$$

Получили дробно-рациональное уравнение

$$\frac{2t^2 + 1 + t^2 - 2t\cdot\left(1+t^2\right)}{t\cdot\left(1+t^2\right)} = 0.$$

Ясно, что далее придётся иметь дело с уравнением

$$2t^3 - 3t^2 + 2t - 1 = 0,$$

с оговоркой $t \neq 0$.

Так как сумма коэффициентов этого уравнения равна 0, то среди его корней обязательно будет число 1.

Далее воспользуемся схемой Горнера:

	2	-3	2	-1
1	2	-1	1	0

откуда получаем

$$\left(t-1\right)\cdot\left(2t^2-t+1\right)=0.$$

Очевидно, что второй множитель не имеет действительных корней, поэтому $t=1$.

Значит, приходим к уравнению

$$tg\frac{x}{2}=1,$$

откуда получаем

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z.$$

Окончательно,

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

Рассмотрим ещё один пример, в котором не будет выполняться условие кратности аргументов тангенса и других тригонометрических функций.

<u>Пример 1.8.2.</u> Решите уравнение $3\sin x+4\cos x+3tgx=-4.$

Решение.

Полагая $tg\frac{x}{2}=t$ и применяя формулы представления синуса и косинуса через тангенс половинного аргумента, сведём данное уравнение к алгебраическому:

$$\frac{3\cdot 2t}{1+t^2}+\frac{4\left(1-t^2\right)}{1+t^2}+\frac{3\cdot 2t}{1-t^2}+4=0,$$

или после упрощений

$$2t^3-3t-2=0.$$

Ясно, что

$$\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Далее получаем

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=arctg2+\pi k, k\in Z, \\ \frac{x}{2}=-arctg\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Окончательно имеем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2arctg2+2\pi k, k\in Z, \\ x_2=-2arctg\dfrac{1}{2}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $2arctg2+2\pi k, k\in Z$, $-2arctg\dfrac{1}{2}+2\pi n, n\in Z$.

§ 1.9. Рационально-тригонометрические уравнения

Так обычно называют уравнения, которые имеют вид

$$R(\sin x, \cos x)=0,$$

где под $R(\sin x, \cos x)$ понимается выражение, в котором над $\sin x$ и $\cos x$ производятся четыре алгебраических действия. При решении таких уравнений следует находить ОДЗ (либо проверку найденных решений), т.к. при выполнении преобразований может нарушаться эквивалентность получаемых уравнений, например, засчет умножения (или деления) обеих частей уравнения на выражение, которое может обращаться в нуль.

Пример 1.9.1. Решите уравнение $\dfrac{\cos 3x}{\sin 3x-2\sin x}=tgx.$

Решение.

Воспользуемся формулами тройного аргумента и перепишем уравнение в виде

$$\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{\sin x-4\sin^3 x}=\frac{\sin x}{\cos x}.$$

ОДЗ этого уравнения состоит из тех значений *x*, для которых $\cos x\neq 0$, $\sin x\neq 0$ и $\sin x\neq\pm\dfrac{1}{2}$. Решать записанные неравенства необходимости нет.

Далее переходим к уравнению

$$4\cos^4 x-3\cos^2 x=\sin^2 x-4\sin^4 x.$$

Произведём замену

$$\sin^2 x=t,$$

тогда

$$\cos^2 x=1-t, \text{ а } \cos^4 x=(1-t)^2.$$

Тогда уравнение примет вид

$$4(1-t)^2-3(1-t)=t-4t^2.$$

Далее

$$4-8t+4t^2-3+3t-t+4t^2=0$$

или

$$8t^2-6t+1=0.$$

Корнями этого квадратного уравнения будут числа

$$\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{4}, \\ t=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Но если $sin^2x=\dfrac{1}{4}$, то $\sin x=\pm\dfrac{1}{2}$, что противоречит ОДЗ. Остаётся только решить уравнение

$$sin^2x=\frac{1}{2}.$$

Применим формулы понижения степени, т.е.

$$2sin^2x=1,$$
$$1\text{-}cos2x=1,$$
$$cos2x=0.$$

Значит,

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z.$$

Окончательно,

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

§ 1.10. Метод введения вспомогательного угла

Этот метод является универсальным при решении уравнений вида

$$a\sin x+b\cos x=c,\ a^2+b^2\neq 0.$$

В простейших случаях это уравнение может быть решено и другими способами. Остановимся более подробно на этом факте, для этого возьмём уравнение $\sin x+\cos x=1$.

1 способ (***универсальная подстановка***)

Положим

$$tg\frac{x}{2}=t,$$

тогда

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}-1=0.$$

Далее

$$2t+1-t^2-1-t^2=0$$

или

$$2t-2t^2=0.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} t=0, \\ t=1. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\dfrac{x}{2}=0, \\ tg\dfrac{x}{2}=1. \end{array}\right.$$

Получаем

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{2}=\pi k, k\in Z, \\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2\pi k, k\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

2 способ (***возведение обеих частей уравнения в квадрат***)

Сразу отметим, что возведение в квадрат не является тождественным преобразованием, т.е. возможно появление посторонних корней. Поэтому после нахождения всех значений *x* обязательно нужно сделать проверку.

Возведём обе части уравнения $\sin x+\cos x=1$ в квадрат, получим

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1$ или $\sin 2x=0$.

Его решение будет иметь вид

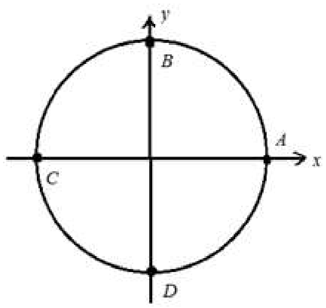

Рис. 5

$$x=\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$$

Отметим соответствующие точки на единичной окружности (см. Рис. 5). Точками, соответствующими данной серии решений, являются *A*, *B*, *C*, *D*.

Очевидно, что в положении *C*: $\cos x=-1,\ \sin x=0$, но тогда $-1+0\neq 1$.

Для положения *D* имеем: $\cos x=0,\ \sin x=-1$, но тогда $0+(-1)\neq 1$.

Только для положений *A* и *B* подстановка приводит к верному числовому равенству. Значит, ответ в виде $x=\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$ будет неверным. Из этой серии нужно выделить две отдельные серии, соответствующие точкам *A* и *B*.

Ясно, что $x_1=2\pi k, k\in Z$, $\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$.

***<u>3 способ</u>* (использование формул двойного аргумента и основного тригонометрического тождества)**

Перепишем уравнение $sin x + cos x = 1$ в виде

$$sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)+cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)=1$$

или

$$2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}-sin^2\frac{x}{2}=cos^2\frac{x}{2}+sin^2\frac{x}{2}.$$

После упрощений

$$2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}-2sin^2\frac{x}{2}=0.$$

Далее применим метод разложения на множители

$$2sin\frac{x}{2}\cdot\left(cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}\right)=0.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} sin\frac{x}{2}=0, \\ cos\frac{x}{2}-sin\frac{x}{2}=0. \end{array}\right.$$

Или

$$\left[\begin{array}{l} sin\frac{x}{2}=0, \\ tg\frac{x}{2}=1. \end{array}\right.$$

Получаем

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2}=\pi k, k\in Z, \\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Итак,

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2\pi k, k\in Z, \\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

***<u>4 способ</u>* (создание формулы косинуса разности или синуса суммы)**

Умножим обе части уравнения $sin x + cos x = 1$ на число $\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$\frac{\sqrt{2}}{2}sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

или

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x+\cos\frac{\pi}{4}\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Что даёт возможность получить косинус разности в левой части уравнения:

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} x-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z, \\ x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

А это нас приводит к следующему результату

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2\pi k, k\in Z, \\ x_2=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Приём, использованный в последнем случае, лежит в основе «*метода вспомогательного угла*».

Вернёмся к уравнению

$$a\sin x+b\cos x=c,\ a^2+b^2\neq 0.$$

Разделим обе его части на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, то существует угол φ, такой, что $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, при этом $\varphi=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (или

$\varphi=\arcsin\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ или $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$).

Тогда равенство примет вид: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\Rightarrow$,

$$x+\varphi=(-1)^k\arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k,\Rightarrow,$$

$$x=(-1)^k arcsin\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}-arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\pi k, k\in Z.$$

Пример 1.10.1. Решите уравнение $3sin\,x+4cos\,x=2.$

Решение.

Разделим обе части уравнения на число $\sqrt{3^2+4^2}=5$, получим

$$\frac{3}{5}sin\,x+\frac{4}{5}cos\,x=\frac{2}{5}.$$

На этот раз создадим формулу синуса суммы двух аргументов, положив для этого $cos\,\varphi=\frac{3}{5}$, $sin\,\varphi=\frac{4}{5}$. Тогда $tg\,\varphi=\frac{4}{3}$ и $\varphi=arctg\frac{4}{3}$.

После этого уравнение примет вид

$$cos\,\varphi\,sin\,x+sin\,\varphi\,cos\,x=\frac{2}{5}$$

или

$$sin(\varphi+x)=\frac{2}{5}.$$

Значит,

$$x+\varphi=(-1)^k arc\,sin\frac{2}{5}+\pi k, k\in Z.$$

Окончательно,

$$x=(-1)^k arc\,sin\frac{2}{5}-arctg\frac{4}{3}+\pi k, k\in Z.$$

Ответ: $(-1)^k arc\,sin\frac{2}{5}-arctg\frac{4}{3}+\pi k, k\in Z$.

5 способ **(*геометрическое толкование решения*)**

Рассмотрим ещё раз уравнение

$$a\,sin\,x+b\,cos\,x=c,\ a^2+b^2\neq 0.$$

Поиск его решения сводится к отысканию точек пересечения прямой $aX+bY=c$ с окружностью $X^2+Y^2=1$.

Пример 1.10.2. Решите уравнение $4cos\,x+3sin\,x=5.$

Решение.

Подстановкой $X=cos\,x$ и $Y=sin\,x$ данное уравнение приводится к системе алгебраических уравнений

$$\begin{cases}4X+3Y=5,\\ X^2+Y^2=1.\end{cases}$$

Для нахождения X имеем уравнение

$$X^2+\left(\frac{5-4X}{3}\right)^2=1,$$

откуда

$$X^2+\frac{25-40X+16X^2}{9}=1,$$

$$9X^2+25-40X+16X^2=9,$$

$$25X^2-40X+16=0,$$

$$(5X-4)^2=0.$$

Значит,

$$X=\cos x=\frac{4}{5},$$

при этом

$$Y=\sin x=\frac{3}{5}.$$

Такое возможно лишь в случае, когда x принадлежит первой четверти, т.е. потребуем

$$2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z.$$

Поэтому

$$x=\arccos\frac{4}{5}+2\pi k, k\in Z.$$

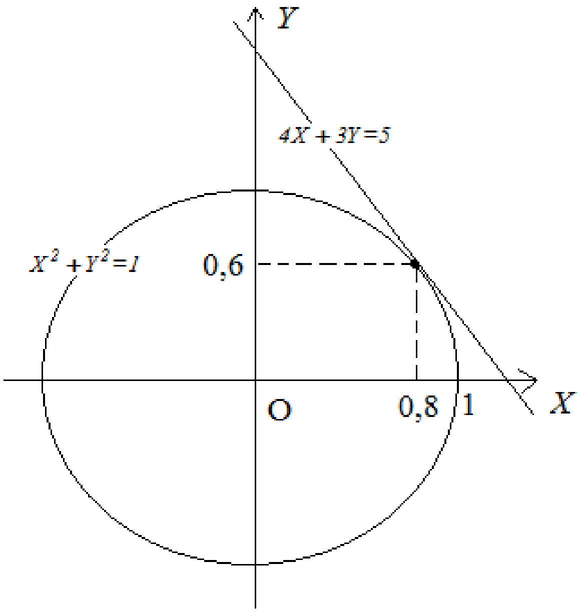

Рис. 6

Ответ: $\arccos\frac{4}{5}+2\pi k, k\in Z.$

<u>Пример 1.10.3.</u> Решите уравнение $\sin 5x+\cos 5x=\sqrt{2}\cos 13x.$

Решение.

Разделим обе части данного уравнения на $\sqrt{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 5x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 5x=\cos 13x$$

или

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin 5x+\cos\frac{\pi}{4}\cos 5x=\cos 13x.$$

Применяя формулу косинуса разности, будем иметь

$$\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 13x.$$

Воспользуемся теперь формулой разности косинусов

$$-2\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}-13x}{2}\cdot\sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}+13x}{2}=0$$

или

$$-2\sin\frac{-8x-\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{18x-\frac{\pi}{4}}{2}=0,$$

откуда получаем

$$2\sin\left(4x+\frac{\pi}{8}\right)\cdot\sin\left(9x-\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Переходим к равносильной совокупности двух простейших уравнений

$$\left[\begin{array}{l} 4x+\frac{\pi}{8}=\pi k, k\in Z, \\ 9x-\frac{\pi}{8}=\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Выполнив преобразования, окончательно получаем

$$\left[\begin{array}{l} x_1=-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z, \\ x_2=\frac{\pi}{72}+\frac{\pi n}{9}, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{32}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z,\ \frac{\pi}{72}+\frac{\pi n}{9}, n\in Z$.

§ 1.11. Уравнения, содержащие выражения $\sin x\pm\cos x$ и $\sin 2x$ (или $\sin x\cdot\cos x$)

Рассмотрим уравнение

$$\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1.$$

Обсудим возможности его решения. С одной стороны, имеем возможность возвести обе части уравнения в квадрат, предварительно перенеся третье слагаемое в правую часть. При этом надо помнить, что возведение в квадрат не является тождественным преобразованием, а, значит, могут появиться посторонние корни. Имеем:

$$(\sin x+\cos x)^2=(1-\sin x\cos x)^2$$

или

$$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=1-2\sin x\cos x+\sin^2 x\cos^2 x.$$

Упростив, будем иметь

$$2\sin 2x=\frac{1}{4}\sin^2 2x.$$

Разложив на множители, приведём его к виду

$$\sin 2x(8-\sin 2x)=0.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2x=0, \\ \sin 2x=8. \end{array}\right.$$

Очевидно, что только первое уравнение совокупности имеет решение

$$2x=\pi k, k \in Z.$$

Итак,

$$x=\frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Памятуя о возможности появления посторонних корней, сделаем проверку решений в пределах одного периода, т.е. испытаем числа 0, $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$. Из них уравнению удовлетворяют только два корня 0 и $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, получаем две серии решений

$$x_1 = 2\pi k, k \in Z, \;\; x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

Возникает вопрос, нет ли альтернативного способа решения уравнений подобного вида?

Оказывается, что уравнения вида $P(\sin x \pm \cos x;\ \sin x \cos x)=0$, где $P(x, y)$ – многочлен решаются с помощью замены неизвестных:

$$\sin x + \cos x = u \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{u^2-1}{2},$$

$$\sin x - \cos x = v \Rightarrow \sin x \cdot \cos x = \frac{1-v^2}{2}.$$

Уравнение, рассмотренное ранее, безусловно, относится к этому виду.

Воспользуемся теперь этим методом. Положим $\sin x + \cos x = u$, тогда $\sin x \cdot \cos x = \frac{u^2-1}{2}$. После чего уравнение примет вид

$$u + \frac{u^2-1}{2} = 1$$

или

$$u^2 + 2u - 3 = 0.$$

По теореме Виета:

$$\left[\begin{array}{l} u_1=1, \\ u_2=-3. \end{array}\right.$$

Ясно, что только первое уравнение совокупности разрешимо. Оно имеет вид

$$\sin x + \cos x = 1.$$

С ним мы имели дело в **§ *1.10.*** Поэтому, воспользовавшись результатом, полученным ранее, можем заключить, что

$$x_1 = 2\pi k, k \in Z, \quad x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z,$$

а это полностью совпадает с итогом, полученным ранее в этом параграфе.

§ 1.12. Решение уравнений умножением на некоторую тригонометрическую функцию

Метод домножения используется, когда выражение, содержащееся в тригонометрическом уравнении, преобразовывается путем умножения и деления соответствующих членов на подходящую тригонометрическую функцию. Например:

- для произведения вида $\cos x \cos 2x \cdot \ldots \cdot \cos\left(2^k x\right)$ рекомендуется умножение и деление на $2^{k+1} \sin x$;
- суммы $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$ и $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$ преобразуются умножением и делением на $2\sin\frac{x}{2}$ с последующим применением формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму (или разность).

<u>Пример 1.12.1.</u> Решите уравнение $2tg\pi x + 3ctg\pi x = 7$.

Решение.

Так как $tg\pi x \neq 0$ (иначе слагаемое, содержащее $ctg\pi x$, лишено смысла), то, умножая обе части уравнения на $tg\pi x$, получим

$$2tg^2 \pi x - 7tg\,\pi x + 3 = 0.$$

Пусть теперь $tg\pi x = t$, тогда будем решать квадратное уравнение

$$2t^2 - 7t + 3 = 0,$$

корнями которого являются числа

$$t_1 = 3; t_2 = \frac{1}{2}.$$

Ясно, что либо $tg\pi x = 3$, либо $tg\pi x = \frac{1}{2}$.

Имеем

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{\pi} arctg 3 + n, n \in Z, \\ x_2 = \frac{1}{\pi} arctg \frac{1}{2} + k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{1}{\pi} arctg 3 + n, n \in Z$; $\frac{1}{\pi} arctg \frac{1}{2} + k, k \in Z$.

<u>Пример 1.12.2.</u> Решите уравнение $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$.

Решение.

Заметим, что числа $x=\pi n, n\in Z$ не являются решениями уравнения, поэтому, умножив обе части на $16\sin x$, получим

$$16\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\sin x.$$

Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента несколько раз:

$$8\sin 2x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\sin x,$$
$$4\sin 4x\cos 4x\cos 8x=\sin x,$$
$$2\sin 8x\cos 8x=\sin x,$$
$$\sin 16x-\sin x=0,$$

где $x\neq \pi n, n\in Z$.

Далее применим формулу разности синусов, получим

$$2\sin\frac{15x}{2}\cos\frac{17x}{2}=0,$$

откуда

$$\sin\frac{15x}{2}=0 \quad \text{или} \quad \cos\frac{17x}{2}=0,$$

тогда

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\dfrac{2\pi n}{15}, n\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{17}+\dfrac{2\pi k}{17}, k\in Z. \end{array}\right.$$

С учётом условия $x\neq \pi n$, получаем окончательный результат.

Ответ: $\dfrac{2\pi n}{15}, n\in Z$, $\dfrac{\pi}{17}+\dfrac{2\pi k}{17}, k\in Z$, $n\neq 15m,\quad k\neq 17p+8,\ n,p\in Z$.

Пример 1.12.3. Решите уравнение $\cos x+\cos 2x+\cos 3x=-\dfrac{1}{2}$.

Решение.

Умножим обе части уравнения на $2\sin\dfrac{x}{2}$, получим при условии $x\neq 2\pi k, k\in Z$, равносильное уравнение

$$2\left(\cos x\cdot\sin\frac{x}{2}+\cos 2x\cdot\sin\frac{x}{2}+\cos 3x\cdot\sin\frac{x}{2}\right)=-\sin\frac{x}{2}.$$

Применяя формулы преобразования произведения синуса на косинус в сумму, получим

$$2\left\{\frac{1}{2}\left[-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}\right]+\frac{1}{2}\left[-\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{5x}{2}\right]+\frac{1}{2}\left[-\sin\frac{5x}{2}+\sin\frac{7x}{2}\right]\right\}=-\sin\frac{x}{2}$$

или

$$-\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{3x}{2}+\sin\frac{5x}{2}-\sin\frac{5x}{2}+\sin\frac{7x}{2}=-\sin\frac{x}{2}.$$

Откуда имеем

$$\sin\frac{7x}{2}=0,$$

что влечёт

$$\frac{7x}{2}=\pi k, k\in Z.$$

Окончательно получаем

$$x=\frac{2\pi k}{7}, k\in Z.$$

Ответ: $\frac{2\pi k}{7}, k\in Z$.

Пример 1.12.4. Решите уравнение

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=0.$$

Решение.

Воспользуемся известной формулой[2]

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Тогда исходное уравнение равносильно для всех x, кроме $x=2\pi l, l\in Z$ уравнению, которое получается приравниванием к нулю числителя соответствующей дроби

$$\sin\frac{nx}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)x}{2}=0.$$

Тогда имеем:

$$\left[\begin{aligned} \frac{nx}{2}&=\pi m, m\in Z,\\ \frac{(n+1)x}{2}&=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.\end{aligned}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{aligned} x_1&=\frac{2\pi m}{n}, m\in Z,\\ x_2&=\frac{\pi(2k+1)}{n+1}, k\in Z.\end{aligned}\right.$$

После исключения из полученного множества решений точек $x=2\pi l, l\in Z$ (для которых $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+...+\cos nx=n\neq 0$), получаем окончательный результат.

---

[2] См., например, книгу А.И. Новикова «Тригонометрические функции, уравнения и неравенства» М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. (стр. 197)

Ответ: $\frac{2\pi m}{n}, m \in Z, m \neq n\tilde{m}, \tilde{m} \in Z; \frac{\pi(2k+1)}{n+1}, k \in Z$.

§ 1.13. Решение уравнений, в записи которых имеется многоточие (неизвестное количество слагаемых)

В **Примере 1.12.4.** из предыдущего параграфа мы столкнулись с ситуацией, когда в аналитической записи тригонометрического уравнения присутствует многоточие, которое указывает на неопределенность числа слагаемых, входящих в это уравнение.

Как правило, для таких случаев приходится применять такое преобразование, которое было бы направлено на уничтожение подавляющего большинства членов уравнения.

Рассмотрим, как это работает на примере.

Пример 1.13.1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение.

Начнём преобразование левой части уравнения с упрощения первого слагаемого:

$$\frac{1}{\sin 2x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x - \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}{\sin 2x} = \frac{2\cos^2 x}{\sin 2x} - \frac{\cos 2x}{\sin 2x} =$$
$$= \frac{2\cos^2 x}{2\sin x \cos x} - ctg 2x = ctg x - ctg 2x.$$

Применив такое преобразование к каждому слагаемому левой части уравнения, получим

$$\left(ctg x - ctg 2x\right) + \left(ctg 2x - ctg 4x\right) + \ldots + \left(ctg 2^{n-1} x - ctg 2^n x\right) = \frac{1}{\sin x}.$$

После раскрытия всех скобок, очевидно, получим

$$ctg x - ctg 2^n x = \frac{1}{\sin x}.$$

Воспользуемся теперь формулой разности котангенсов

$$ctg\,\alpha - ctg\,\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta},$$

получим

$$\frac{\sin\left(2^n x - x\right)}{\sin x \cdot \sin\left(2^n x\right)} = \frac{1}{\sin x}.$$

Откуда

$$\sin\left(2^n x - x\right) = \sin\left(2^n x\right),$$

с оговоркой, что $\sin x \neq 0$.

Воспользуемся условием равенства синусов (см. ***§ 1.3.***):

$$2^n x - x = (-1)^k 2^n x + \pi k, k \in Z.$$

При чётных значениях k получим:

$$x = -\pi k, k \in Z,$$

но это значение не является корнем данного уравнения, так как при подстановке его в исходное уравнение теряется смысл.

При нечётных значениях k имеем:

$$2^n x - x = \pi k - 2^n x, k \in Z$$

или

$$(2 \cdot 2^n - 1)x = \pi k, k \in Z.$$

Значит,

$$x = \frac{\pi k}{2^{n+1} - 1}, k \in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi k}{2^{n+1} - 1}, k \in Z$.

§ 1.14. Тригонометрические уравнения, решаемые выделением суммы квадратов

Весьма часто при решении тригонометрических уравнений выполнение многочисленных тождественных преобразований, применение различных тригонометрических формул не даёт желаемого результата, т.е. уравнение не становится проще и не сводится ни к одному из уже известных типов. В таких случаях следует попробовать ещё один метод, суть которого состоит в выделении суммы квадратов, которая должна оказаться равной нулю.

Иными словами все выполняемые преобразования должны быть направлены на то, чтобы уравнение приняло вид

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \ldots + f_n^2(x) = 0. \qquad (1.14.1)$$

Как известно, это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0, \\ \quad \ldots \\ f_n(x) = 0. \end{cases} \qquad (1.14.2)$$

Таким образом, решением исходного уравнения будут те, и только те значения x, которые удовлетворяют одновременно всем уравнениям системы (1.14.2).

<u>Пример 1.14.1.</u> Решите уравнение $\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x.$

Решение.

Преобразуем данное уравнение к виду

$$\left(\sin x-\sin 3x\right)+2\sin 2x=3,$$

и далее, применив формулу разности синусов

$$-2\sin x\cos 2x+2\sin 2x-3=0$$

или

$$2\sin x\cos 2x-2\sin 2x+3=0.$$

Дополним имеющиеся удвоенные произведения $2\sin x\cos 2x$ и $2\sin 2x$ до полных квадратов:

$$\left(\sin^2 x+2\sin x\cos 2x+\cos^2 2x\right)+\left(\sin^2 2x-2\sin 2x+1\right)+3=$$

$=\sin^2 x+\cos^2 2x+\sin^2 2x+1$, т.е.

$$\left(\sin x+\cos 2x\right)^2+\left(\sin 2x-1\right)^2+3=\sin^2 x+2,$$

откуда

$$\left(\sin x+\cos 2x\right)^2+\left(\sin 2x-1\right)^2+\cos^2 x=0.$$

Но сумма квадратов равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю.

Поэтому далее переходим к равносильной системе тригонометрических уравнений:

$$\begin{cases}\sin x+\cos 2x=0,\\ \sin 2x=1,\\ \cos x=0.\end{cases}$$

Решим третье (самое простое) уравнение этой системы, получим

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z.$$

Подставляя эти значения переменной во второе уравнение системы, будем иметь

$$\sin 2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)=\sin\left(\pi+2\pi k\right)=0\neq 1,$$

т.е. значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ не удовлетворяют второму уравнению системы, что означает лишь одно, – система несовместна.

Ответ: нет решений

<u>Пример 1.14.2.</u> Решите уравнение

$$\cos^4 x-\cos^3 x+\frac{9}{4}\cos^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x.$$

Решение.

Опыт решения предыдущего примера подсказывает, что этот метод наиболее применим в случае, когда в записи уравнения присутствует удвоенное произведение, вокруг которого и строится полный квадрат.

У нас роль удвоенного произведения выполняет выражение

$$\sqrt{3}\sin 2x = 2\sin x\left(\sqrt{3}\cos x\right).$$

Тогда преобразуем исходное уравнение к виду

$$\cos^4 x - \cos^3 x + \frac{9}{4}\cos^2 x + 1 + \left(\sin^2 x - 2\sin x\left(\sqrt{3}\cos x\right) + 3\cos^2 x\right) =$$

$$= \sin^2 x + 3\cos^2 x$$

или

$$\cos^4 x - \cos^3 x + \frac{9}{4}\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x + \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2 =$$

$$= \sin^2 x + 3\cos^2 x,$$

откуда

$$\cos^4 x - \cos^3 x + \frac{9}{4}\cos^2 x - 2\cos^2 x + \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2 = 0.$$

Далее получаем

$$\cos^4 x - \cos^3 x + \frac{1}{4}\cos^2 x + \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2 = 0,$$

что влечёт

$$\cos^2 x\left(\cos^2 x - \cos x + \frac{1}{4}\right) + \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2 = 0$$

и далее

$$\cos^2 x\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2 = 0.$$

Окончательно выделяем сумму квадратов

$$\left(\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x\right)^2 + \left(\sqrt{3}\cos x - \sin x\right)^2 = 0.$$

Теперь переходим к равносильной системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x - \dfrac{1}{2}\cos x = 0, \\ \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0. \end{cases}$$

Далее получим:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}\sin x = 0, \end{cases}$$

что влечёт

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z, \end{array} \right. \\ cos\left(x + \dfrac{\pi}{6} \right) = 0. \end{cases}$$

Решая второе уравнение системы, получим

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z$$

или

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in Z .$$

Окончательно будем иметь

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi m, m \in Z .$$

Сопоставляя серии, полученные из уравнений системы, заключаем, что решением исходного уравнения будет

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z .$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi l, l \in Z$.

§ 1.15. Метод оценки левой и правой частей уравнений

Предварительная оценка левой и правой частей уравнения иногда помогает решить уравнение или убедиться в том, что оно не имеет решений.

Так, например, можно использовать свойство ограниченности функций $y = sin\, x$, $y = cos\, x$, т.е. следующие неравенства:

$$|sin\, x| \le 1, \qquad (1.15.1)$$

$$|cos\, x| \le 1, \qquad (1.15.2)$$

$$|sin\, x \pm cos\, x| \le \sqrt{2}. \qquad (1.15.3)$$

<u>Пример 1.15.1.</u> Решите уравнение $2sin^5 x + 3cos^8 x = 5$.

Решение.

Достаточно грубой оценки левой части этого уравнения. Так как имеют место неравенства (1.15.1) и (1.15.2), то

$$\left|2sin^5 x + 3cos^8 x\right| \le 2\left|sin^5 x\right| + 3cos^8 x \le 5,$$

причём это неравенство могло бы стать равенством лишь в случае, когда $sin\, x = 1$ и $|cos\, x| = 1$, что невозможно, т.к. точки экстремума у графиков синуса и косинуса стандартного аргумента x никогда не совпадают.

Ответ: нет решений.

Пусть дано уравнение вида

$$f(x)=g(x).$$

Если функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает на некотором промежутке, то если на этом промежутке уравнение имеет корень, то этот корень единственный и в зависимости от вида функции его можно найти подбором.

Если функция $f(x)$ на некотором промежутке ограниченна сверху, причем

$$\max_{x\in X} f(x)=A,$$

а функция $g(x)$ ограниченна снизу, причем

$$\max_{x\in X} g(x)=A,$$

то уравнение $f(x)=g(x)$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x)=A, \\ g(x)=A. \end{cases}$$

<u>**Пример 1.15.2.**</u> Решите уравнение $\sin^5 x+\cos^5 x=2-\sin^4 x$.

Решение.

Так как

$$\sin^5 x\le \sin^2 x,\ \ \cos^5 x\le \cos^2 x,$$

то

$$\sin^5 x+\cos^5 x\le \sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

а

$$2-\sin^4 x\ge 1.$$

Следовательно, данное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} \sin^5 x+\cos^5 x=1, \\ 2-\sin^4 x=1. \end{cases}$$

Ясно, что первое уравнение системы имеет решения

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2\pi n, n\in Z, \\ x_2=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

А второе уравнение имеет решение

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi l, l\in Z.$$

Очевидно, что общим решением обоих уравнений системы является серия

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi m, m\in Z$.

Замечание. Кроме того, можно использовать графики функций для нахождения точки пересечения, а также производную для исследования наибольшего и наименьшего значений выражений, входящих в тригонометрическое уравнение.

§ 1.16. Отбор корней тригонометрических уравнений

В процессе решения тригонометрических уравнений весьма часто приходится (особенно, при решении методом разложения на множители) исследовать полученные серии значений неизвестной величины, среди которых находятся искомые решения. Такое исследование, как правило, обусловлено отбором корней. Отбор корней может быть связан:

1) с проверкой дополнительных условий, сопровождающих тригонометрическое уравнение (ограничения на количество корней, конкретный промежуток расположения корней, область допустимых значений переменной и т.п.);
2) с выявлением корней, не удовлетворяющих ОДЗ уравнения;
3) с необходимостью объединения полученных серий решений.

Рассмотрим некоторые способы отбора корней.

1 способ (с использованием тригонометрической окружности)

Способ отбора корней с помощью тригонометрической окружности применяется лишь только в случае, когда число 2π является общим периодом (не обязательно наименьшим общим положительным периодом) для всех серий значений переменной.

Пример 1.16.1. Решите уравнение $\frac{\cos 3x}{\sin 2x}=0$.

Решение.

ОДЗ переменной – это $x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z.$

Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 3x=0,\\ x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z.\end{cases}$$

Решая первое уравнение системы, получим, что

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3},k\in Z.$$

Для завершения решения необходимо из серии значений переменной x, записанной последней формулой, исключить значения $x=\frac{\pi n}{2},n\in Z.$

Для этого построим тригонометрическую окружность (см. Рис 7), на которой «жирными» точками отметим числа из серии решений уравнения $cos3x=0$ (таких точек будет 6). Далее, точки на окружности, соответствующие значениям $x=\frac{\pi n}{2},n\in Z$, окружим квадратиками (таковых точек 4).

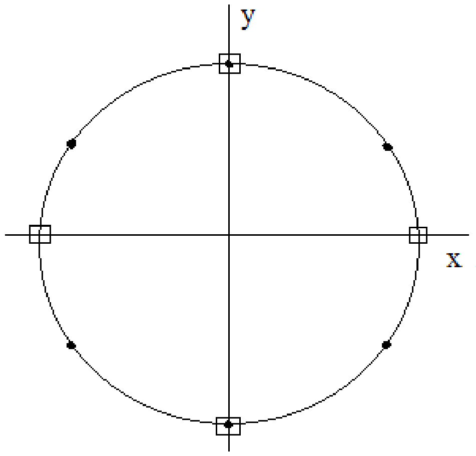

Рис. 7

Таким образом, из рисунка видно, что искомыми значениями являются $x_1=\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in Z$ и $x_2=\frac{5\pi}{6}+\pi m,m\in Z$.

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5\pi}{6}+\pi m\right\},k,m\in Z.$

<u>2 способ</u> <u>(с использованием числовой прямой)</u>

<u>Пример 1.16.2</u>. Решите уравнение $\frac{sin2x}{sin\frac{2x+\pi}{3}}=0$.

Решение.

ОДЗ переменной: $\frac{2x+\pi}{3}\neq\pi n,n\in Z.$ Что приводит к условию $x\neq-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2},n\in Z.$

Таким образом, данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} sin2x=0, \\ x\neq-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2},n\in Z, \end{cases}$$

решениями которой являются значения $x=\frac{\pi k}{2},k\in Z.$

Далее необходимо из множества нулей числителя левой части исходного уравнения исключить нули знаменателя. Для этого отметим на числовой прямой «жирными» точки, которые соответствуют значениям $x=\frac{\pi k}{2},k\in Z$, а квадратиками окружим те точки, которые соответствуют значениям $x=-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi n}{2}, n\in Z.$

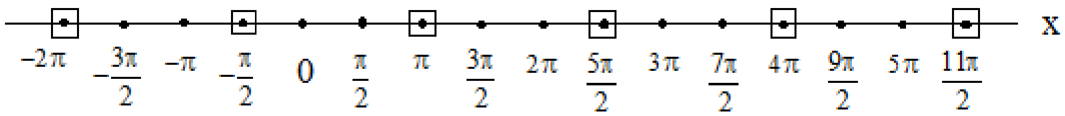

Рис. 8

Искомыми значениями x тогда будут $x_1=\frac{3\pi n}{2}, n\in Z$ и $x_2=\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi m}{2}, m\in Z$.

Ответ: $\left\{\frac{3\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}+\frac{3\pi m}{2}\right\}, n,m\in Z.$

3 способ (алгебраический способ отбора корней)

Алгебраический способ отбора корней является одним из наиболее универсальных способов и связан напрямую с решением в целых числах уравнений вида

$$a_1\cdot n+b_1\cdot m=c_1, \qquad (1.16.1)$$

где a_1, b_1, c_1 – заданные целые числа, $a_1\neq 0, b_1\neq 0$, которое ***называют простейшим линейным диофантовым уравнением***.

Рассмотрим алгоритм решения таких уравнений.

Пусть d = НОД $(a_1;b_1)$. Тогда можно заметить, что если пара чисел $(n;m)$ является решением уравнения (1.16.1), то число c_1 делится на d. Если же c_1 не делится на d, то уравнение (1.16.1) целочисленных решений не имеет.

Алгоритм нахождения целочисленных решений уравнения (1.16.1) состоит в следующем:

1) находим d = НОД $(a_1;b_1)$;

2) если число c_1 делится на d, то делим обе части уравнения (1.16.1) на d и записываем уравнение

$$a\cdot n+b\cdot m=c, \qquad (1.16.2)$$

где

$$a=\frac{a_1}{d}, b=\frac{b_1}{d},$$

причем целые числа a и b не имеют общих делителей, отличных от 1 и -1;

3) находим пару $(n_0;m_0)$, являющуюся решением уравнения (1.16.2).

Такая пара всегда существует и для её нахождения можно поступить следующим образом: сначала переписать уравнение (1.16.2) в виде

$$m=\frac{c-a\cdot n}{b};$$

придавая неизвестному n различные целочисленные значения от 0 до b–1, мы перебором найдем такое число n_0, при котором число $m = m_0$ также будет целым;

4) если пара $(n_0; m_0)$ – целочисленное решение уравнения (1.16.2), то все целочисленные решения уравнения (1.16.2), а, значит, и уравнения (1.16.1), – это пары $(n_0 + b \cdot k; m_0 - a \cdot k)$, где $k \in Z$, и только они.

Пример 1.16.3. Решите уравнение $sin 2x + sin 8x = 0$.

Решение.

Применим формулу суммы синусов:

$$2 \cdot sin\frac{2x+8x}{2} \cdot cos\frac{2x-8x}{2} = 0.$$

То есть получим уравнение

$$2 sin 5x \cdot cos 3x = 0,$$

из которого следует совокупность двух простейших уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} sin 5x = 0, \\ cos 3x = 0. \end{array}\right.$$

Откуда получаем две серии решений:

$$\left[\begin{array}{l} 5x = \pi k, k \in Z, \\ 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

Далее

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi k}{5}, k \in Z, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z. \end{array}\right.$$

Теперь применим алгебраический метод отбора корней, для чего составим равенство

$$\frac{\pi k}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}.$$

Преобразуем его к более простому виду

$$6k - 10n = 5.$$

Получили простейшее линейное диофантово уравнение, которое не имеет целочисленных решений, т.к. НОД (6; 10) = 2, а число 5 не делится нацело на 2. Значит, две полученные серии не имеют общих корней.

Ответ: $\frac{\pi k}{5}, k \in Z; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$.

Пример 1.16.4. Решите уравнение $\frac{cos 7x}{sin 5x - 1} = 0$.

Решение.

Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} cos7x = 0, \\ sin5x \neq 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ 5x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, \\ x \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}. \end{cases}$$

Здесь и далее $n, k \in Z$.

Таким образом, корнями исходного уравнения будут числа $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, где n – все целые числа, для которых:

$$\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} \neq \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}.$$

Найдем теперь все неподходящие нам значения *n*. Для чего будем решать уравнение $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7} = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$, сводящееся к простейшему линейному диофантову уравнению

$$5n = 1 + 14k.$$

Применим к нему «метод последовательного выделения целой части»:

$$n = \frac{1+14k}{5},$$

$$n = 2k + \frac{1+4k}{5},$$

$$n - 2k = \frac{1+4k}{5},$$

$$n - 2k \in Z \Rightarrow \frac{1+4k}{5} = a, a \in Z.$$

Теперь переходим к решению уравнения $4k + 1 = 5a$,

$$k = \frac{5a-1}{4} = a + \frac{a-1}{4}.$$

Значит, что $\frac{a-1}{4} = t, t \in Z, \quad a = 4t + 1.$

Делаем обратные замены:

$$k = a + \frac{a-1}{4} = a + t = 4t + 1 + t = 5t + 1.$$

Теперь переходим к восстановлению *n*:

$$n = 2k + \frac{1+4k}{5} = 2k + a = 2(5t+1) + 4t + 1 = 14t + 3.$$

Таким образом, все неподходящие нам *n*имеют вид: $n = 14t + 3$, где $t \in Z$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$, где $n\in Z, n\neq 14t+3, \forall\, t\in Z$.

В заключении отметим, что многие уравнения могут быть решены различными способами, например, уравнение $a\sin x+b\cos x=c$ можно решить:

1) посредством универсальной подстановки;
2) посредством введения вспомогательного угла $\left(\pm\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)=c\right)$;
3) выразить одну тригонометрическую функцию через другую;
4) возвести обе части уравнения в квадрат (получается уравнение, приводящееся к однородному): $a^2\sin^2 x+2ab\cos x\sin x+b^2\cos^2 x=c^2$; если $a=b$, то последующее уравнение примет вид: $ab\sin 2x=c^2-a^2$;
5) рассмотрим тождество $(a\sin x+b\cos x)^2+(a\cos x-b\sin x)=a^2+b^2$, в силу данного уравнения первую скобку можно заменить, получим: $(a\cos x-b\sin x)^2=a^2+b^2-c^2$, следовательно, значение $\sin x$ и $\cos x$ могут быть найдены из системы уравнений: $\begin{cases} a\sin x+b\cos x=c; \\ -b\sin x+a\cos x=\pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}. \end{cases}$; x определяется по найденным значениям $\sin x$ и $\cos x$.

Первый способ не приводит к появлению посторонних решений. Потеря решений имеет место случай, когда $b=-c$. Второй и пятый способ также не приводит ни к потере, ни к появлению посторонних решений. При третьем и четвертом способе возможно появление посторонних решений и требуется проверка или отбор корней.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Азаров, А.И**. Тригонометрические уравнения: Учебное пособие [Текст] / А.И. Азаров, О.М. Гладун, В.С. Федосенко. ООО Тривиум, 1994. 160 с. Алгебра. Базовый курс с решениями и указаниями (ЕГЭ, олимпиады, экзамены в вуз). Учебно-методическое пособие [Текст] / Н.Д. Золотарёва, Ю.А. Попов, Н.Л. Семендяева, М.В. Федотов. М.: Фойлис, 2010. 568 с.
2. **Алексеев, В.М.** Элементарная математика. Решение задач [Текст] / В.М. Алексеев Киев: Вища школа, 1983. 351 с.
3. **Амелькин, В.В., Рабцевич, Т.И.** Тригонометрия. На страницах и за страницами школьного учебника [Текст] / В.В. Амелькин, Т.И. Рабцевич. Минск: Красико-Принт, 2011. 256 с.
4. **Ашкинузе В.Г., Шоластер Н.Н.** Алгебра и элементарные функции. Пособие для старших классов средней школы [Текст] / В.Г. Ашкинузе, Н.Н. Шоластер. М.: Просвещение, 1964. 544 с.
5. **Бардушкин, В**. Тригонометрические уравнения. Отбор корней / В. Бардушкин, А. Прокофьев, Т.Соколова, Т. Фадеичева [Текст] // Математика, №12, 2005. С. 23–27.
6. **Башмаков, М.И.** Школьная математика. Методическое пособие для подготовки к ЕГЭ [Текст] / М.И. Башмаков, Ш.И. Цыганов. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. 271 с.
7. **Болтянский, В.Г.** Лекции и задачи по элементарной математике [Текст] / В.Г. Болтянский, Ю.В. Сидоров, М.И. Шабунин. М.: Наука,Физматлит, 1971. 592 с.
8. **Вересова, Е.Е.** Практикум по решению математических задач: для пед. ин-тов по мат. и физ. спец.[Текст] / Е.Е. Вересова, Н.С. Денисова, Т.Н. Полякова. М.: Просвещение, 1979. 239 с.
9. **Выгодский, М.Я.** Справочник по элементарной математике [Текст] / М.Я. Выгодский. М., 2006. 509 с.
10. **Ельчанинова, Г.Г., Мельников, Р.А.** Мультидисциплинарный подход к изучению тригонометрии будущими учителями математики [Текст] / Г.Г. Ельчанинова, Р.А. Мельников // Балтийский гуманитарный журнал, 2016. Том 5, № 4 (17). С. 211-215.
11. **Зайцев, В.В.** Элементарная математика: Повторительный курс [Текст] / В.В. Зайцев, В.В. Рыжков, М.И. Сканави; Под ред. В.В. Рыжкова. 3. изд., стереотип. М.: Наука, 1976. 592 с.
12. **Иванов, О.А.** Избранные главы элементарной математики [Текст] / О.А. Иванов; С.-Петербург.гос. ун-т. СПб: Изд-во СПб.ун-та, 1995. 223 с.
13. **Литвиненко, В.Н.** Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов и учителей [Текст]/ В.Н. Литвиненко, А.Г. Мордкович. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Просвещение, 1991. 348 с.

14. **Мирер, В.С.** Тригонометрические преобразования [Текст] / В.С. Мирер. М.: MarketDS, 2003. 278 с.
15. **Моденов, П.С.** Сборник задач по специальному курсу элементарной математики: учебное пособие для вузов [Текст] / П.С. Моденов. М.: Сов. наука, 1957. 666 с.
16. **Моденов, В.П.** Математика: Пособие для поступающих в вузы [Текст] / В.П. Моденов. М.: ООО «Издательство Новая Волна», 2002. 800 с.
17. **Новиков, А.И.** Тригонометрические функции, уравнения и неравенства [Текст] / А.И. Новиков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 260 с.
18. **Новоселов, С.И.** Специальный курс тригонометрии: для пед. ин-тов и гос. ун-тов. 5-е изд. [Текст] / С.И. Новоселов. М.: Высшая школа, 1967. 536 с.
19. **Новоселов, С.И.** Обратные тригонометрические функции: Пособие для учителей. 4-е изд. [Текст] / С.И. Новоселов. М.: Учпедгиз, 1956.127 с.
20. **Полякова, Т.Н.** Практикум по решению задач (Тригонометрия) [Текст]: учеб. пособие для студентов / Т. Н. Полякова.; М-во прос. РСФСР, Моск. гос. пед. ин-т имени В. И. Ленина, кафедра алгебры. М.: Б. и., 1976. 121 с.
21. Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст] / Под ред. Г.Н. Яковлева. М.: Наука, 1981. 608с.
22. Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст] / Под ред. М.И. Сканави. М.: Высшая школа, 1988.
23. **Туманов, С.И.** Поиски решения задачи [Текст] / С.И. Туманов. М.: Просвещение, 1969. 280 с.
24. **Фалин, Г.И.** Обратные тригонометрические функции: 10-11 классы: определения обратных тригонометрических функций, свойства arc-функций, примеры решения задач, задачи для самостоятельного решения, ответы [Текст] / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. Изд. 2-е, стер. М.: Экзамен, 2013. 221 с.
25. **Шарыгин, И.Ф.** Факультативный курс по математике. Решение задач Учеб. пособие для 11-го кл. сред.шк. [Текст] / И.Ф. Шарыгин. М.: Просвещение, 1991. 383 с.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА I. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1.1. Простейшие тригонометрические уравнения ……………………….. 3
1.1.1. Уравнение $sin\ x=a$………………………………………………. 4
1.1.2. Уравнение$cos\ x=a$……………………………………………… 6
1.1.3. Уравнение$tg\ x=a$……………………………………………….. 7
§ 1.2. Решение тригонометрических уравнений разложением на множители …………………………………………………………………… 10
§ 1.3. Решение тригонометрических уравнений вида $sin(\alpha x)=sin(\beta x)$, $cos(\alpha x)=cos(\beta x)$, $tg(\alpha x)=tg(\beta x)$ ……………………………………... 12
§ 1.4. Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с одной и той же тригонометрической функцией одного и того же аргумента, и сводящиеся к ним……………………………………………………….. 18
1.4.1. Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с одной и той же тригонометрической функцией одного и того же аргумента…… 19
1.4.2. Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с ко-функциями одного и того же аргумента…………………………………….. 20
1.4.3.Тригонометрические уравнения, содержащие выражения с разноимёнными тригонометрическими функциями одного и того же аргумента 21
§ 1.5. Однородные тригонометрические уравнения первого порядка…….. 22
§ 1.6. Однородные тригонометрические уравнения второго порядка и сводящиеся к ним ………………………………………………………. 22
§ 1.7. Уравнения, содержащие выражения с тригонометрическими функциями различных аргументов ………………………………………. 25
1.7.1. Уравнения, содержащие выражения с разноименными тригонометрическими функциями различных кратных аргументов………………….. 25
1.7.2. Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени… 26
1.7.3. Уравнения, решаемые с помощью формул тройного аргумента…. 27
1.7.4. Уравнения, решаемые с помощью формул разности и суммы тригонометрических функций…………………………………………………….. 29
1.7.5. Уравнения вида $f\left(sin^{2k}x \pm cos^{2k}x; sin2mx; cos2nx\right)=0$, где $k, m, n\in N$ ……………………………………………………………………. 33
1.7.6. Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму…………………………………………………….. 37
§ 1.8. Решение тригонометрических уравнений с помощью

универсальной подстановки ……………………………….. 38
§ 1.9. Рационально-тригонометрические уравнения………………………. 41
§ 1.10. Метод введения вспомогательного угла …………………………… 43
§ 1.11. Уравнения, содержащие выражения $\sin x \pm \cos x$ и $\sin 2x$ (или $\sin x \cdot \cos x$)……………………………………………………………………….. 49
§ 1.12. Решение уравнений умножением на некоторую тригонометрическую функцию ………………………………………………………………... 51
§ 1.13. Решение уравнений, в записи которых имеется многоточие …….. 54
§ 1.14. Тригонометрические уравнения, решаемые выделением суммы квадратов …………………………………………………………………….. 55
§ 1.15. Метод оценки левой и правой частей уравнений…………………... 57
§ 1.16. Отбор корней тригонометрических уравнений ……………………. 60
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК……………………………………. 65
СОДЕРЖАНИЕ…………………………………………………………… 67

Учебное издание

Галина Георгиевна Ельчанинова,
Роман Анатольевич Мельников

Школьная математика: от альфа до омега
Часть 5 (эпсилон). ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Технический редактор – Н. П. Безногих
Техническое исполнение – В. М. Гришин

Формат 60 x 84 /16. Гарнитура Times. Печать трафаретная.
Усл.-печ.л. 4. Уч.-изд.л. 4,
Тираж 500 экз. (1-й завод 50 экз.). Заказ 93

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, г. Елец, ул. Коммунаров, 28